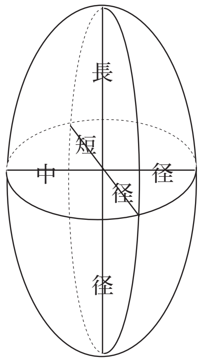
算法求積通考巻之五

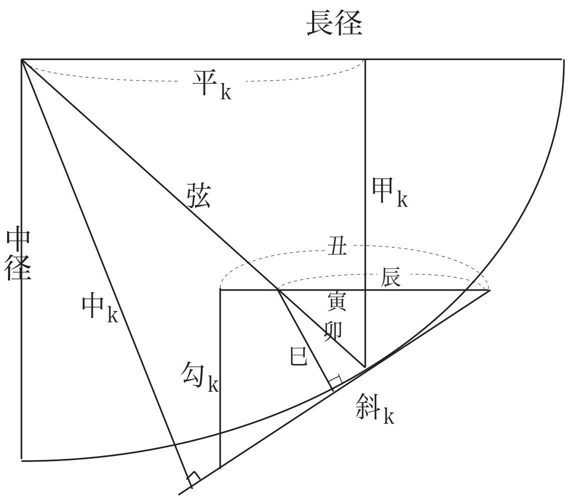
長谷川善左衛門弘閲

彦根藩　内田半吾久命編

$\boxed{88}$ ellipsoid $\dfrac{x^2}{短^2}+\dfrac{y^2}{中^2}+\dfrac{z^2}{長^2}=1$ の表面積を求めよ.



$丑=\dfrac{長}{n}$　　$\dfrac{k}{n}長=平_k$　　$勾_k=\dfrac{中^2天}{n\,甲_k}$



$$
\begin{aligned}
斜_k^2 &= 勾_k^2+丑_k^2\\
&= \frac{中^4天^2}{n^2甲_k^2}+\frac{長^2}{n^2}\\
&= \frac{長^2中^2}{n^2甲_k^2}\left(\frac{中^2天^2}{長^2}+\frac{甲_k^2}{中^2}\right) \qquad (甲_k^2=中^2-中^2天^2\text{より})\\
&= \frac{長^2中^2}{n^2甲_k^2}\left\{1-\left(1-\frac{中^2}{長^2}\right)天^2\right\}
\end{aligned}
$$

$甲_k:平_k=\dfrac{勾_k}{2}:寅$ より $寅=\dfrac{平_k勾_k}{2\,甲_k}$

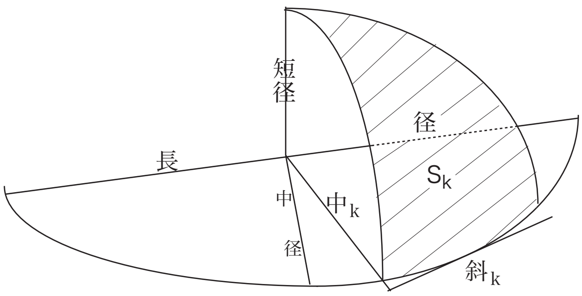
$\text{甲}_k : \text{玄} = \dfrac{\text{勾}_k}{2} : \text{卯}$ より $\text{卯} = \dfrac{\text{勾}_k\text{玄}}{2\,\text{甲}_k}$

$$\text{辰} = \frac{\text{丑}}{2} + \text{寅}$$

$\text{斜}_k : \text{勾}_k = \text{辰} : \text{巳}$ より $\text{巳} = \dfrac{\text{勾}_k\text{辰}}{\text{斜}_k}$

$\text{卯} : \text{巳} = \text{玄} : \text{中}_k$ より $\text{中}_k = \dfrac{\text{玄巳}}{\text{卯}}$

$$\begin{aligned}
\text{中}_k &= \frac{\text{玄巳}}{\text{卯}} = \frac{\text{玄}\dfrac{\text{勾}_k\text{辰}}{\text{斜}_k}}{\dfrac{\text{勾}_k\text{玄}}{2\,\text{甲}_k}} \\
&= \frac{2\,\text{甲}_k}{\text{斜}_k}\text{辰} = \frac{2\,\text{甲}_k}{\text{斜}_k}\left(\frac{\text{丑}}{2} + \text{寅}\right) \\
&= \frac{2\,\text{甲}_k}{\text{斜}_k}\left(\frac{\text{丑}}{2} + \frac{\text{平}_k\text{勾}_k}{2\,\text{甲}_k}\right) \\
&= \frac{2\,\text{甲}_k}{\text{斜}_k}\left(\frac{\text{長}}{2n} + \frac{\text{平}_k\text{勾}_k}{2\,\text{甲}_k}\right) \\
&= \frac{1}{n\,\text{斜}_k\text{甲}_k}(\text{甲}_k^2\text{長} + n\,\text{甲}_k\text{勾}_k\text{平}_k) \\
&= \frac{1}{n\,\text{斜}_k\text{甲}_k}\left(\text{甲}_k^2\text{長} + n\,\text{甲}_k \cdot \frac{\text{中}^2\text{天}}{n\,\text{甲}_k} \cdot \frac{k}{n}\text{長}\right) \\
&= \frac{1}{n\,\text{斜}_k\text{甲}_k}\left\{(\text{中}^2 - \text{天}^2\text{中}^2)\,\text{長} + \text{中}^2\text{天} \cdot \text{長天}\right\} \\
&= \frac{1}{n\,\text{斜}_k\text{甲}_k} \cdot \text{中}^2\text{長}
\end{aligned}$$



$\boxed{85}$より

$$S_k = 2\,\text{中}_k \cdot \text{斜}_k\left(1 - \frac{\text{定}}{3} - \frac{\text{定}^2}{15} - \frac{3\,\text{定}^3}{105} - \frac{15\,\text{定}^4}{945}\right) = \frac{2\,\text{中}^2\text{長}}{n\,\text{甲}_k}\left(1 - \frac{\text{定}}{3} - \frac{\text{定}^2}{15} - \frac{3\,\text{定}^3}{105} - \frac{15\,\text{定}^4}{945}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{定} &= 1 - \frac{\text{短}^2}{\text{中}_k^2} \\
&= 1 - \text{短}^2\frac{n^2\text{斜}_k^2\text{甲}_k^2}{\text{中}^4\text{長}^2}
\end{aligned}$$

$$= 1 - 短^2 \frac{1 - 率天^2}{中^2} \qquad\qquad ここで率 = 1 - \frac{中^2}{長^2}$$

$$= 1 - \frac{短^2}{中^2}\left(1 - \left(1 - \frac{中^2}{長^2}\right)天^2\right)$$

$$= 角 + 亢天^2 \qquad\qquad ここで角 = 1 - \frac{短^2}{中^2}, \qquad 亢 = \frac{短^2}{中^2} - \frac{短^2}{長^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{甲_k} \; - \; & \frac{1}{3}\left(\frac{角}{甲_k} + \frac{亢天^2}{甲_k}\right) \\
- \; & \frac{1}{15}\left(\frac{角^2}{甲_k} + 2\frac{角亢天^2}{甲_k} + \frac{亢^2天^4}{甲_k}\right) \\
- \; & \frac{3}{105}\left(\frac{角^3}{甲_k} + 3\frac{角^2亢天^2}{甲_k} + 3\frac{角亢^2天^4}{甲_k} + \frac{亢^3天^6}{甲_k}\right) \\
- \; & \frac{15}{945}\left(\frac{角^4}{甲_k} + 4\frac{角^3亢天^2}{甲_k} + 6\frac{角^2亢^2天^4}{甲_k} + 4\frac{角亢^3天^6}{甲_k} + \frac{亢^4天^8}{甲_k}\right) \\
\longrightarrow & \\
1 \; - \; & \frac{1}{3}\left(角 + \frac{亢}{2}\right) \\
- \; & \frac{1}{15}\left(角^2 + 2\frac{角亢}{2} + \frac{3\,亢^2}{8}\right) \\
- \; & \frac{3}{105}\left(角^3 + 3\frac{角^2亢}{2} + 3\frac{3\,角亢^2}{8} + \frac{15\,亢^3}{48}\right) \\
- \; & \frac{15}{945}\left(角^4 + 4\frac{角^3亢}{2} + 6\frac{角^2亢^2}{8} + 4\frac{15\,角亢^3}{48} + \frac{105\,亢^3}{384}\right) = \frac{S}{中長\pi}
\end{aligned}$$

【現代解】

$z = c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ 　　D: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ として $S = 8\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$ を求める.

$x = ar\sin\theta,\ y = br\cos\theta$ の変換で

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = abr$$

なので,

$$S = 8\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - r^2 + \left(\dfrac{c^2}{a^2}\cos^2\theta + \dfrac{c^2}{b^2}\sin^2\theta\right) r^2}}{\sqrt{1 - r^2}} abr\ drd\theta \qquad \sin\theta = t \text{ おいて}$$

$$= 8ab\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{1 - \left\{\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2}\right) t^2\right\} r^2}\ drdt$$

ここで $1 - \dfrac{c^2}{b^2} = 角$, $\left(\dfrac{c^2}{b^2} - \dfrac{c^2}{a^2}\right) = 亢$ にあたるので $\left(1 - \dfrac{c^2}{b^2}\right) + \left(\dfrac{c^2}{b^2} - \dfrac{c^2}{a^2}\right) t^2 = 角 + 亢天^2 = 定$

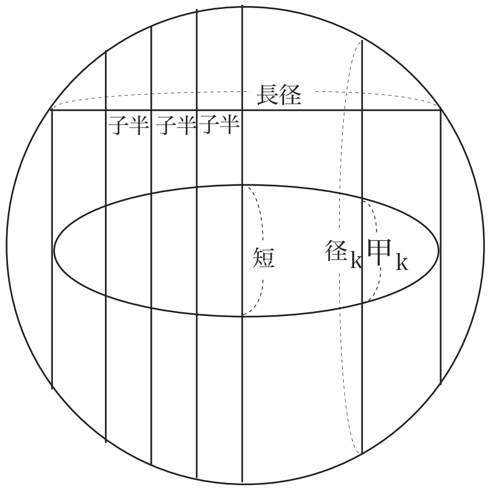
$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{1 - \left\{\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2}\right) t^2\right\} r^2}\ dr = \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{1 - 定\, r^2} dr$$

$$= 1 - \frac{定}{3} - \frac{定^2}{15} - \frac{3\,定^3}{105} - \frac{15\,定^4}{945}$$

これに $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1}{甲_k}$ をかけて項別に積分する．

$\boxed{89}$ 球から楕円柱を穿去する．穿去積と覓積を求めよ．

$子 = \dfrac{長}{n}$，$径_k^2 = 径^2 - 長^2天^2 = 径^2 - 東径^2天^2$　　　ここで$東 = \dfrac{長^2}{径^2}$



径除奇除表より

$$径_k = 径\sqrt{1-東天^2} = 径\left(1 - \frac{東天^2}{2} - \frac{東^2天^4}{8} - \frac{3\,東^3天^6}{48} - \cdots\right)$$

$$\frac{1}{径_k} = \frac{1}{径}\left(1 + \frac{東天^2}{2} + \frac{3\,東^2天^4}{8} + \cdots\right)$$

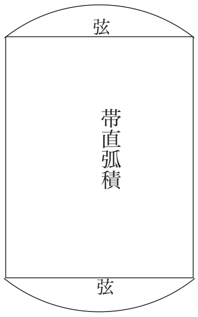
$$\frac{1}{径_k^3} = \frac{1}{径^3}\left(1 + \frac{3\,東天^2}{2} + \frac{15\,東^2天^4}{8} + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{径_k^5} = \frac{1}{径^5}\left(3 + \frac{15\,東天^2}{2} + \frac{105\,東^2天^4}{8} + \cdots\right)$$

また

$$帯直弧積 = 弦 \cdot 径\left(1 - \frac{率}{3\cdot 2} - \frac{率^2}{5\cdot 8} - \frac{3\,率^3}{7\cdot 48} - \frac{15\,率^4}{9\cdot 384} - \cdots\right)$$

ここで $率 = \dfrac{弦^2}{径^2}$　　　本問では $弦 = 甲_k$，$径 = 径_k$



$$V_k = \text{帯直弧積} \times \text{子}$$
$$= \frac{\text{長}}{n}\left(\text{径}_k\text{甲}_k^{\text{㋑}} - \frac{\text{甲}_k^3}{3\cdot 2\,\text{径}_k}^{\text{㋺}} - \frac{\text{甲}_k^5}{5\cdot 8\,\text{径}_k^3}^{\text{㋩}} - \frac{3\,\text{甲}_k^7}{7\cdot 48\,\text{径}_k^5}^{\text{㋥}} - \frac{15\,\text{甲}_k^9}{9\cdot 384\,\text{径}_k^7}^{\text{㋭}}\right)$$

$$\text{㋑} = \text{甲}_k\text{径} - \frac{\text{東天}^2\text{甲}_k\text{径}}{2} - \frac{\text{東}^2\text{天}^4\text{甲}_k\text{径}}{8} - \frac{3\,\text{東}^3\text{天}^6\text{甲}_k\text{径}}{48} - \frac{15\,\text{東}^4\text{天}^8\text{甲}_k\text{径}}{384}$$

$$\text{㋺} = -\frac{\text{甲}_k^3}{6\,\text{径}} - \frac{\text{東天}^2\text{甲}_k^3}{6\cdot 2\,\text{径}} - \frac{3\,\text{東}^2\text{天}^4\text{甲}_k^3}{6\cdot 8\,\text{径}} - \frac{15\,\text{東}^3\text{天}^6\text{甲}_k^3}{6\cdot 48\,\text{径}}$$

$$\text{㋩} = -\frac{\text{甲}_k^5}{5\cdot 8\,\text{径}^3} - \frac{3\,\text{東天}^2\text{甲}_k^5}{5\cdot 8\cdot 2\,\text{径}^3} - \frac{15\,\text{東}^2\text{天}^4\text{甲}_k^5}{5\cdot 8\cdot 8\,\text{径}^3}$$

$$\text{㋥} = -\frac{3\,\text{甲}_k^7}{7\cdot 48\cdot\text{径}^5} - \frac{15\,\text{東天}^2\text{甲}_k^7}{7\cdot 48\cdot 2\,\text{径}^5}$$

$$\text{㋭} = -\frac{15\,\text{甲}_k^9}{9\cdot 384\cdot\text{径}^7}$$

偶除甲表により　　　$\left(\text{西} = \dfrac{\text{短}^2}{\text{径}^2}\text{とする}\right)$

$$\sum^{\infty}\frac{\text{長}}{n}\text{甲}_k\text{径} = \frac{\pi}{4}\text{長短径}$$

$$\sum^{\infty}\frac{\text{長}}{n}\left(\frac{\text{東天}^2\text{甲}_k\text{径}}{2} + \frac{\text{甲}_k^3}{6\,\text{径}^2}\right) = \frac{1}{2}\text{長}\cdot\text{径}\cdot\text{東}\cdot\frac{1}{4}\frac{\pi}{4}\text{短} + \frac{1}{6\,\text{径}}\frac{3}{4}\frac{\pi}{4}\text{短}^3 = \frac{\pi}{4}\text{長短径}\frac{1}{8}(\text{西}+\text{東})$$

$$\begin{aligned}
&\sum^{\infty}\frac{\text{長}}{n}\left(\frac{\text{東}^2\text{天}^4\text{甲}_k\text{径}}{8} + \frac{\text{東天}^2\text{甲}_k^3}{6\cdot 2\,\text{径}} + \frac{\text{甲}_k^5}{5\cdot 8\,\text{径}^3}\right)\\
&\qquad = \frac{\text{長}}{8}\text{東}^2\text{径}\frac{3}{6\cdot 4}\frac{\pi}{4}\text{短} + \frac{\text{長}}{6\cdot 2\cdot\text{径}}\frac{3\,\text{東}}{6\cdot 4}\frac{\pi}{4}\text{短}^3 + \frac{\text{長}}{5\cdot 8\cdot\text{径}^3}\frac{15}{24}\frac{\pi}{4}\text{短}^5\\
&\qquad = \text{長短径}\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{6\cdot 4\cdot 8}\left(3\,\text{東}^2 + 2\,\text{東}\frac{\text{短}^2}{\text{径}^2} + 3\frac{\text{短}^4}{\text{径}^2}\right)\right)\\
&\qquad = \text{長短径}\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{6\cdot 4\cdot 8}\left(3\,\text{東}^2 + 2\,\text{東西} + 3\,\text{西}^2\right)\right)
\end{aligned}$$

以下このように計算していくと

$$
\begin{aligned}
V = 長短径\frac{\pi}{4}\{1 &- \frac{1}{4\cdot 2}(西+東) \\
&- \frac{1}{6\cdot 4\cdot 8}(3\,西^2+2\,東西+3\,東^2) \\
&- \frac{3}{8\cdot 24\cdot 48}(15\,西^3+3\cdot 3\,東西^2+3\cdot 3\,東^2西+15\,東^3) \\
&- \frac{15}{10\cdot 192\cdot 384}(105\,西^4+4\cdot 15\,東西^3+6\cdot 3^2東^2西^2+4\cdot 15\,東^3西+105\,東^4)\Big\}
\end{aligned}
$$

これで，答は出たが，さらに「逐差の象を探索して括ること左の如し」とし，漸化式を求めている．
$V = A_0 - A_1 - A_2 - A_3 - \cdots$ として 北 $=$ 西 $+$ 東，南 $=$ 西 $\cdot$ 東 とおき，

$$k\,残差 = \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k+2)(2k+4)}A_k北 - A_{k+1}$$

を計算して求めている．

$$A_0 = 長短径\frac{\pi}{4}$$

$$A_1 = \frac{1}{2\cdot 4}北\,A_0$$

$$A_2 = \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}(北\,A_1 - \frac{1}{2\cdot 3}南\,A_0)$$

$$A_3 = \frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}(北\,A_2 - \frac{2\cdot 1}{3\cdot 5}南\,A_1)$$

$$A_4 = \frac{5\cdot 7}{8\cdot 10}(北\,A_3 - \frac{3\cdot 3}{4\cdot 7}南\,A_2)$$

$$A_5 = \frac{7\cdot 9}{10\cdot 12}(北\,A_4 - \frac{4\cdot 5}{5\cdot 9}南\,A_3)$$

覔積を求める術

$$斜_k = \frac{子径}{径_k}$$

立表第九弧背により

$$背_k = 1 + \frac{率}{3\cdot 2} + \frac{3\,率^2}{5\cdot 8} + \frac{15\,率^3}{7\cdot 48} + \frac{105\,率^4}{9\cdot 384}$$

ここで 率 $= \dfrac{甲_k^2}{径_k}$

$$
\begin{aligned}
S_k &= 背_k \cdot 斜_k \\
&= \frac{長径}{n}\left(\frac{甲_k}{径_k} + \frac{甲_k^3}{3\cdot 2\,径_k^3} + \frac{3\,甲^5}{5\cdot 8\,径_k^5} + \frac{15\,甲_k^7}{7\cdot 48\,径_k^7} + \frac{105\,甲_k^9}{9\cdot 384\,径_k^9}\right) \\
&= \frac{長}{n}\Big(甲_k + \frac{東天^2甲_k}{2} + \frac{3\,東^2天^4甲_k}{8} + \frac{15\,東^3天^6甲_k}{48} + \frac{105\,東^4天^8甲_k}{384} \\
&\qquad + \frac{甲_k^3}{6\,径^2} + \frac{3\,東天^2甲_k^3}{6\cdot 2\,径^2} + \frac{15\,東^2天^4甲_k^3}{6\cdot 8\,径^2} + \frac{105\,東^3天^6甲_k^3}{6\cdot 48\,径^2} \\
&\qquad\qquad + \frac{3\,甲_k^5}{5\cdot 8\,径^4} + \frac{15\,東天^2甲_k^5}{5\cdot 8\cdot 2\,径^4} + \frac{１０５東^2天^4甲_k^5}{5\cdot 8\cdot 8\,径^4}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{15\,甲_k^7}{7\cdot 48\,径^6}+\frac{105\,東天^2甲_k^7}{7\cdot 48\cdot 2\,径^6}$$
$$+\frac{105\,甲_k^9}{9\cdot 384\,径^8}\Bigg)$$

$$\begin{aligned}S=長短\frac{\pi}{4}\Bigg(&1+\frac{1}{4\cdot 2}(東+西)\\&+\frac{3}{6\cdot 4\cdot 8}(3\,東^2+2\,東西+3\,西^2)\\&+\frac{15}{8\cdot 24\cdot 48}(15\,東^3+3\cdot 3\,東^2西+3\cdot 3\,東西^2+15\,西^3)\\&+\frac{105}{10\cdot 192\cdot 384}(105\,東^4+15\cdot 4\,東^3西+6\cdot 3^2東^2西^2+15\cdot 4\,東西^3+105\,西^4)\Bigg)\end{aligned}$$

これを $S=B_0+B_1+B_2+B_3+\cdots$ とかくと

$$B_0=長短\frac{\pi}{4},\ B_1=1\cdot A_1,\ B_2=3A_2,\ B_3=5A_3,\ B_4=7A_4,\ B_5=9A_5,\ \cdots$$

$\boxed{90}$ 回転楕円体から円柱を穿去するときの穿去積を求めよ．
長軸方向に $\dfrac{短}{短}$ して $\boxed{89}$ を使う．

$\boxed{91}$ ellipsoid $\dfrac{x^2}{短^2}+\dfrac{y^2}{中^2}+\dfrac{z^2}{長^2}=1$ から楕円柱を穿去するときの穿去積を求めよ．
z 軸方向に $\dfrac{中}{長}$ 倍し，x 軸方向に $\dfrac{中}{短}$ して $\boxed{89}$ を使う．

$\boxed{92}$ 球から楕円柱を穿去する．楕円柱が球に接しているとき，穿去覓積 (穿去した球の表面積) を求める．

$$子=\frac{短}{n}$$
$$矢_k=短天$$

径矢弦の術より

$$径_k^2=4\,径矢_k-4\,矢_k^2=4\,径短天-4\,径短乾天^2 \qquad \left(乾=\frac{短}{径}\right)$$
$$径_k=2\sqrt{径短天}\sqrt{1-乾天}$$
$$斜_k=\frac{径子}{径_k}$$

立表第九條より

$$弧背=弦\left(1+\frac{率}{3\cdot 2}+\frac{3\,率^2}{5\cdot 8}+\frac{15\,率^3}{7\cdot 48}+\frac{105\,率^4}{9\cdot 384}+\frac{945\,率^5}{11\cdot 3840}\right) \qquad ここで率=\frac{弦^2}{径^2}$$

この公式で，径を 径$_k$，弦を 乙$_k$ として 背$_k$ を求め，斜$_k$ をかけて某覓積 S_k とする．(乙$_k$ の直径は長であ

ることに注意)

$$S_k = \text{背}_k\text{斜}_k = \frac{\text{径短}}{n}\left(\frac{\text{乙}_k}{\text{径}_k}{}^{\text{㋑}} + \frac{\text{乙}_k^3}{3\cdot 2\,\text{径}_k^3}{}^{\text{㋺}} + \frac{3\,\text{乙}_k^5}{5\cdot 8\,\text{径}_k^5}{}^{\text{㋩}} + \frac{15\,\text{乙}_k^7}{7\cdot 48\,\text{径}_k^7}{}^{\text{㋥}} + \frac{105\,\text{乙}_k^9}{9\cdot 384\,\text{径}_k^9}{}^{\text{㋭}}\right)$$

立表第六径除奇除表より

$$\begin{aligned}
\frac{\text{径短}}{\text{径}_k} &= \frac{\text{径短}}{2\sqrt{\text{径短天}}\sqrt{1-\text{乾天}}} \\
&= \frac{\sqrt{\text{径短}}}{2}\frac{1}{\sqrt{\text{天}}}\left(1+\frac{1}{2}\text{乾天}+\frac{3}{8}\text{乾}^2\text{天}^2+\frac{15}{48}\text{乾}^3\text{天}^3+\frac{105}{384}\text{乾}^4\text{天}^4\right) \\
&= \sqrt{\text{径短}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\text{天}}}+\frac{\text{乾}\sqrt{\text{天}}}{2\cdot 2}+\frac{3\,\text{乾}^2\text{天}\sqrt{\text{天}}}{2\cdot 8}+\frac{15\,\text{乾}^3\text{天}^2\sqrt{\text{天}}}{2\cdot 48}+\frac{105\,\text{乾}^4\text{天}^3\sqrt{\text{天}}}{2\cdot 384}\right)
\end{aligned}$$

だから

$$\text{㋑} = \frac{\sqrt{\text{径短}}}{n}\left(\frac{\text{乙}_k}{2\sqrt{\text{天}}}+\frac{\text{乾}\sqrt{\text{天}}\text{乙}_k}{2\cdot 2}+\frac{3\,\text{乾}^2\text{天}\sqrt{\text{天}}\text{乙}_k}{2\cdot 8}+\frac{15\,\text{乾}^3\text{天}^2\sqrt{\text{天}}\text{乙}_k}{2\cdot 48}+\frac{105\,\text{乾}^4\text{天}^3\sqrt{\text{天}}\text{乙}_k}{2\cdot 384}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\text{径短}}{6\,\text{径}_k^3} &= \frac{\text{径短}}{6}\frac{1}{8\,\text{径短}\sqrt{\text{径短天}}\sqrt{\text{天}}}\frac{1}{(\sqrt{1-\text{乾天}})^3} \\
&= \frac{1}{6\cdot 8\sqrt{\text{径短}}}\frac{1}{\text{天}\sqrt{\text{天}}}\left(1+\frac{3}{2}\text{乾天}+\frac{15}{8}\text{乾}^2\text{天}^2+\frac{105}{48}\text{乾}^3\text{天}^3\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\text{径短}}}\left(\frac{1}{6\cdot 8\,\text{天}\sqrt{\text{天}}}+\frac{3\,\text{乾}}{6\cdot 8\cdot 2\sqrt{\text{天}}}+\frac{15\,\text{乾}^2\sqrt{\text{天}}}{6\cdot 8\cdot 8}+\frac{105\,\text{乾}^3\text{天}\sqrt{\text{天}}}{6\cdot 8\cdot 48}\right)
\end{aligned}$$

だから

$$\text{㋺} = \frac{1}{\sqrt{\text{径短}}n}\left(\frac{\text{乙}_k^3}{6\cdot 8\,\text{天}\sqrt{\text{天}}}+\frac{3\,\text{乾乙}_k^3}{6\cdot 8\cdot 2\sqrt{\text{天}}}+\frac{15\,\text{乾}^2\sqrt{\text{天}}\text{乙}_k^3}{6\cdot 8\cdot 8}+\frac{105\,\text{乾}^3\text{天}\sqrt{\text{天}}\text{乙}_k^3}{6\cdot 8\cdot 48}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{3\,\text{径短}}{5\cdot 8\,\text{径}_k^5} &= \frac{3\,\text{径短}}{5\cdot 8\cdot 32\,\text{径}^2\text{短}^2\sqrt{\text{径短天}^2}\sqrt{\text{天}}}\frac{1}{(\sqrt{1-\text{乾天}})^5} \\
&= \frac{1}{5\cdot 8\cdot 32\,\text{径短}\sqrt{\text{径短天}^2}\sqrt{\text{天}}}\left(3+\frac{15\,\text{乾天}}{2}+\frac{105}{8}\text{乾}^2\text{天}^2\right) \\
&= \frac{1}{5\cdot 8\cdot 32\,\text{径短}\sqrt{\text{径短}}}\left(\frac{3}{\text{天}^2\sqrt{\text{天}}}+\frac{15\,\text{乾}}{2\,\text{天}\sqrt{\text{天}}}+\frac{105\,\text{乾}^2}{8\sqrt{\text{天}}}\right)
\end{aligned}$$

だから

$$\text{㋩} = \frac{1}{5\cdot 8\cdot 32\,\text{径短}\sqrt{\text{径短}}n}\left(\frac{3\,\text{乙}_k^5}{\text{天}^2\sqrt{\text{天}}}+\frac{15\,\text{乾乙}_k^5}{2\,\text{天}\sqrt{\text{天}}}+\frac{105\,\text{乾}^2\text{乙}_k^5}{8\sqrt{\text{天}}}\right)$$

同様にして

$$\text{㋥} = \frac{1}{7\cdot 48\cdot 128\,\text{径}^2\text{短}^2\sqrt{\text{径短}}n}\left(\frac{15\,\text{乙}_k^7}{\text{天}^3\sqrt{\text{天}}}+\frac{105\,\text{乾乙}_k^7}{2\,\text{天}^2\sqrt{\text{天}}}\right)$$

$$\text{㋭} = \frac{105\,\text{乙}_k^9}{9\cdot 384\cdot 512\,\text{径}^3\text{短}^3\sqrt{\text{径短}}n\,\text{天}^4\sqrt{\text{天}}}$$

$$\frac{\text{乙}_k}{2\sqrt{\text{天}}} \longrightarrow \frac{2}{3} \quad \text{(奇乗乙表)}$$

$$\frac{乾\sqrt{天}乙_k}{2\cdot 2}+\frac{乙_k^3}{6\cdot 8\,天\sqrt{天}}\longrightarrow\frac{1}{2\cdot 2}\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 8}\frac{4^2}{5}=\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\quad(奇乗乙表，天除乙表より)$$

このようにして

$$覔積=長\sqrt{径短}\left(\frac{2}{3}+\frac{2\,乾+坤}{3\cdot 5}+\frac{2\,乾^2+乾坤+\frac{3\,坤^2}{4}}{5\cdot 7}\right.$$
$$\left.+\frac{2\,乾^3+乾^2坤+\frac{3\,乾坤^2}{4}+\frac{15\,坤^3}{24}}{7\cdot 9}+\frac{2\,乾^4+乾^3坤+\frac{3\,乾^2坤^2}{4}+\frac{15\,乾坤^3}{24}+\frac{105\,坤^4}{192}}{9\cdot 11}\right)$$

$$覔積=A_0+A_1+A_2+A_3+\cdots\qquad\left(坤=\frac{長^2}{径短}\right)$$

$$A_0=\frac{2}{3}長\sqrt{径短}$$

$$A_1=\frac{1}{5}(甲+乾\,A_0)\qquad 甲=\frac{坤}{2}A_0$$

$$A_2=\frac{3}{7}(乙+乾\,A_1)\qquad 乙=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 5}坤甲$$

$$A_3=\frac{5}{9}(丙+乾\,A_2)\qquad 丙=\frac{3\cdot 5}{6\cdot 7}坤乙$$

$$A_4=\frac{7}{11}(丁+乾\,A_3)\qquad 丁=\frac{5\cdot 7}{8\cdot 9}坤丙$$

$$A_5=\frac{9}{13}(戊+乾\,A_4)\qquad 戊=\frac{7\cdot 9}{10\cdot 11}坤丁$$

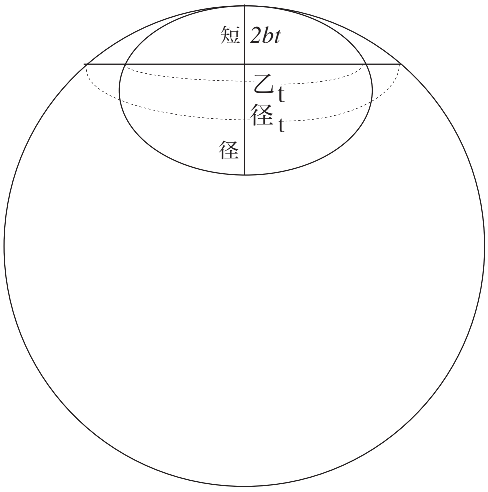
【現代解】

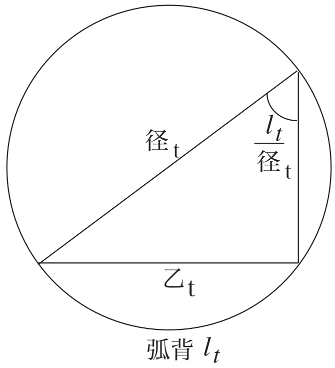
$$弧背=径_t\sin^{-1}\frac{乙_t}{径_t}$$

$$某覔積=背_t斜_t=径短\sin^{-1}\frac{乙_t}{径_t}\Delta t=\left\{\frac{乙_t}{径_t}+\frac{1}{3\cdot 2}\left(\frac{乙_t}{径_t}\right)^3+\frac{3}{5\cdot 8}\left(\frac{乙_t}{径_t}\right)^5+\cdots\right\}\Delta t$$

$$覔積=径短\int_0^1\sin^{-1}\frac{乙_t}{径_t}dt=径短\int_0^1\left\{\frac{乙_t}{径_t}+\frac{1}{3\cdot 2}\left(\frac{乙_t}{径_t}\right)^3+\frac{3}{5\cdot 8}\left(\frac{乙_t}{径_t}\right)^5+\cdots\right\}dt$$

$$乙_t=2\,長\sqrt{t-t^2},\quad 径_t=\sqrt{径短}\sqrt{t-\frac{短}{径}t^2}$$





楕円を $\dfrac{(z-r+b)^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ $(2b=短径,\ 2a=長径)$ とする．$z=r-2bt$ との交点を求めると

$$\frac{(b-2bt)^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$y=2a\sqrt{t-t^2}$$

$$乙_t=2y=4a\sqrt{t-t^2}=2\,長\sqrt{天-天^2}$$

$\boxed{93}$ 十字環の体積を求めよ．

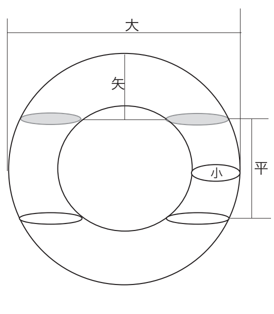
付録 CD『十字環問題について』(jujikan.pdf) に集録

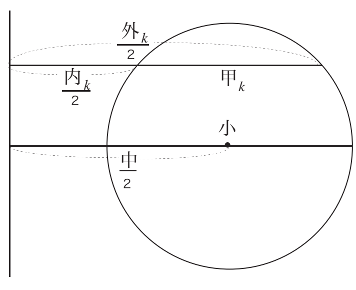
$\boxed{94}$ Torus を上から矢の長さのところで切った切断面[1)] の面積を求める．

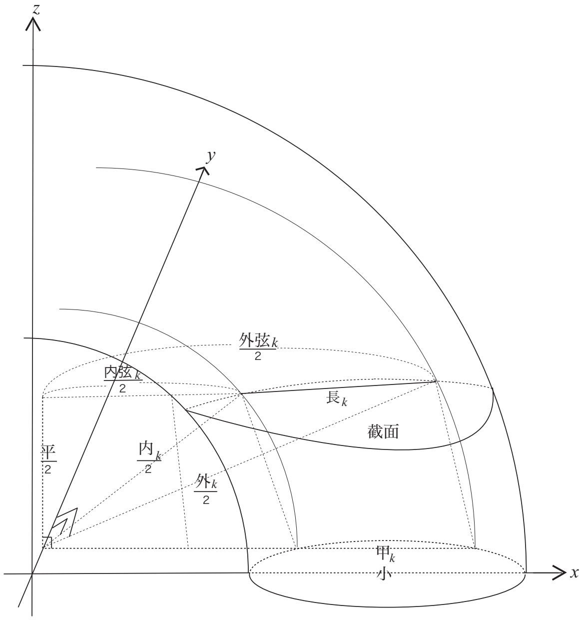
外径 $=$ 大，輪径 $=$ 小 とする．子 $=\dfrac{小}{n}$，中 $=$ 大 $-$ 小，平 $=$ 大 -2 矢 とおく．小 $<$ 矢 とする．

外$_k$ $=$ 中 $+$ 甲$_k$，内$_k$ $=$ 中 $-$ 甲$_k$，$\dfrac{甲_k}{中}=$ 定 とし，

$1+定=\dfrac{外_k}{中}=日$，$1-定=\dfrac{内_k}{中}=月$ とおくと 中日 $=$ 外$_k$，中月 $=$ 内$_k$







$$\text{外弦}_k = \sqrt{\text{外}_k^2 - \text{平}^2} = \text{外}_k\sqrt{1-\left(\frac{\text{平}}{\text{外}_k}\right)^2}$$

$$= \text{日中} - \frac{\text{平}^2}{2\,\text{日中}} - \frac{\text{平}^4}{8\,\text{日}^3\text{中}^3} - \frac{3\,\text{平}^6}{48\,\text{日}^5\text{中}^5} - \frac{15\,\text{平}^8}{384\,\text{日}^7\text{中}^7} - \frac{105\,\text{平}^{10}}{3840\,\text{日}^9\text{中}^9}$$

日を月に換えて[2)]

$$\text{内弦}_k = \text{月中} - \frac{\text{平}^2}{2\,\text{月中}} - \frac{\text{平}^4}{8\,\text{月}^3\text{中}^3} - \frac{3\,\text{平}^6}{48\,\text{月}^5\text{中}^5} - \frac{15\,\text{平}^8}{384\,\text{月}^7\text{中}^7} - \frac{105\,\text{平}^{10}}{3840\,\text{月}^9\text{中}^9}$$

$$2\,\text{長}_k = \text{外弦}_k - \text{内弦}_k$$

$$S_k = \text{長}_k \cdot \text{子}$$

$$= \frac{\text{小}}{2n}\Bigg(\text{日中}\,\text{㋑} - \text{月中}\,\text{子} - \frac{\text{平}^2}{2\,\text{日中}}\,\text{㋺} + \frac{\text{平}^2}{2\,\text{月中}}\,\text{丑} - \frac{\text{平}^4}{8\,\text{日}^3\text{中}^3}\,\text{㋩} + \frac{\text{平}^4}{8\,\text{月}^3\text{中}^3}\,\text{寅}$$

$$- \frac{3\,\text{平}^6}{48\,\text{日}^5\text{中}^5}\,\text{㋥} + \frac{3\,\text{平}^6}{48\,\text{月}^5\text{中}^5}\,\text{卯} - \cdots\Bigg)$$

$$\text{㋑} + \text{子} = \text{日中} - \text{月中} = 2\,\text{甲}_k$$

日月表により

$$\frac{1}{\text{日}} = \frac{1}{1+\text{定}} = 1 - \text{定} + \text{定}^2 - \text{定}^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\text{月}} = \frac{1}{1-\text{定}} = 1 + \text{定} + \text{定}^2 + \text{定}^3 + \cdots$$

$$\text{ロ} + \text{丑} = \frac{\text{平}^2\text{甲}_k}{2\,\text{中}^2} + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k^3}{2\,\text{中}^4} + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k^5}{2\,\text{中}^6} + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k^8}{2\,\text{中}^8} + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k^9}{2\,\text{中}^{10}}$$

$$\frac{1}{\text{日}^2} = \frac{1}{(1+\text{定})^2} = 1 - 2\,\text{定} + 3\,\text{定}^2 - 4\,\text{定}^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\text{月}^2} = \frac{1}{(1-\text{定})^2} = 1 + 2\,\text{定} + 3\,\text{定}^2 + 4\,\text{定}^3 + + \cdots$$

$$\text{ハ} + \text{寅} = \frac{3\,\text{平}^4\text{甲}_k}{8\,\text{中}^4} + \frac{10\,\text{平}^4\text{甲}_k^3}{8\,\text{中}^6} + \frac{21\,\text{平}^4\text{甲}_k^5}{8\,\text{中}^8} + \frac{36\,\text{平}^4\text{甲}_k^7}{8\,\text{中}^{10}}$$

$$\frac{1}{\text{日}^3} = \frac{1}{(1+\text{定})^3} = 1 - 3\,\text{定} + 6\,\text{定}^2 - 10\,\text{定}^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\text{月}^3} = \frac{1}{(1-\text{定})^3} = 1 + 3\,\text{定} + 6\,\text{定}^2 + 10\,\text{定}^3 + \cdots$$

$$\text{ニ} + \text{卯} = \frac{3\cdot 5\,\text{平}^6\text{甲}_k}{48\,\text{中}^6} + \frac{3\cdot 35\,\text{平}^6\text{甲}_k^3}{48\,\text{中}^8} + \frac{3\cdot 126\,\text{平}^6\text{甲}_k^5}{48\,\text{中}^{10}}$$

$$\frac{1}{\text{日}^4} = \frac{1}{(1+\text{定})^4} = 1 - 4\,\text{定} + 10\,\text{定}^2 - 20\,\text{定}^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\text{月}^4} = \frac{1}{(1-\text{定})^4} = 1 + 4\,\text{定} + 10\,\text{定}^2 + 20\,\text{定}^3 + \cdots$$

$$\text{ホ} + \text{辰} = \frac{7\cdot 15\,\text{平}^8\text{甲}_k}{384\,\text{中}^8} + \frac{15\cdot 84\,\text{平}^8\text{甲}_k^3}{384\,\text{中}^{10}}$$

$$\frac{1}{\text{日}^5} = \frac{1}{(1+\text{定})^5} = 1 - 5\,\text{定} + 15\,\text{定}^2 - 35\,\text{定}^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\text{月}^5} = \frac{1}{(1-\text{定})^5} = 1 + 5\,\text{定} + 15\,\text{定}^2 + 35\,\text{定}^3 + \cdots$$

$$\text{ヘ} + \text{巳} = \frac{9\cdot 105\,\text{平}^{10}\text{甲}_k}{3840\,\text{中}^{10}}$$

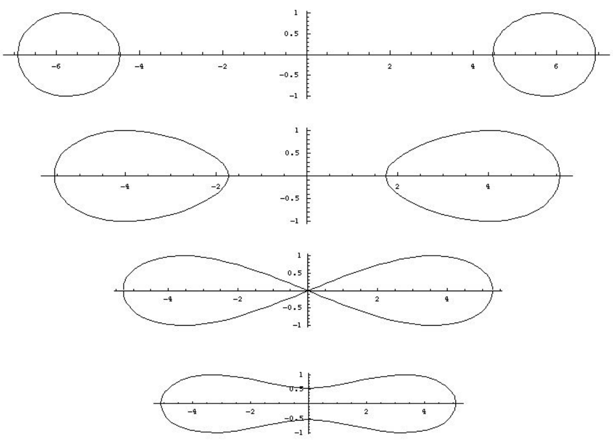
$$\begin{aligned}
\therefore\quad S_k \;=\;& \frac{\text{小}}{n}\Bigg(\text{甲}_k + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k}{2\,\text{中}^2} + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k^3}{2\,\text{中}^4} + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k^5}{2\,\text{中}^6} + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k^7}{2\,\text{中}^8} + \frac{\text{平}^2\text{甲}_k^9}{2\,\text{中}^{10}} \\
&+ \frac{3\,\text{平}^4\text{甲}_k}{8\,\text{中}^4} + \frac{10\,\text{平}^4\text{甲}_k^3}{8\,\text{中}^6} + \frac{21\,\text{平}^4\text{甲}_k^5}{8\,\text{中}^8} + \frac{36\,\text{平}^4\text{甲}_k^7}{8\,\text{中}^{10}} \\
&+ \frac{3\cdot 5\,\text{平}^6\text{甲}_k}{48\,\text{中}^6} + \frac{3\cdot 35\,\text{平}^6\text{甲}_k^3}{48\,\text{中}^8} + \frac{3\cdot 126\,\text{平}^6\text{甲}_k^5}{48\,\text{中}^{10}} \\
&+ \frac{7\cdot 15\,\text{平}^8\text{甲}_k}{384\,\text{中}^8} + \frac{15\cdot 84\,\text{平}^8\text{甲}_k^3}{384\,\text{中}^{10}} \\
&+ \frac{9\cdot 105\,\text{平}^{10}\text{甲}_k}{3840\,\text{中}^{10}}\Bigg) \qquad \left(\text{乾} = \frac{\text{平}^2}{\text{中}^2},\quad \text{坤} = \frac{\text{小}^2}{\text{中}^2}\right) \\
\longrightarrow\;& \frac{\pi}{4}\text{小}^2\Bigg(1 + \frac{\text{乾}}{2} + \frac{3\,\text{乾坤}}{2\cdot 4} + \frac{15\,\text{乾坤}^2}{2\cdot 24} + \frac{105\,\text{乾坤}^3}{2\cdot 192} + \frac{945\,\text{乾坤}^4}{2\cdot 1920} \\
&+ \frac{3\,\text{乾}^2}{8} + \frac{3\cdot 10\,\text{乾}^2\text{坤}}{8\cdot 4} + \frac{15\cdot 21\,\text{乾}^2\text{坤}^2}{8\cdot 28} + \frac{105\cdot 36\,\text{乾}^2\text{坤}^3}{8\cdot 192} \\
&+ \frac{3\cdot 5\,\text{乾}^3}{48} + \frac{3\cdot 3\cdot 35\,\text{乾}^3\text{坤}}{48\cdot 4} + \frac{3\cdot 15\cdot 126\,\text{乾}^3\text{坤}^2}{48\cdot 24}
\end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{15 \cdot 7\,乾^4}{384} + \frac{15 \cdot 3 \cdot 84\,乾^4坤}{384 \cdot 4}$$
$$+ \quad \frac{105 \cdot 9\,乾^5}{3840}\Bigg)$$

注 1) $D \subset \mathbf{R}^2, \qquad \mathbf{p}(u,\ v) : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$ に対して

$$\mathbf{p}(u,\ v) = [(R + r\cos u)\cos v,\ r\sin u,\ (R + r\cos u)\sin v], \qquad (u,\ v) \in (0,\ 2\pi) \times (0,\ 2\pi)$$

が Torus を描く．$R = 7,\ r = 1$ として，$z = 4,\ 5,\ 6,\ 7$ の截面



注 2) Torus $\mathbf{p}(u,\ v) = [(R+r\cos u)\cos v,\ r\sin u,\ (R+r\cos u)\sin v]$ を $x,\ y,\ z$ 座標でかくと $(\sqrt{x^2+z^2} - R)^2 + y^2 = r^2$，これを $z = z_0,\ y = h$ での切り口で見ると $\sqrt{x^2 + z_0^2} = R \pm \sqrt{r^2 - h^2}$
$+$ が 外$_k$，$-$ が 内$_k$ でそのときの $\sqrt{x^2 + z_0^2}$ が $\dfrac{外_k}{2}$，$\dfrac{内_k}{2}$ となる．

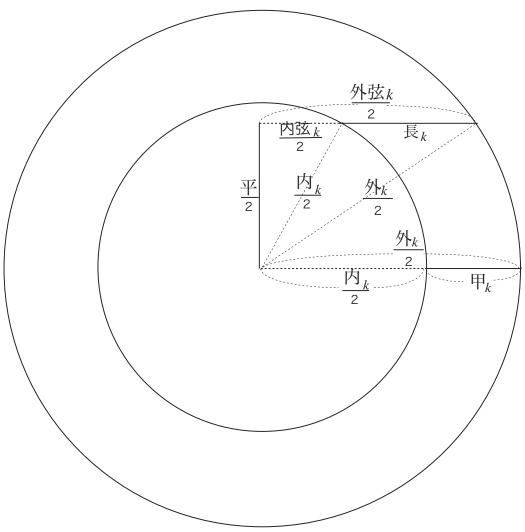
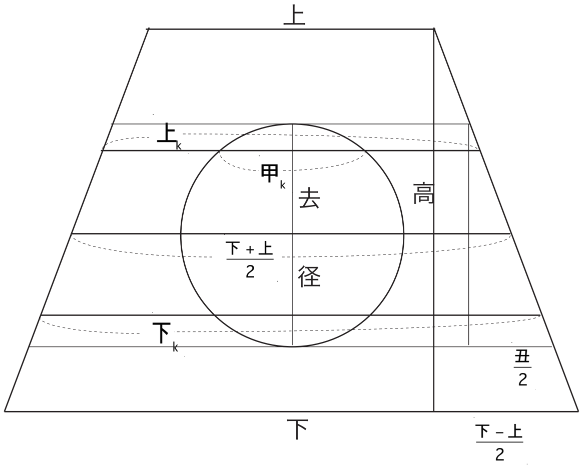


図 1　平面 $y =$ 甲$_k$ での切り口

$\boxed{95}$ 円すい台から円柱を穿去した体積を求める.

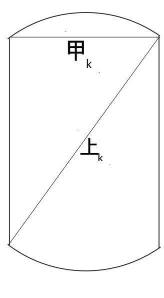


$\dfrac{去}{n} = 子$, $上 + 下 = 東$, $\dfrac{下 - 上}{高} = 西$, $\dfrac{去}{東} = 南$ とする. 去径 : $\dfrac{丑}{2} = 高 : \dfrac{下 - 上}{2}$ より

$$丑 = \frac{去\,(下 - 上)}{高} = 東南西$$

$$上_k = \frac{上 + 下}{2} - \frac{丑}{2} \times \frac{n}{k} = \frac{東}{2} - \frac{東西南天}{2} = \frac{東}{2}(1 - 西南天) = \frac{東月}{2}$$

$$下_k = \frac{上 + 下}{2} + \frac{丑}{2} \times \frac{n}{k} = \frac{東}{2} + \frac{東西南天}{2} = \frac{東}{2}(1 + 西南天) = \frac{東日}{2}$$



上の帯直弧積 T_k は

$$\begin{aligned} T_k &= 甲_k - \frac{甲_k^3}{2 \cdot 3\, 上_k} - \frac{甲_k^5}{5 \cdot 8\, 上_k^3} - \frac{3\, 甲_k^7}{7 \cdot 48\, 上_k^5} - \frac{15\, 甲_k^9}{9 \cdot 384\, 上_k^7} - \frac{105\, 甲_k^{11}}{11 \cdot 3840\, 上_k^9} \\ &= \frac{東月}{2}甲_k - \frac{甲_k^3}{3\, 東月} - \frac{甲_k^5}{5\, 東^3 月^3} - \frac{2\, 甲_k^7}{7\, 東^5 月^5} - \frac{5\, 甲_k^9}{9\, 東^7 月^7} - \frac{14\, 甲_k^{11}}{11\, 東^9 月^9} \end{aligned}$$

下の帯直弧積 U_k は月を日に換えて

$$U_k = \frac{東日}{2}甲_k - \frac{甲_k^3}{3\, 東日} - \frac{甲_k^5}{5\, 東^3 日^3} - \frac{2\, 甲_k^7}{7\, 東^5 日^5} - \frac{5\, 甲_k^9}{9\, 東^7 日^7} - \frac{14\, 甲_k^{11}}{11\, 東^9 日^9}$$

$$某上積 = \frac{子}{2} T_k, \quad 某下積 = \frac{子}{2} U_k$$

$$V_k = \text{某上積} + \text{某下積} = \frac{\text{子}}{2}(T_k + U_k)$$
$$= \frac{\text{去}}{n}\text{東}\left\{\frac{\text{甲}_k}{2} - \left(\frac{\text{甲}_k^3}{3\,\text{東}^2\text{月}} + \frac{\text{甲}_k^3}{3\,\text{東}^2\text{日}}\right) - \left(\frac{\text{甲}_k^5}{5\,\text{東}^4\text{月}^3} + \frac{\text{甲}_k^5}{5\,\text{東}^4\text{日}^3}\right) - \cdots\right\}$$

ここで

$$\text{甲}_k \longrightarrow \frac{\pi}{4}\text{去}$$
$$\frac{\text{甲}_k^3}{3\,\text{東}^2\text{月}} + \frac{\text{甲}_k^3}{3\,\text{東}^2\text{日}} = \frac{\text{甲}_k^3}{3\,\text{東}^2}(1 + \text{西}^2\text{南}^2\text{天}^2 + \text{西}^4\text{南}^4\text{天}^4 + \text{西}^6\text{南}^6\text{天}^6 + \cdots)$$
$$\frac{\text{甲}_k^5}{5\,\text{東}^4\text{月}^3} + \frac{\text{甲}_k^5}{5\,\text{東}^4\text{日}^3} = \frac{\text{甲}_k^5}{5\,\text{東}^4}(1 + 6\,\text{西}^2\text{南}^2\text{天}^2 + 15\,\text{西}^4\text{南}^4\text{天}^4 + 28\,\text{西}^6\text{南}^6\text{天}^6 + \cdots)$$

$$\begin{aligned}V_k \longrightarrow \frac{\pi}{4}\text{東去}^2 \Bigg(& \frac{1}{2} - \frac{\text{乾}}{4} - \frac{\text{坤乾}^2}{24} - \frac{3\,\text{坤}^2\text{乾}^3}{192} - \frac{15\,\text{坤}^3\text{乾}^4}{1920} - \frac{105\,\text{坤}^4\text{乾}^5}{12\cdot 1920} \\
- & \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2}\cdot\frac{\text{乾}^2}{24} - \frac{2\cdot 2\cdot 3\,\text{坤}}{2}\cdot\frac{3\,\text{乾}^3}{192} - \frac{3\cdot 2\cdot 3\,\text{坤}^2}{2}\cdot\frac{15\,\text{乾}^4}{1920} - \frac{4\cdot 2\cdot 3\,\text{坤}^3}{2}\cdot\frac{105\,\text{乾}^5}{12\cdot 1920} \\
- & \frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3}\cdot\frac{3\,\text{乾}^3}{192} - \frac{3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,\text{坤}}{2\cdot 3}\cdot\frac{15\,\text{乾}^4}{1920} - \frac{6\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,\text{坤}^2}{2\cdot 3}\cdot\frac{105\,\text{乾}^5}{12\cdot 1920} \\
- & \frac{1\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{15\,\text{乾}^4}{1920} - \frac{4\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\,\text{坤}}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{105\,\text{乾}^5}{12\cdot 1920} \\
- & \frac{1\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{105\,\text{乾}^5}{12\cdot 1920}\end{aligned}$$

ここで，乾 $=$ 南^2，坤 $=$ 西^2

上 $=$ 下 の場合は 坤 $= 0$，乾 $= \dfrac{\text{去}^2}{4\,\text{上}^2}$ で $\boxed{68}$ の結果と一致する．

$\boxed{96}$ 円すい N 個を円形に並べたときの表面積を求める．

角率は角中径のこと．(一辺が 1 の正多角形の外接円の半径)　　角 $=$ 角率 $\times$ 径

$$\text{丑} : \frac{\text{径}}{2} = \frac{\text{径}}{2} : \text{角}\ \text{より}\ \text{丑} = \frac{\text{径}^2}{4\,\text{角}} = \frac{\text{径}}{4\,\text{角率}}$$

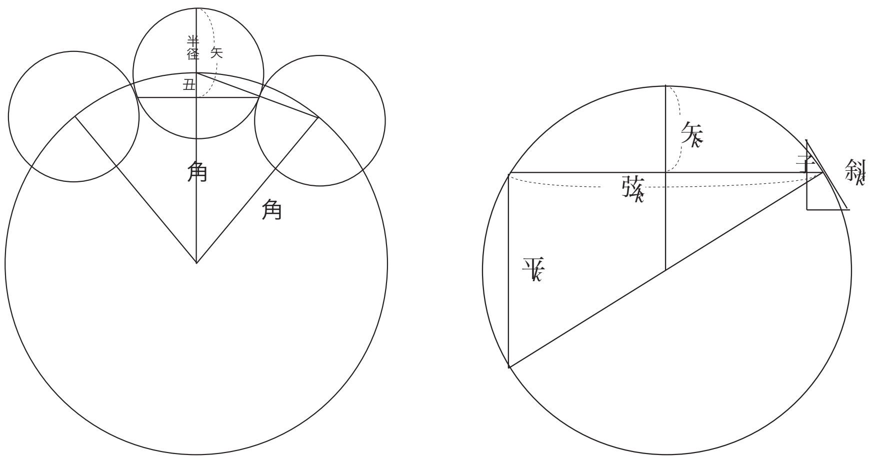
$$\text{矢} = \text{丑} + \frac{\text{径}}{2} = \frac{\text{径}}{4\,\text{角率}} + \frac{\text{径}}{2} = \left(\frac{1}{4\,\text{角率}} + \frac{1}{2}\right)\text{径} = \text{西}\cdot\text{径} \qquad \boxed{\text{西} = \frac{1}{4\,\text{角率}} + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\text{矢}}{n} = \text{子} \qquad \text{矢}_k = \frac{k}{n}\text{矢} = \text{天矢} = \text{西径天}$$

径矢弦の術より

$$\text{弦}_k^2 = 4\,\text{矢}_k(\text{径} - \text{矢}_k) = 4(\text{西径}^2\text{天} - \text{西}^2\text{径}^2\text{天}^2)$$
$$\text{弦}_k = 2\,\text{径}\sqrt{\text{西天} - \text{西}^2\text{天}^2} = 2\,\text{径}\sqrt{\text{西}}\sqrt{\text{天}}\sqrt{1 - \text{西天}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\text{弦}_k} &= \frac{1}{2\,\text{径}\sqrt{\text{西}}\sqrt{\text{天}}}\left(1 + \frac{1}{2}\text{西天} + \frac{3}{8}\text{西}^2\text{天}^2 + \frac{15}{48}\text{西}^3\text{天}^3 + \frac{105}{384}\text{西}^4\text{天}^4\right) \\
&= \frac{1}{2\,\text{径}\sqrt{\text{西}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{天}}} + \frac{1}{2}\text{西}\sqrt{\text{天}} + \frac{3}{8}\text{西}^2\text{天}\sqrt{\text{天}} + \frac{15}{48}\text{西}^3\text{天}^2\sqrt{\text{天}} + \frac{105}{384}\text{西}^4\text{天}^3\sqrt{\text{天}}\right)\end{aligned}$$

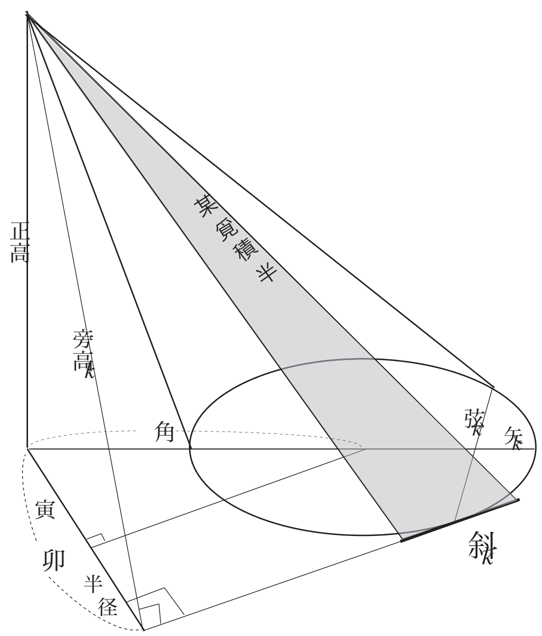


(a) (b)

$斜_k : 子 = 径 : 弦_k$ より

$$
\begin{aligned}
斜_k &= \frac{径 \cdot 子}{弦_k} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{西}径\left(\frac{1}{\sqrt{天}} + \frac{1}{2}西\sqrt{天} + \frac{3}{8}西^2天\sqrt{天} + \frac{15}{48}西^3天^2\sqrt{天} + \frac{105}{384}西^4天^3\sqrt{天}\right)
\end{aligned}
$$

$$
平_k = 径 - 2\,矢_k = 径 - 2\,矢天 = 径 - 2\,西径天 = 径 - \frac{東}{角率}径天 \qquad \boxed{東 = 角率 + \frac{1}{2}}
$$



$角 : 寅 = 径 : 平_k$ より

$$
寅 = \frac{角}{径}平_k = \frac{角}{径}\left(径 - \frac{東}{角率}径天\right) = 角 - 東径天
$$

$$卯 = 寅 + \frac{径}{2} = 角 - 東径天 + \frac{径}{2} = 東径 - 東径天 = 東径\,(1 - 天) = 東径差$$

差を新たに天とする[1]**.**　正高=H とする.

$$傍高_k = \sqrt{H^2 + 卯^2} = H\sqrt{1 + 南天^2} \qquad \boxed{南 = \frac{東^2径^2}{H^2}}$$

$$= H\left(1 + \frac{南天^2}{2} - \frac{南^2天^4}{8} + \frac{3\,南^3天^6}{48} - \frac{15\,南^4天^8}{384}\right)$$

$$某覓積 = S_k = 2\,斜_k \times 傍高_k$$

=

原数	一差	二差	三差	四差
$2H\,斜_k$	$\frac{2\,南\,H\,斜_k天^2}{2}$	$-\frac{2\,南^2H\,斜_k天^4}{8}$	$\frac{2\cdot 3\,南^3H\,斜_k天^6}{48}$	$-\frac{2\cdot 15\,南^4H\,斜_k天^8}{384}$

$$原数 \;=\; \frac{H}{n}\sqrt{西径}\left(\frac{1}{\sqrt{天}} + \frac{1}{2}西\sqrt{天} + \frac{1}{8}西^2天\sqrt{天} + \frac{15}{48}西^3天^2\sqrt{天} + \frac{105}{384}西^4天^3\sqrt{天}\right)$$

$$\longrightarrow H\sqrt{西径}\left(2 + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}西 + \frac{3\cdot 2}{8\cdot 5}西^2 + \frac{15\cdot 2}{48\cdot 7}西^3 + \frac{105\cdot 2}{384\cdot 9}西^4\right)$$

$$= H\sqrt{西径}\cdot 汎原数 = H\,径\cdot 汎背 = H\,弧背$$

$$一差 \;=\; \frac{1}{n}\frac{1}{2}南\,H\sqrt{西径}\left(天\sqrt{天} + \frac{1}{2}西天^2\sqrt{天} + \frac{3}{8}西^2天^3\sqrt{天} + \frac{15}{48}西^3天^4\sqrt{天} + \frac{105}{384}西^4天^5\sqrt{天}\right)$$

$$\longrightarrow H\sqrt{西径}\left(\frac{2}{2\cdot 5}南 + \frac{2}{2\cdot 2\cdot 7}西南 + \frac{3\cdot 2}{2\cdot 8\cdot 9}西^2南 + \frac{15\cdot 2}{2\cdot 48\cdot 11}西^3南 + \frac{105\cdot 2}{2\cdot 384\cdot 13}西^4南\right)$$

$$= H\sqrt{西径}\,(汎一差)$$

$$二差 \longrightarrow H\sqrt{西径}\left(-\frac{2}{8\cdot 9}南^2 - \frac{2}{8\cdot 2\cdot 11}西南^2 - \frac{3\cdot 2}{8\cdot 8\cdot 13}西^2南^2 - \frac{15\cdot 2}{8\cdot 48\cdot 15}西^3南^2 - \frac{105\cdot 2}{8\cdot 384\cdot 17}西^4南^2\right)$$

$$= H\sqrt{西径}\,(汎二差)$$

$$三差 \longrightarrow H\sqrt{西径}\left(\frac{3\cdot 2}{48\cdot 13}南^3 + \frac{3\cdot 2}{48\cdot 2\cdot 15}西南^3 + \frac{3\cdot 3\cdot 2}{48\cdot 8\cdot 17}西^2南^3 + \frac{15\cdot 3\cdot 2}{48\cdot 48\cdot 19}西^3南^3 + \frac{105\cdot 3\cdot 2}{48\cdot 384\cdot 21}西^4南^3\right)$$

$$= H\sqrt{西径}\,(汎三差)$$

$$四差 \longrightarrow H\sqrt{西径}\left(-\frac{15\cdot 2}{384\cdot 17}南^4 - \frac{15\cdot 2}{384\cdot 2\cdot 19}西南^4 - \frac{3\cdot 15\cdot 2}{384\cdot 8\cdot 21}西^2南^4 - \frac{15\cdot 15\cdot 2}{384\cdot 48\cdot 23}西^3南^4 - \frac{105\cdot 15\cdot 2}{384\cdot 384\cdot 25}西^4南^4\right)$$

$$= H\sqrt{西径}\,(汎四差)$$

$$弦^2 = 4\,矢\,(径 - 矢) = 4\,西径\,(径 - 西径)$$ より

$$汎弦 = \frac{弦}{径} = 2\sqrt{西}\sqrt{1-西} = 2\sqrt{西}\left(1 - \frac{1}{2}西 - \frac{1}{8}西^2 - \frac{3}{48}西^3 - \frac{15}{384}西^4\right)$$

$$極 = \frac{汎弦}{\sqrt{西}} = 2\left(1 - \frac{1}{2}西 - \frac{1}{8}西^2 - \frac{3}{48}西^3 - \frac{15}{384}西^4\right)$$

ところで

$$\frac{南}{2\,西}\left\{\frac{3}{2\,西}(汎原 - 極) - 極\right\} = \frac{2\cdot 4}{2\cdot 5}南 + \frac{2\cdot 4}{2\cdot 7\cdot 2}西南 + \frac{3\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 9\cdot 8}西^2南 + \frac{15\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 11\cdot 48}西^3南 = 4\,汎一差$$

故に

$$汎一差 = \frac{南}{4\cdot 2\,西}\left\{\frac{3}{2\,西}(汎原 - 極) - 極\right\}$$

同様にして $甲 = \dfrac{極}{2}南$ とおいて

$$汎二差 = \frac{南}{8\cdot 4\,西}\left\{\frac{7}{6\,西}(5\,汎一差 - 甲) - 甲\right\}$$

$乙 = \dfrac{極南^2}{8} = \dfrac{甲南}{4}$ とおいて

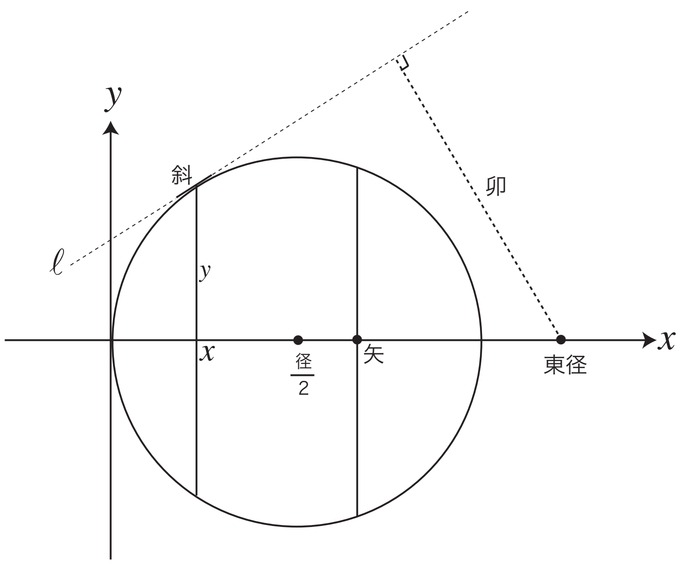
$$汎三差 = \frac{南}{12\cdot 6\,西}\left\{\frac{11}{10\,西}(9\,汎二差 - 乙) - 乙\right\}$$

$丙 = \dfrac{3\,極南^3}{48} = \dfrac{3\,乙南}{6}$ とおいて

$$汎四差 = \frac{南}{16\cdot 8\,西}\left\{\frac{15}{14\,西}(13\,汎三差 - 丙) - 丙\right\}$$

$$覓積 = NH\,径\left\{汎背 + \sqrt{西}(汎一差 - 汎二差 + 汎三差 - 汎四差 + 汎五差)\right\}$$

注 1) この置き換えは間違い.



円の方程式を $x^2-\text{径}\,x+y^2=0$ とする．$y'=\dfrac{\text{径}-2x}{2y}=\dfrac{\text{径}-2x}{2\sqrt{x(\text{径}-x)}}$

$$\text{斜}=\sqrt{1+y'^2}=\frac{\text{径}}{2\sqrt{x(\text{径}-x)}}$$

円周上の点 $(x,\ y)$ における接線の方程式は $\ell : Y-y=y'(X-x)$，点 $(\text{東径},\ 0,\ \text{高})$ から ℓ に下ろした垂線の長さは

$$\text{傍高}=\sqrt{\{\ \text{東}\ (\text{径}-2x)+x\}^2+\text{高}^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{求める表面積}\ S &= \int_0^{\text{西径}} \text{斜}\times\text{傍高}\ dx \\
&= \int_0^{\text{西径}} \frac{\text{径}}{2\sqrt{x(\text{径}-x)}}\sqrt{\{\ \text{東}\ (\text{径}-2x)+x\}^2+\text{高}^2}dx \qquad \boxed{t=\frac{x}{\text{西径}}} \\
&= \int_0^1 \frac{\text{径}}{2\sqrt{\text{西径}\,t(\text{径}-\text{西径}\,t)}}\sqrt{\{\ \text{東}\ (\text{径}-2\ \text{西径}\ t)+\text{西径}\ t\}^2+\text{高}^2}\cdot\text{西径}\ dt \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{\text{西径}}}{2\sqrt{t(1-\text{西}\ t)}}\sqrt{\text{東}^2\text{径}^2(1-t)^2+\text{高}^2}dt \qquad (1)
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\text{東}}+\dfrac{1}{\text{西}}=2$ だから

$$\text{東}\ (\text{径}-2\ \text{西径}\ t)+\text{西径}\ t=\text{東径}-(2\ \text{西東}-\text{西})\ \text{径}\ t=\text{東径}-\text{東径}\ t=\text{東径}\ (1-t)$$

ここまでは現代解と一致する．
76は (1) で $\text{西}=\text{東}=1$ の場合だから

$$\begin{aligned}
\text{円錐の側面積} &= \int_0^1 \frac{\text{径}}{2\sqrt{t(1-t)}}\sqrt{\text{径}^2(1-t)^2+\text{高}^2}dt \qquad \boxed{1-t=s} \\
&= \int_0^1 \frac{\text{径}}{2\sqrt{s(1-s)}}\sqrt{\text{径}^2s^2+\text{高}^2}ds
\end{aligned}$$

これは76の結果と一致する．しかし，(1) で $1-t=s$ と置いても

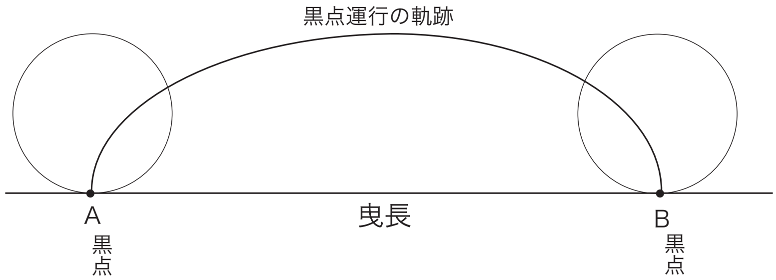
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\text{西径}}}{2\sqrt{t(1-\text{西}\ t)}}\sqrt{\text{東}^2\text{径}^2(1-t)^2+\text{高}^2}dt=\int_0^1 \frac{\sqrt{\text{西径}}}{2\sqrt{s(1-\text{西}\ s)}}\sqrt{\text{東}^2\text{径}^2s^2+\text{高}^2}ds \qquad (2)$$

とはならない．このように置き換える根拠は

$$\int_0^1 t^p dt=\int_0^1 (1-t)^p dt$$

にあるとしているので，t と $1-t$ だけの場合はいつでも $1-t$ を t と置き換えてもよいとしたのであろう．『求積通考』唯一のミスである．

$\boxed{97}$ 円が直線上を移動 (回転ではなく，平行移動) する．　同時に黒点は円周上を回っており，最初，接点 A の位置から出発し，再び接点 B の位置に戻ったとする．このときの黒点の軌跡を点跡弧とよぶ．円が移動した距離 AB を曳長とする．円径と曳長が与えられたとき，点跡弧背と面積を求める．



$$子 = \frac{径}{n}, \qquad 矢_k = 径天, \qquad 乙_k^2 = 4\,矢_k(径 - 矢_k) = 4\,径天\,(径 - 径天), \qquad 平_k = 径 - 2\,矢_k$$

$平_k : 乙_k : 径 = 丑 : 子 : 背_k$ より

$$丑 = \frac{平_k 子}{乙_k} = \frac{径子}{乙_k} - 2\frac{径子天}{乙_k}$$

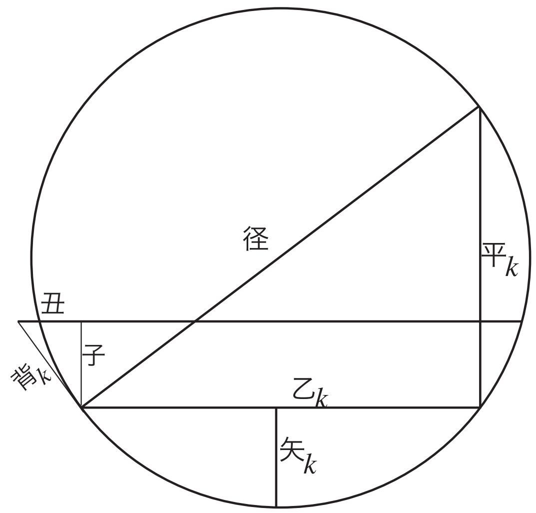
$$背_k = \frac{径子}{乙_k}$$

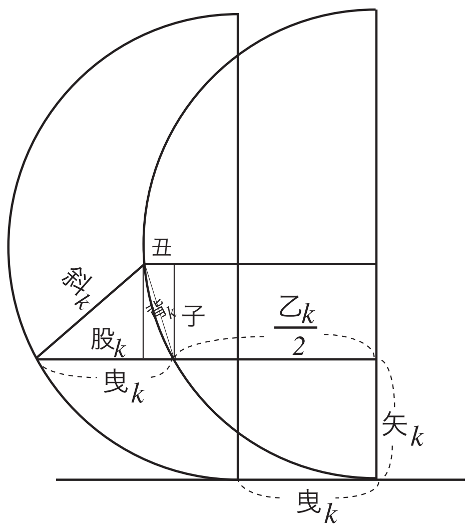
$径\pi : 背_k = 曳長 : 曳_k$ より

$$曳_k = \frac{曳長 \cdot 背_k}{径\pi} = \frac{曳長 \cdot 子}{乙_k \pi}$$

$$股_k = 曳_k - 丑 = \frac{少子}{乙_k} + 2\frac{径子天}{乙_k}$$

$$\boxed{多 = \frac{曳}{\pi} + 径, \qquad 少 = \frac{曳}{\pi} - 径}$$





$$\begin{aligned}
斜^2 &= 子^2 + 股_k^2 \\
&= 子^2 + \frac{少^2 子^2}{乙_k^2} + \frac{4\,径少子^2天}{乙_k^2} + \frac{4\,径^2子^2天^2}{乙_k^2} \\
&= \frac{子^2}{乙_k^2}(乙_k^2 + 少^2 + 4\,径少天 + 4\,径^2天^2)
\end{aligned}$$

$$= \frac{子^2}{乙_k^2}\left\{4\,径^2天\,(1-天)+少^2+4\,径天\left(\frac{曳}{\pi}-径\right)+4\,径^2天^2\right\}$$
$$= \frac{子^2}{乙_k^2}\left(少^2+\frac{4\,径曳}{\pi}天\right)$$
$$= \frac{子^2}{乙_k^2}\left(少^2+(多^2-少^2)\,天\right)$$
$$= \frac{子^2}{乙_k^2}少^2(1+乾天) \qquad \boxed{乾=\frac{多^2}{少^2}-1}$$

$斜_k$ を平方綴術に開き，

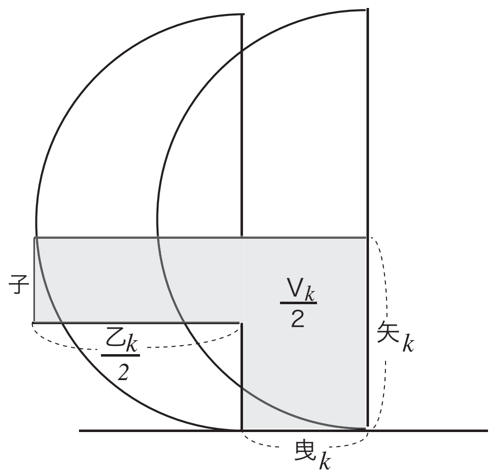
$$斜_k = 子少\left(\frac{1}{乙_k}+\frac{乾天}{2\,乙_k}-\frac{乾^2天^2}{8\,乙_k}+\frac{3\,乾^3天^3}{48\,乙_k}-\frac{15\,乾^4天^4}{384\,乙_k}\right)$$

これを乙除隅乗表で畳み 2 倍して背になる．

$$背 = 2\sum^{\infty}斜_k = 少\pi\left(1+\frac{乾}{2^2}-\frac{3\,乾^2}{8^2}+\frac{15\cdot 3\,乾^3}{48^2}-\frac{105\cdot 15\,乾^4}{384^2}\right)$$

これは多を長径，少を短径とする楕円周に等しい．

点跡弧積を求る解



$$某積 = V_k = 乙_k子 + 2\,曳_k矢_k = 乙_k子^{㋑} + \frac{曳\cdot径\cdot天\cdot子}{乙_k\pi}^{㋺}$$

これを畳むと

$$㋑ \longrightarrow 円積$$

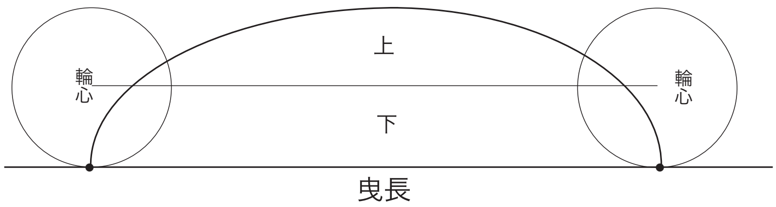
乙除偶乗表により

$$㋺ \longrightarrow \frac{曳\cdot径}{2}$$

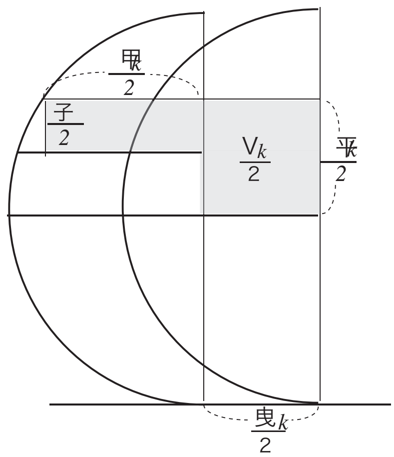
故に

$$積 = \sum^{\infty} V_k = \frac{\pi}{4}径^2 + \frac{曳 \cdot 径}{2}$$

上積を求る解



半径を n 等分する．$平_k = 径天$



$$某積 = V_k = \frac{甲_k子}{2} + \frac{曳_k平_k}{2} = 甲_k子 ㋑ + \frac{曳径天子}{2\,甲_k\pi} ㋺$$

これを畳むと

$$㋑ \longrightarrow 円積$$

甲除奇乗表により

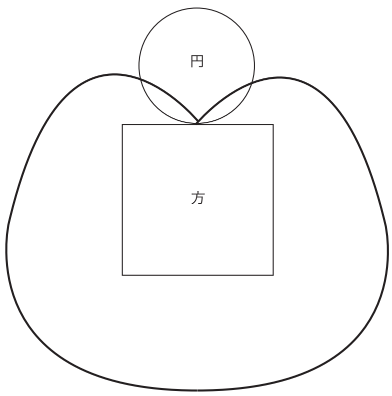
$$㋺ \longrightarrow \frac{曳 \cdot 径}{2\pi}$$

$$上積 = \sum^{\infty} V_k = \frac{円積率 \cdot 径^2}{2} + \frac{曳 \cdot 径}{2\pi}$$

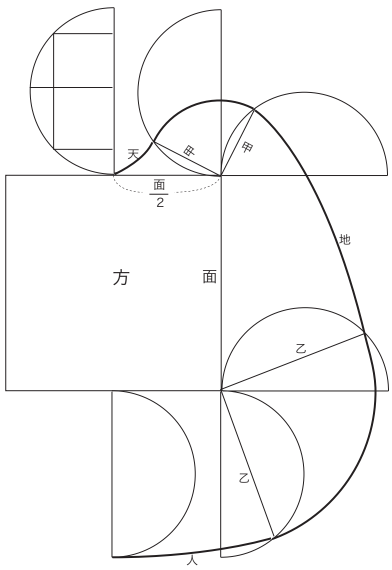
$\boxed{98}$ Cycloid の弧長と面積を求めよ．
付録 CD 『「求積通考」における cycloid 弧長について』数学史研究 142 号 1992 年 (cycloid.pdf) に集録．

$\boxed{99}$ 図のように正方形の回りを円が移動する．円周上の黒点が描く軌跡の長さと囲む面積を求めよ．円が元に

戻ったときに黒点も元の位置に戻るものとする．ただし，円が角に来たときは，円が直角に曲がるまで黒点は止っているとする．円も黒点も右回りとし，円径と方面があたえられているとする．



止まっている間は $\dfrac{1}{4}$円 を描く．その他は$\boxed{97}$のサイクロイド (曳長 $=4$ 面) を描き，その長さは$\boxed{97}$によると，多 $=\dfrac{\text{曳長}}{\pi}+\text{径}=\dfrac{4\,\text{面}}{\pi}+\text{径}$，小 $=\dfrac{\text{曳長}}{\pi}-\text{径}=\dfrac{4\,\text{面}}{\pi}-\text{径}$ を長軸，短軸とする楕円の周長 L に等しい．



また 甲 + 乙 = 径$\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ だから

$$\text{周長}=L+\text{径}\pi\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdots\cdots ①$$

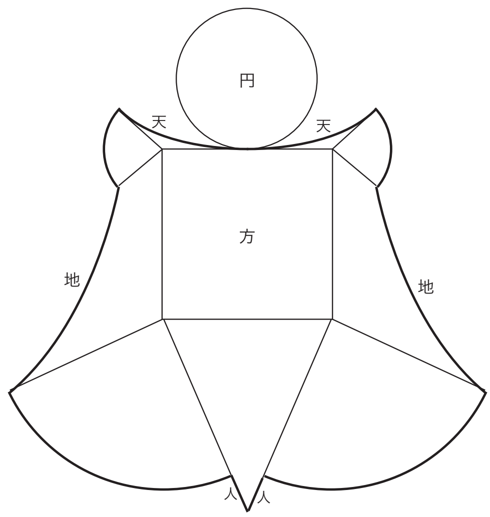
$\boxed{97}$より

$$\text{サイクロイドで囲む面積}=\frac{\pi}{4}\text{径}^2+\frac{\text{曳長}\cdot\text{径}}{2}=\frac{\pi}{4}\text{径}^2+2\,\text{面}\cdot\text{径}$$

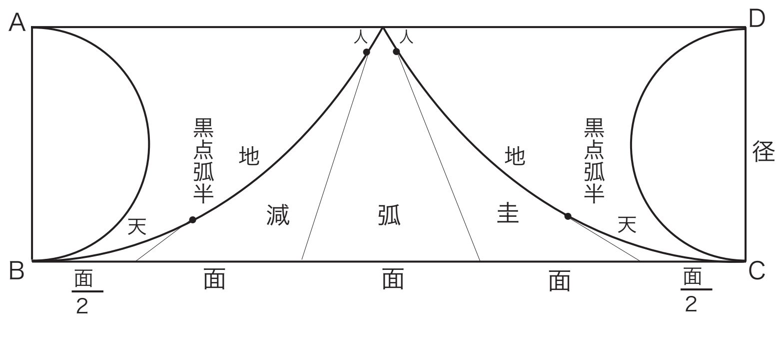
また 甲$^2+$乙$^2=$径^2 だから四隅の円の面積は $\dfrac{\pi}{2}$径^2，故に

$$求める面積 = \frac{\pi}{4}径^2 + 2\,面\cdot径 + \frac{\pi}{2}径^2 + 面^2 = \frac{3}{4}径^2\pi + 2\,面\cdot径 + 面^2$$

円は右回りで，黒点が左回りの場合の軌跡は下図のようになる．



周長は①とまったく同じである．



97より 弧積 $=\dfrac{\pi}{4}$径$^2+2$面$\cdot$径 だから

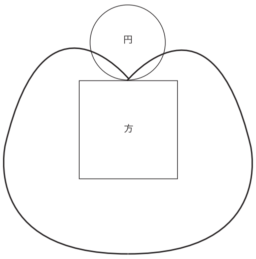
$$減弧圭 = 長方形\,ABCD - 弧積 = 4\,面\cdot径 - \left(\frac{\pi}{4}径^2 + 2\,面\cdot径\right) = 2\,面\cdot径 - \frac{\pi}{4}径^2$$

これに四隅の円を加えて

$$求める面積 = \frac{\pi}{4}径^2 + 2\,面\cdot径 + 面^2$$

$\boxed{100}$ 欠番

$\boxed{101}$ 図のように正方形の回りを円が99と同様の条件で移動する．円周上の黒点が描く軌跡の長さと囲む面積を求めよ．円径が与えられているとする．



この場合，方面の 4 倍が円周であるので，$\boxed{98}$を適用すればよい．

$$周長 = 径\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} + 4\,径$$

$$面積 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 径 + \frac{5\pi}{4}径^2$$

$\boxed{102}$ $\boxed{99}$で正方形を正多角形にしたとき，円周上の黒点が描く軌跡の長さと囲む面積を求めよ．$\boxed{99}$と同様の条件で移動する．円径，角数，正多角形の一辺，が与えられているとする．

$\boxed{99}$と同様にして，正三角形，正方形，正 5 角形，正 6 角形の周りを回る場合を考えている．円が角に来たときに黒点は止まるので，それぞれの角では $\dfrac{1}{角数}$円 を描く．その扇形の面積の和は何角形でも常に $\dfrac{\pi}{2}径^2$ となる[1]．それ以外では $\boxed{97}$ のサイクロイドを描き，その面積は

$$点跡弧責 = \frac{\pi}{4}径^2 + \frac{角数\cdot面\cdot径}{2}$$

$$正多角形の面積 = \frac{1}{2}平中径率\cdot角数\cdot面^2$$

求める面積 S は

$$S = 扇形の和 + 点跡弧責 + 正多角形の面積 = \frac{3}{4}径^2\pi + \frac{角数\cdot面\cdot径}{2} + \frac{1}{2}平中径率\cdot角数\cdot面^2$$

これは円も黒点も右周りの場合で，円が右周りで，黒点が左周りの場合の面積 T は$\boxed{99}$と同様にして，$T = S - 2\,円積$ になるので，

$$T = \frac{1}{4}径^2\pi + \frac{角数\cdot面\cdot径}{2} + \frac{1}{2}平中径率\cdot角数\cdot面^2$$

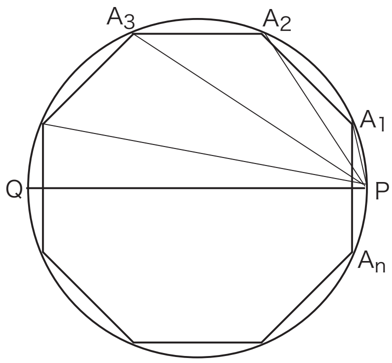
次に曲線の長さをもとめる．
$\boxed{99}$と同様に考えて，正 n 角形の 角(かど)で描く円弧の長さの総和は

$$\frac{4}{n}(正\,2n\,角形の角中径率)\,径\pi$$

となる[2]．円弧以外の部分は$\boxed{97}$のサイクロイドと同じなので．$多 = \dfrac{角数\cdot面}{\pi} + 径$，$小 = \dfrac{角数\cdot面}{\pi} - 径$ を長軸，短軸とする楕円の周長 L に等しい．よって

$$求める周長 = \frac{4}{角数}(倍角数の角中径率)\,径\pi + L$$

注 1) 術文では正三角形，正方形，正五角形，正六角形の場合の面積を直接計算し，すべて $\dfrac{\pi}{2}$径^2 となるので角数に関係なく成り立つ，としている．このことは偶数角形の場合には次のように示せる．



弧 A_1A_n の中点を P とし，PQ を直径とする．

$$PA_i^2 = PQ^2 - QA_i^2$$

$$\sum PA_i^2 = nPQ^2 - \sum QA_i^2 = nPQ^2 - \sum PA_i^2$$

$$\therefore \quad \sum PA_i^2 = \frac{n}{2}PQ^2$$

$$\therefore \quad 角の面積和 = \frac{1}{n}\pi \sum PA_i^2 = \frac{\pi}{2}径^2$$

奇数の場合も含め，一般に複素数平面で半径 r の円に内接する正 n 角形で考えると，次のようになる．
$\theta = \dfrac{2\pi}{n}$，　$\rho = \cos\theta + i\sin\theta$ として $P(r\rho^{\frac{1}{2}})$，$A_i(r\rho^i)$ とおく．

$$PA_i^2 = \left| r\rho^i - r\rho^{\frac{1}{2}} \right|^2 = r^2(\rho^i - \rho^{\frac{1}{2}})(\overline{\rho}^i - \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}) = r^2\left(2 - \rho^{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho^{i-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\sum PA_i^2 = r^2\left(2n - \frac{\rho^{2n-1} + \rho^{2n-2} + \rho^{2n-3} + \cdots + \rho + 1}{\rho^{n-\frac{1}{2}}}\right) = 2nr^2 = \frac{n}{2}径^2$$

注 2) 術文では正三角形，正方形，正五角形，正六角形の場合を求めて，一般形を類推している．注 1) の図で，
$\angle A_1OP = \dfrac{\pi}{n}$，$\angle A_1OA_2 = \dfrac{2\pi}{n}$ だから

$$PA_k = 2r\sin\left(\frac{\pi}{2n} + (k-1)\frac{\pi}{n}\right)$$

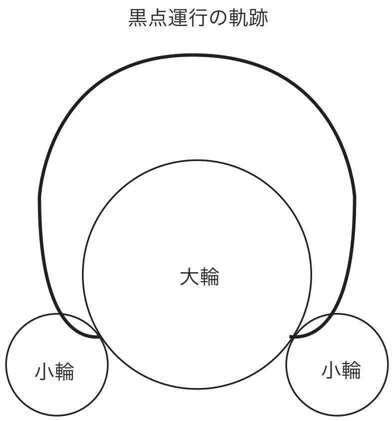
$$\sum_{k=1}^{n} PA_k = 2r\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n} + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) = 2r\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{n-1}{2n}\pi\right)\sin\left(n\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{2n}} = \frac{2r}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$$

$$正\, 2n\, 角形の角中径率 = \frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{2n}} \quad だから$$

$$\overset{かど}{角}の円弧の総和 = \frac{1}{n}2\pi\sum_{k=1}^{n} PA_k = \frac{4}{n}(正\, 2n\, 角形の角中径率)\, 径\pi$$

であることがわかる．

$\boxed{103}$ 大円の周りを小円が接しながら動き，小円上を黒点が回転する．黒点が小円上の元の位置に戻るまでに描いた軌跡は下図のようになる．大円径と小円径が与えられたとき，軌跡の長さと面積を求めよ．

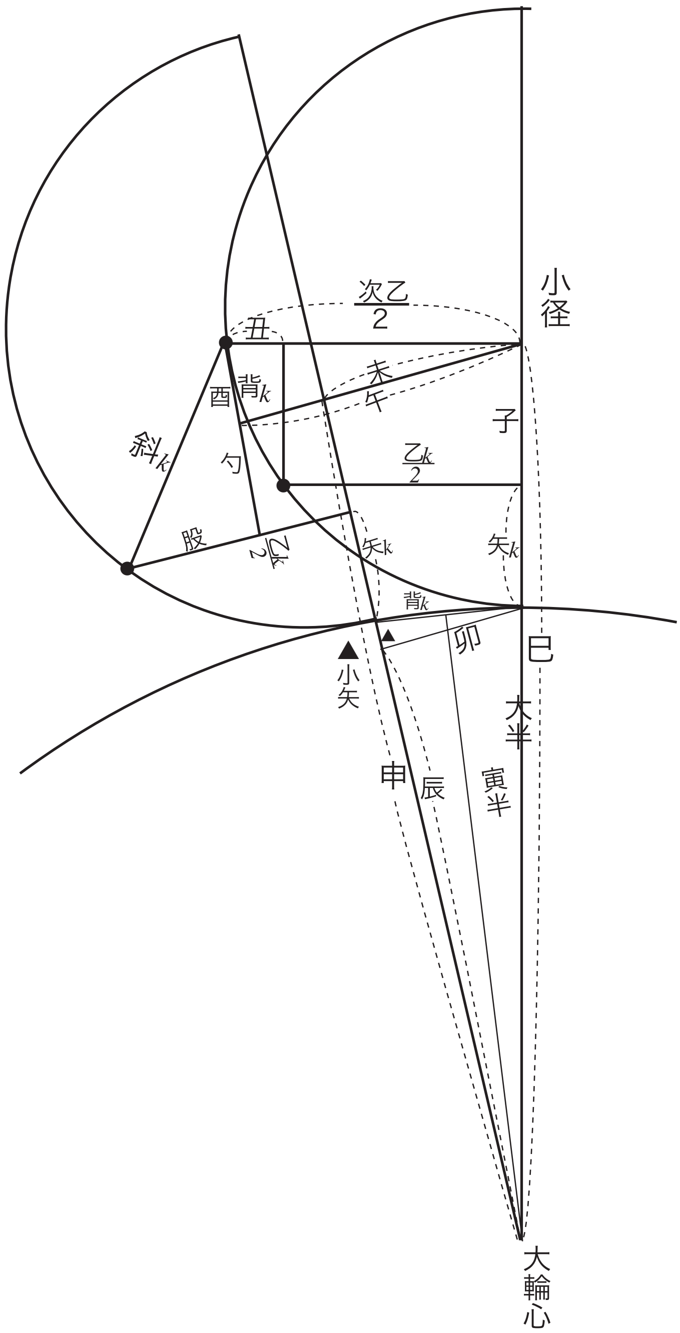


子 $=\dfrac{小}{n}$，$\boxed{97}$ と同様にして

$$丑=\frac{小子}{乙_k}-\frac{2\,小天子}{乙_k},\quad 矢_k=小天,\quad 背_k=\frac{小子}{乙_k}$$

$$寅^2=大^2-{背_k}^2=大^2-\frac{小^2子^2}{{乙_k}^2}$$

$n\to\infty$ のとき $\dfrac{小^2子^2}{{乙_k}^2}\to 0$ だから 寅 $=$ 大，以後 子^2 の項は捨てる．



$$卯 = \frac{背_k寅}{大} = 背_k, \quad 小矢 = \frac{背_k{}^2}{大} = \frac{小^2子^2}{乙_k{}^2大}$$

$$辰 = \frac{大}{2} - 小矢 = \frac{大}{2} - \frac{小^2子^2}{乙_k{}^2大} = \frac{大}{2}, \quad 巳 = \frac{大}{2} + 矢_k + 子$$

$$次乙 = 2\,丑 + 乙_k = \frac{2\,小子}{乙_k} - \frac{4\,天小子}{乙_k} + 乙_k$$

$$酉 = \frac{次乙 \cdot 卯}{大}, \quad 午 = \frac{次乙 \cdot 辰}{大}, \quad 未 = \frac{2\,巳卯}{大}, \quad 申 = \frac{2\,巳辰}{大}$$

$$
\begin{aligned}
勾 &= 申 + 酉 - \frac{大}{2} - 矢_k = \frac{2\,巳辰}{大} + \frac{次乙 \cdot 卯}{大} - \frac{大}{2} - 矢_k \\
&= 子 + \frac{次乙 \cdot 卯}{大} = 子 + \frac{2\,小^2子^2}{乙_k{}^2大} - \frac{4\,小^2子^2天}{乙_k{}^2大} + \frac{小子}{大} \\
&= \frac{(大 + 小)\,子}{大}
\end{aligned}
$$

$$
股 = \frac{乙_k}{2} + 未 - 午 = \frac{乙_k}{2} + \frac{2\,巳卯}{大} - \frac{次乙 \cdot 辰}{大} = \frac{2\,矢_k小子}{乙_k大} + \frac{2\,子^2小}{乙_k大} + \frac{2\,天小子}{乙_k} = \frac{2(大 + 小)\,天小子}{乙_k大}
$$

${斜_k}^2 = 勾^2 + 股^2$ より

$$
\frac{{斜_k}^2大^2}{(大 + 小)^2子^2} = 1 + \frac{4\,小^2天^2}{{乙_k}^2}
$$

${乙_k}^2 = 4\,小^2天 - 4\,小^2天^2$ を代入して

$$
\frac{{斜_k}^2大^2}{(大 + 小)^2子^2} = \frac{4\,小^2天}{{乙_k}^2}
$$

$$
\therefore \quad 斜_k = \frac{2(大 + 小)\,小子\sqrt{天}}{乙_k大}
$$

乙除奇乗表にてこれを畳み[1]，倍して点跡背 L とする．

$$
L = \frac{4(大 + 小)\,小}{大}
$$

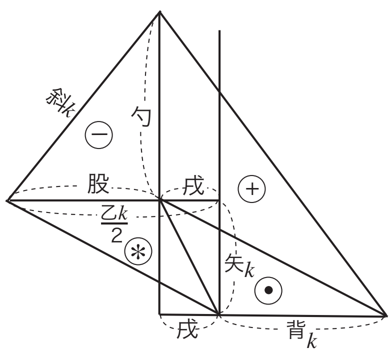
小円が大円の内側を回るときは

$$
L' = 内転点跡背 = \frac{4(大 - 小)\,小}{大}
$$

面積を求める解

$戌 = \dfrac{乙_k}{2} - 股, \quad 2\oplus = 背_k勾, \quad 2\odot = 背_k矢_k, \quad 2\circledast = 矢_k股, \quad 2\ominus = 勾股$

某積



$$
S_k = 2\oplus + 2\odot + 2\circledast + 2\ominus
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{小子勺}{乙_k} + \frac{乙_k勺}{2} + \frac{小^2子天}{乙_k} + 小股天 \\
&= \frac{(大+小)\,乙_k子}{2\,大} + \frac{小^2子天}{乙_k} + \frac{2(大+小)\,小^2天^2子}{乙_k大}
\end{aligned}
$$

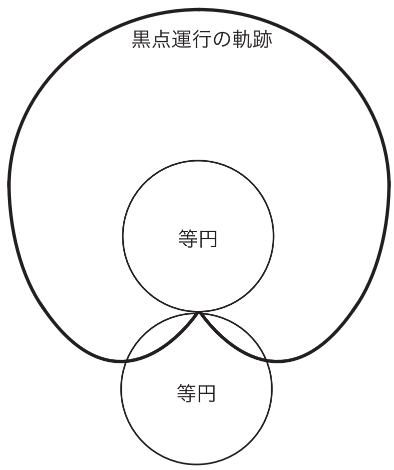
これを偶乗乙表，乙除偶乗表により畳んで[2]，求める面積 S とする．

$$S = \frac{3}{4}\pi小^2 \pm \frac{小^3\pi}{2\,大} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{小}{2}L + 小^2\right) \qquad \text{(小円が大円の内側を回るときは−)}$$

注 1) $\dfrac{子\sqrt{天}}{乙_k}$ を畳むと 1 となる．

注 2) $乙_k子$ を畳んで $\dfrac{\pi}{4}小^2$，$\dfrac{子天}{乙_k}$ を畳むと $\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{天^2子}{乙_k}$ を畳むと $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\pi}{4}$ となる．

$\boxed{104}$ 前問 103 で 2 円が等しい場合[1] の軌跡の長さと面積を求めよ．外の円が元の位置に戻ったとき，黒点も元の位置に戻るとする．

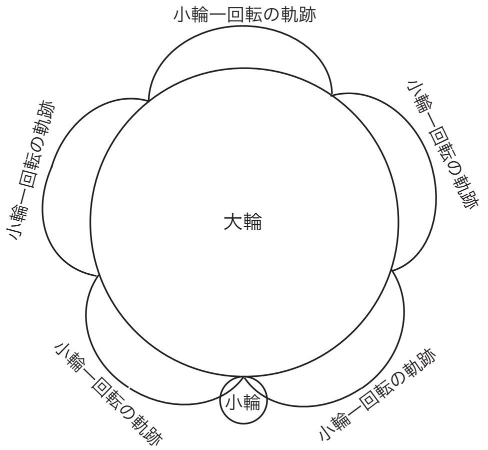


前問で 大 = 小 = 等 とする．

$$周長 = 8\,等, \quad 面積 = \frac{3}{2}等^2\pi$$

注 1) epicycloid，外擺線

$\boxed{105}$ 大円の周りを小円が接しながら動き，小円上を黒点が回転する．小円が元の位置に戻るまでに黒点は N 回転したとする．$N = 5$ のとき黒点の描いた軌跡は下図のようになる．このときの軌跡の長さを求めよ．



大 $=$ 小 N．103 問によりて 小円 1 回転の軌跡 $= \dfrac{4(\text{大}+\text{小})\,\text{小}}{\text{大}}$

$\therefore$　周長 $= 4$ 小 $(N+1)$

此書実に方円求積術の真理を尽すといへども象は萬象にして是を尽すこと能はず．此他類題頗る多し．然れども悉く是を載せて其解義を詳に示さんと欲すれは此巻紙員多きこと他巻に過く故に他の算題洩たることの亦少からず．今載せざるものは必後篇に著べし．此書元来題の浅深に拘わらず学ぶに順よく只解し易からんことを専らとす．看る人題の此篇に洩たるもの有ことをあやしぶことなかれ．

算法求積通考巻之五終

天保十五年甲辰八月刻成　　磻渓社蔵
彫工 江川仙太郎

求積通考
西磻先生曰．方圓究理之術也．人若學一題．而能究其理．則雖百千題．亦自知其起源．苟學一題．而不悟其理者．學百千題．亦不能知．何則其理一．而起源相等故也．求積一書．盖其術也．能究其理．則不學而得其術．仍不公其書于世．暫停上梓．以存引而不發之教焉．如
先生者．當悟入焉．衆人何能然乎．故不悟其理．而苦方圓究理之起源書．不為不多．今社友輯録此篇．以示學者．名曰算法求積通考．其於方圓究理之術．可謂究其蘊奥矣．然世有未得通暁者．若從此悟入．則思過半矣．
天保甲辰秋八月　鳳堂津田宜義識
眷齋朝震書

【訓読】
求積通考
西磻（せいはん）先生いわく，方円究理の術たるや，人，もし一題を学んで，よくその理をきわめれば，すなわち百千題といえども，またおのずからその起源を知る．いやしくも一題を学んで，その理を悟らざる者は，百千題を学んで，また知ることあたわず．なんとなれば，その理，一にして，起源，あい等しきゆえなればなり．求積の

一書，けだしその術なり．よくその理を究めれば，すなわち学ばずして，その術を得る．よりてその書を世に公にせず，暫く上梓を停む．もって，引きて発せず[1]に存するの教えなり．先生のごときは，まさに悟入すべし．衆人なんぞよく然らん．ゆえにその理を悟らず，方円究理の起源に書に苦しむは，多からずとなさず[2]．いま社友，この篇を輯録し，もって学者に示す．名づけていわく算法求積通考と．それ，方円究理の術において，謂（い）いつべし，その蘊奥を究むと．しかれば世，あるいはいまだ通暁をえざるものあらば，もしこれによりて悟入せば，すなわち思い半ばを過ぐ[3]．
天保甲辰（天保 15 年 (1844)）の秋八月，津田宜義，識す．

跋
管子曰．思之思之不得．鬼神教之．非鬼神之力也．其精氣之極也．此言有甚似数理秘訣也．若夫圓理．數學之蘊奥筭家之所難．所謂思之思之不得之術也．適有克得之者説其理也．下學不辯．反迷術之當否．甚者乃言．不可果知也．竟至癈其学焉．難哉研彼精氣之極．以知其術之妙．新刻求積通考．岳湖内田氏之撰也．巻中総審乎圓理之原由．設法之奇．術路之簡．實踰于鬼神之教．矣．内田氏有此擧也．盖在于欲令思之不得之徒．克研其精氣之極也已．余謂．爰編若成于齊桓之時．管仲必言岳湖子先能得吾心術乎．
天保十五年甲辰秋　越後小千谷　佐藤解記識
森愿書
【訓読】
跋
管子[4]いわく，これを思い，これを思うてえず，鬼神これを教ゆ．鬼神の力にあらざるなり．その精気の極みなり．この言，はなはだ数理の秘訣に似たるあり．かの円理のごときは，数学の蘊奥にして，算家の難きところ．いわゆるこれを思いこれを思い不得の術なり．適よくこれを得る者あれば，その理を説くなり．下学[5]は弁ぜず[6]．かえって術の当否に迷う．はなはだしきものは，すなわち言う，果たして知るべからずと．ついにその学を廃するに至る．難きかな，かの精気の極みを研き，もってその術の妙を知るは．新刻求積通考は，岳湖内田氏の撰なり．巻中すべて円理の原由をつまびらかにし，法を設けることの奇，術路の簡，じつに鬼神の教えを踰ゆ．内田氏のこの挙あるや，なんぞこれを思い得ざるの徒をして，よくその精気の極みを研きしめんと欲するに在らざるや．余，謂らく，ここに編，もし斉桓[7]の時になれば，管仲[8]必ず，岳湖子，まずよくわが心術を得たりと言わん．
天保十五年 (1844) 甲辰の秋，越後小千谷，佐藤解記，識す．
森愿書

注 1) 『孟子』盡心上．「君子引而不発，躍如也．中道而立．能者従之」．「引きて発せず」は，関孝和の発微算法序に見える．
注 2) 『孟子』梁恵王上．「万取千焉，千取百焉，不為不多矣（万に千を取り，千に百を取るは，多からずとなさず)」．不為不多は二重否定で，多くないとは言えない，多い，と訳す．
注 3) 『易経』繋辞伝下．おもい考えてさとるところのすこぶる多いこと．大半以上を知る．
注 4) 『管子』心術下第三十七および内業第四十九の二箇所にある．
注 5) 高等な学問をしていない人
注 6) 言うまでもない
注 7) 斉の国の桓公

注 8) 管子

西磻長谷川先生門人著述目録

紀元二千五百三十四年第一月　定價金壹圓

東京書林
南傳馬町壹町目　近江屋半七
大傳馬町三町目　丸屋正五郎
日本橋通三町目　長門屋龜七