算法求積通考巻之四

　　　　　長谷川善左衛門弘閲

彦根藩　内田半吾久命編

67 二つの円柱に楕円柱を穿去したときの体積を求めよ．長径，短径，円柱径が与えられる．
図のように楕円を円に還原し，図 3 の穿去積を求める．即ち，円柱と半円柱の大穿去積を求めればよい．

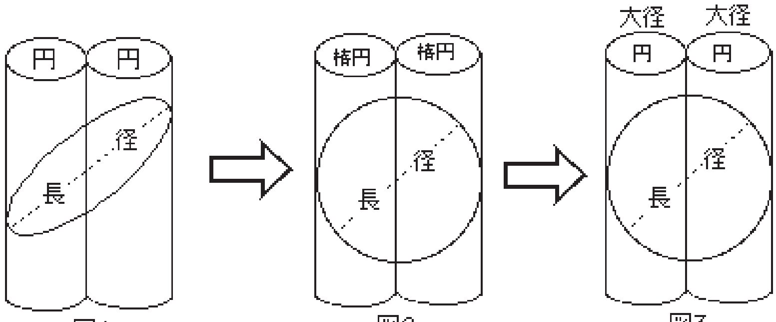


図1　図2　図3

$子 = \dfrac{長}{n}$ とする．

$$甲_k^2 = 長^2 - 長^2天^2$$

これを平方綴術に開き

$$甲_k = 長 - \frac{長\cdot天^2}{2} - \frac{長\cdot天^4}{8} - \frac{3\,長\cdot天^6}{48} - \frac{15\,長\cdot天^8}{384}$$

$$\begin{aligned}V_k &= 甲_k乙_k子\\ &= 長^2乙_k子 - \frac{長^2乙_k\cdot天^2子}{2} - \frac{長^2乙_k\cdot天^4子}{8} - \frac{3\,長^2乙_k\cdot天^6子}{48} - \frac{15\,長^2乙_k\cdot天^8子}{384}\end{aligned}$$

これを隅乗乙表にて畳んで

$$\begin{aligned}大穿去積 &= \sum^{\infty} V_k\\ &= \Bigg(1 - \frac{3\cdot5}{2\cdot6\cdot8} - \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{8\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12} - \frac{3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13}{48\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16}\\ &\quad - \frac{15\cdot105\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17}{384\cdot480\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18\cdot20}\Bigg)長^2大\frac{\pi}{4}\\ &= 長^2大\frac{\pi}{4} - \frac{3\cdot5}{2\cdot6\cdot8}(原数) - \frac{1\cdot7\cdot9}{4\cdot10\cdot12}(一差) - \frac{3\cdot11\cdot13}{6\cdot14\cdot16}(二差) - \frac{5\cdot15\cdot17}{8\cdot18\cdot20}(三差)\end{aligned}$$

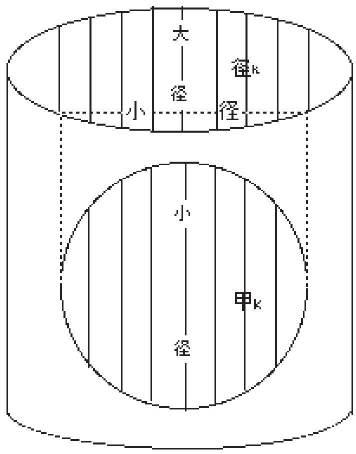
求める穿去積 V は

$$V = \frac{小}{大}\cdot\frac{短}{長}\cdot大穿去積$$

$$= 長短小\frac{\pi}{4} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 6\cdot 8}(原数) - \frac{1\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 10\cdot 12}(一差) - \frac{3\cdot 11\cdot 13}{6\cdot 14\cdot 16}(二差) - \frac{5\cdot 15\cdot 17}{8\cdot 18\cdot 20}(三差)$$

で求まる．(小 = 円柱径)

68 直径が異なる 2 つの円柱 (大径，小径) が直交するときの穿去積，覓積を求めよ．



子 $= \frac{小}{n}$ とする．率 $= \frac{小^2}{大^2}$ とする

$$径_k^2 = 大^2 - 小^2天^2 = 大^2 - 率大^2天^2$$

これを平方綴術に開き

$$径_k = 大\left(1 - \frac{率天^2}{2} - \frac{率^2天^4}{8} - \frac{3\,率^3天^6}{48} - \frac{15\,率^4天^8}{384}\right)$$

$$\begin{aligned} V_k &= 径_k甲_k子 \\ &= 甲_k大子 - \frac{率天^2甲_k大子}{2} - \frac{率^2天^4甲_k大子}{8} - \frac{3\,率^3天^6甲_k大子}{48} - \frac{15\,率^4天^8甲_k大子}{384} \end{aligned}$$

これを隅乗甲表にて畳んで 穿去積 V とする．

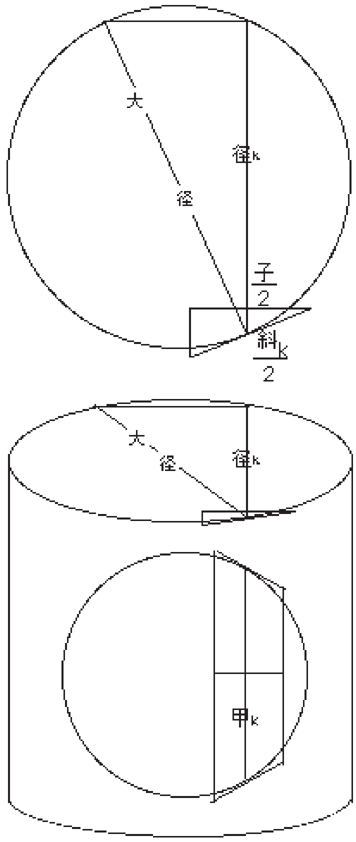
$$\begin{aligned} V &= \sum^{\infty} V_k \\ &= 小^2大\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{率}{4\cdot 2} - \frac{3\,率^2}{6\cdot 4\cdot 8} - \frac{3\cdot 15\,率^3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 48} - \frac{15\cdot 105\,率^4}{18\cdot 6\cdot 4\cdot 384}\right) \\ &= 小^2大\frac{\pi}{4} - \frac{率}{4\cdot 2}(原数) - \frac{1\cdot 3\,率}{6\cdot 4}(一差) - \frac{3\cdot 5\,率}{8\cdot 6}(二差) - \frac{5\cdot 7\,率}{10\cdot 8}(三差) \end{aligned}$$

●穿去覓積 (S) の術

径除奇除表にて

$$\frac{1}{径_k} = \frac{1}{大} + \frac{率天^2}{2\,大} + \frac{3\,率^2天^4}{8\,大} + \frac{15\,率^3天^6}{48\,大} + \frac{105\,率^4天^8}{384\,大}$$

$$斜_k = \frac{大子}{径_k}$$



$$S_k = 斜_k甲_k = 甲_k子 + \frac{率天^2甲_k子}{2} + \frac{3\,率^2天^4甲_k子}{8} + \frac{15\,率^3天^6甲_k子}{48} + \frac{105\,率^4天^8甲_k子}{384}$$

隅乗甲表にて畳んで

$$\begin{aligned} S = \sum^{\infty} S_k &= \frac{\pi}{4}小^2 + \frac{率}{4\cdot 2}\frac{\pi}{4}小^2 + \frac{3^2率^2}{6\cdot 4\cdot 8}\frac{\pi}{4}小^2 + \frac{15^2率^3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 48}\frac{\pi}{4}小^2 + \frac{105^2率^4}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 384}\frac{\pi}{4}小^2 \\ &= \frac{\pi}{4}小^2 + \frac{1^2率}{4\cdot 2}原数 + \frac{3^2率}{6\cdot 4}一差 + \frac{5^2率}{8\cdot 6}二差 + \frac{7^2率}{10\cdot 8}三差 \end{aligned}$$

●内面積 (T) の術

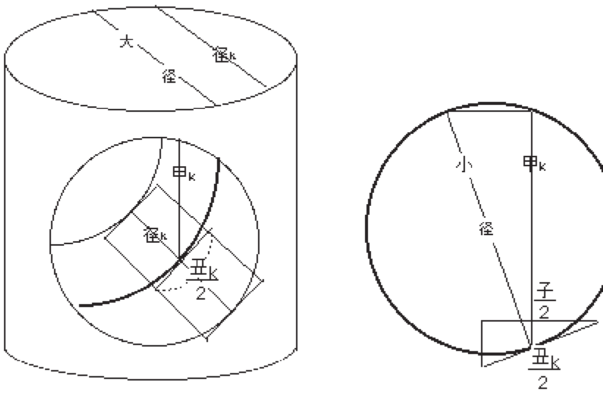
$$丑_k = \frac{小子}{甲_k}$$

$$T_k = 丑_k径_k = \frac{大小子}{甲_k} - \frac{率天^2大小子}{2\,甲_k} - \frac{率^2天^4大小子}{8\,甲_k} - \frac{3\,率^3天^6大小子}{48\,甲_k} - \frac{15\,率^4天^8大小子}{384\,甲_k}$$

甲除隅乗表にて畳んで 2 倍し

$$T = 2\sum^{\infty} T_k$$

$$= 1 - \frac{率}{2^2}大小\frac{\pi}{4} - \frac{3\,率^2}{8^2}大小\frac{\pi}{4} - \frac{3\cdot 15\,率^3}{48^2}大小\frac{\pi}{4} - \frac{15\cdot 105\,率^4}{384^2}大小\frac{\pi}{4}$$
$$= 大小\frac{\pi}{4} - \frac{率}{2^2}(原数) - \frac{1\cdot 3\,率}{4^2}(一差) - \frac{3\cdot 5\,率}{6^2}(二差) - \frac{5\cdot 7\,率}{8^2}(三差) - \frac{7\cdot 9\,率}{10^2}(四差)$$



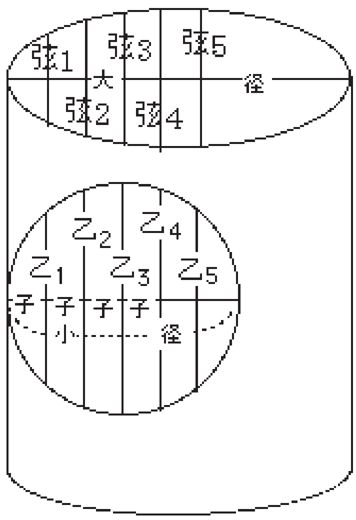
69 直径が異なる 2 つの円柱 (大径，小径) が直交し，小円柱が大円柱に接するときの穿去積，覔積を求めよ．

$子 = \dfrac{小}{n}$ ，$矢_k = 小天$ ，$率 = \dfrac{小}{大}$ とする．

$$弦_k^2 = 4\,大矢_k - 4\,矢_k^2 = 4\,大小天 - 4\,率大小天^2$$

平方綴術に開く

$$弦_k = 2\sqrt{天}\sqrt{小}\left(\sqrt{天} - \frac{率天\sqrt{天}}{2} - \frac{率^2天^2\sqrt{天}}{8} - \frac{3\,率^3天^3\sqrt{天}}{48} - \frac{15\,率^4天^4\sqrt{天}}{384}\right)$$



$$
\begin{aligned}
V_k &= 弦_k 乙_k 子 \\
&= 2\sqrt{大}\sqrt{小}\left(\sqrt{天}乙_k子 - \frac{率天\sqrt{天}乙_k子}{2} - \frac{率^2天^2\sqrt{天}乙_k子}{8} - \frac{3\,率^3天^3\sqrt{天}乙_k子}{48} - \frac{15\,率^4天^4\sqrt{天}乙_k子}{384}\right)
\end{aligned}
$$

奇乗乙表にて畳んで

$$
\begin{aligned}
V &= \sum^{\infty} V_k \\
&= 16\,小^2\sqrt{小}\sqrt{天}\left(\frac{1}{5\cdot 3} - \frac{4\,率}{7\cdot 5\cdot 3\cdot 2} - \frac{4\cdot 6\,率^2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 8} - \frac{3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\,率^3}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 48} - \frac{15\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\,率^4}{13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 384}\right) \\
&= \frac{16\,小^2\sqrt{小}\sqrt{天}}{15} - \frac{2\,率}{7\cdot 1}(原数) - \frac{1\cdot 3\,率}{9\cdot 2}(一差) - \frac{3\cdot 4\,率}{11\cdot 3}(二差) - \frac{5\cdot 5\,率}{13\cdot 4}(三差)
\end{aligned}
$$

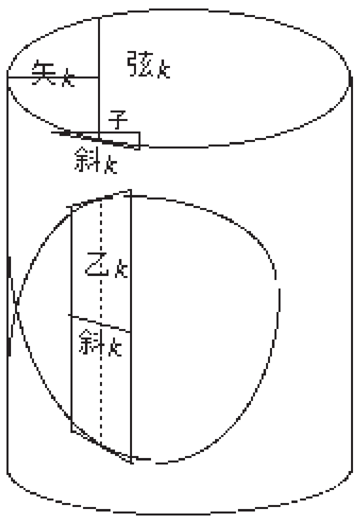
●穿去覓積 (S) の術

$$
\frac{2\sqrt{小}\sqrt{天}}{弦_k} = \frac{1}{\sqrt{天}} + \frac{率天}{2\sqrt{天}} + \frac{3\,率^2天^2}{8\sqrt{天}} + \frac{5\,率^3天^3}{48\sqrt{天}} + \frac{105\,率^4天^4}{384\sqrt{天}}
$$

$$
斜_k = \frac{大子}{弦_k}
$$

$$
\begin{aligned}
S_k &= 斜_k 乙_k \\
&= \frac{\sqrt{天}}{2\sqrt{小}}\left(\frac{乙_k子}{\sqrt{天}} + \frac{率\sqrt{天}乙_k子}{2} + \frac{3\,率^2天\sqrt{天}乙子}{8} + \frac{15\,率^3天^2\sqrt{天}乙_k子}{48} + \frac{105\,率^4天^3\sqrt{天}乙_k子}{384}\right)
\end{aligned}
$$

奇乗乙表にて畳んで



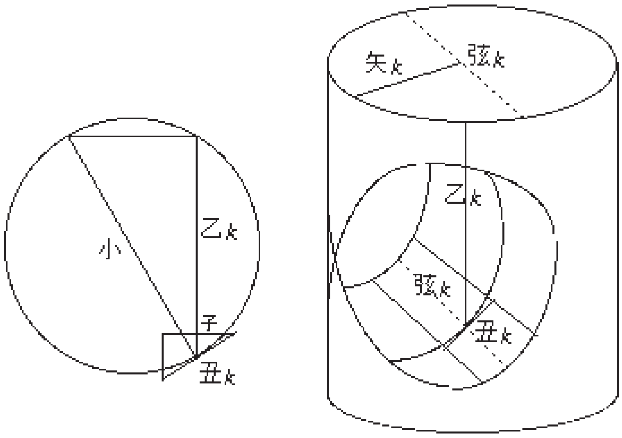
$$
\begin{aligned}
S &= \sum^{\infty} S_k \\
&= 2\,小\sqrt{小}\sqrt{天}\left(\frac{1}{3} + \frac{率}{5\cdot 3} + \frac{3\,率^2}{7\cdot 5\cdot 3} + \frac{3\cdot 5\,率^3}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\,率^4}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2\,小\sqrt{小}\sqrt{天}}{3} + \frac{1\cdot 率}{5}(原数) + \frac{3\,率}{7}(一差) + \frac{5\,率}{9}(二差) + \frac{7\,率}{11}(三差)$$

●内面積 (T) の術

$$丑_k = \frac{小子}{乙_k}$$

$$\begin{aligned} T_k &= 弦_k丑_k \\ &= 2\,小\sqrt{小}\sqrt{天}\left(\frac{\sqrt{天}子}{乙_k} - \frac{率天\sqrt{天}子}{2\,乙_k} - \frac{率^2天^2\sqrt{天}子}{8\,乙_k} - \frac{率^3天^3\sqrt{天}子}{48\,乙_k} - \frac{15\,率^4天^4\sqrt{天}子}{384\,乙_k}\right) \end{aligned}$$



乙除奇乗表にて畳んで 2 倍し

$$\begin{aligned} T &= 2\sum^{\infty} T_k \\ &= 4\,小\sqrt{小}\sqrt{天}\left(1 - \frac{率}{3} - \frac{率^2}{5\cdot 3} - \frac{3\,率^3}{7\cdot 5\cdot 3} - \frac{15\,率^4}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\right) \\ &= 4\,小\sqrt{小}\sqrt{天} - \frac{率}{3}(原数) - \frac{1\cdot 率}{5}(一差) - \frac{3\,率}{7}(二差) - \frac{5\,率}{9}(三差) - \frac{7\,率}{11}(四差) \end{aligned}$$

現代解 $V = \displaystyle\int_0^r 4x\sqrt{(R-x)(r-x)}dx$ を求める.

$t = \sqrt{\dfrac{r-x}{R-x}}$ とおくと $0 < t < \sqrt{\dfrac{r}{R}}$

$$x = \frac{Rt^2 - r}{t^2 - 1} = R + \frac{R - r}{t^2 - 1}$$

$$dx = \frac{-2(R-r)t}{(t^2-1)^2}$$

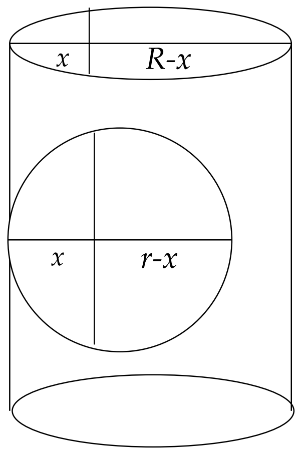


図 1

$$\sqrt{(R-x)(r-x)}=(R-x)\sqrt{\frac{r-x}{R-x}}=-\frac{R-r}{t^2-1}t$$

$$\begin{aligned}S(x)&=x\sqrt{(R-x)(r-x)}dx\\&=\left(\frac{Rt^2-r}{t^2-1}\right)\left(-\frac{R-r}{t^2-1}t\right)\left(\frac{-2(R-r)t}{(t^2-1)^2}\right)\\&=\frac{2(R-r)^2(Rt^2-r)t^2}{(t^2-1)^4}\end{aligned}$$

$$V=\int_0^r 4S(x)dx=\int_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}\frac{-8(R-r)^2(Rt^2-r)t^2}{(t^2-1)^4}dt$$

ここで

$$\frac{(Rt^2-r)t^2}{(t^2-1)^4}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{(t-1)^3}+\frac{D}{(t-1)^4}+\frac{E}{t+1}+\frac{F}{(t+1)^2}+\frac{G}{(t+1)^3}+\frac{H}{(t+1)^4}$$

ただし

$$A=-\frac{R+r}{32},\ B=\frac{R+r}{32},\ C=\frac{R}{8},\ D=\frac{R-r}{16},\ E=F=B,\ G=-C,\ H=D$$

と分解できる.

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}\left(\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{B}{(t+1)^2}\right)dt&=-B\left[\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right]_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}\\&=-B\left[\frac{2t}{t^2-1}\right]_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}\\&=-B\frac{2\sqrt{\frac{r}{R}}}{\frac{r}{R}-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{r+R}{32} \cdot \frac{2\sqrt{r}\sqrt{R}}{r-R} \\
&= \frac{r+R}{16} \cdot \frac{\sqrt{r}\sqrt{R}}{R-r}
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
-8(R-r)^2\left(-\frac{r+R}{16} \cdot \frac{\sqrt{r}\sqrt{R}}{r-R}\right) &= \frac{r^2-R^2}{2}\sqrt{r}\sqrt{R} && (1) \\
&= r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}\right) && (2) \\
&= r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{率^2}\right) && (3)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}\left(\frac{C}{(t-1)^3} - \frac{C}{(t+1)^3}\right)dt &= \frac{C}{2}\left[-\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}} \\
&= -C\left[\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}} \\
&= -\frac{R}{8} \cdot \frac{2\sqrt{\frac{r}{R}}}{\left(\frac{r}{R}-1\right)^2} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{r}\sqrt{R}}{\left(\frac{r}{R}-1\right)^2}
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
-8(R-r)^2\left(-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{r}\sqrt{R}}{\left(\frac{r}{R}-1\right)^2}\right) &= 2(R-r)^2\frac{R^2\sqrt{r}\sqrt{R}}{(r-R)^2} && (4) \\
&= 2R^2\sqrt{r}\sqrt{R} && (5) \\
&= 2r^2\sqrt{r}\sqrt{R} \cdot \frac{R^2}{r^2} && (6) \\
&= r^2\sqrt{r}\sqrt{R} \cdot \frac{2}{率^2} && (7)
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}\left(\frac{D}{(t-1)^4} + \frac{D}{(t+1)^4}\right)dt &= -\frac{D}{3}\left[\frac{1}{(t-1)^3} + \frac{1}{(t-1)^3}\right]_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}} \\
&= -\frac{D}{3}\left[\frac{2t^3+6t}{(t^2-1)^3}\right]_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{D}{3}\frac{2\sqrt{\frac{r}{R}}\frac{r}{R}+6\sqrt{\frac{r}{R}}}{\left(\frac{r}{R}-1\right)^3}$$

$$= \frac{r-R}{3\times 16}\frac{2\sqrt{\frac{r}{R}}\frac{r}{R}+6\sqrt{\frac{r}{R}}}{\frac{(r-R)^3}{R^3}}$$

$$= \frac{1}{3\times 16}\frac{2\sqrt{r}rR\sqrt{R}+6\sqrt{r}\sqrt{R}R^2}{(r-R)^2}$$

従って，

$$-8(R-r)^2\times\frac{1}{3\times 16}\frac{2\sqrt{r}rR\sqrt{R}+6\sqrt{r}\sqrt{R}R^2}{(r-R)^2} = -\frac{1}{3}(rR+3R^2)\sqrt{r}\sqrt{R} \tag{8}$$

$$= -\frac{1}{3}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(\frac{R}{r}+3\frac{R^2}{r^2}\right) \tag{9}$$

$$= -\frac{1}{3}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(\frac{1}{率}+\frac{3}{率^2}\right) \tag{10}$$

4.

$$\int_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}\left(\frac{-E}{t-1}+\frac{E}{t+1}\right)dt = E\left[-\log|t-1|+\log|t+1|\right]_0^{\sqrt{\frac{r}{R}}}$$

$$= \frac{r+R}{32}\log\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}$$

従って，

$$8(R-r)^2\times\frac{r+R}{32}\log\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}} = -\frac{1}{4}(R-r)^2(r+R)\log\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}} \tag{11}$$

以上 $(1)+(5)+(8)+(11)$ が求める体積である．

$$V = \frac{1}{6}(3r^2-2rR-3R^2)\sqrt{rR}-\frac{1}{4}(R-r)^2(r+R)\log\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}$$

この結果と求積通考の結果をあわせるために $r^2\sqrt{r}\sqrt{R}$ で括り，率 $=\frac{r}{R}$ で書くようにする．

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

$$\log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots$$

より

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\cdots\cdots$$

よって，(11) は

$$-\frac{1}{2}(r-R)^2(r+R)\left\{\sqrt{\frac{r}{R}}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{r}{R}}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{\frac{r}{R}}\right)^5+\cdots\right\}$$

この第 1 項は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(r-R)^2(r+R)\sqrt{\frac{r}{R}} &= -\frac{1}{2}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\frac{(r-R)^2(r+R)}{r^2R} && (12)\\
&= -\frac{1}{2}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\frac{r^3-r^2R-rR^2+R^3}{r^2R} && (13)\\
&= -\frac{1}{2}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(\frac{r}{R}-1-\frac{R}{r}+\frac{R^2}{r^2}\right) && (14)\\
&= -\frac{1}{2}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(率-1-\frac{1}{率}+\frac{1}{率^2}\right) && (15)
\end{aligned}$$

第 2 項は 第 1 項 $\times\ \dfrac{1}{3}$率 だから

$$-\frac{1}{2\cdot 3}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(率^2-率-1+\frac{1}{率}\right) \tag{16}$$

これらと (3)(7)(10)(15)(16) の和を見ると，

$$\frac{1}{率^2}\text{の係数} = -\frac{1}{2}+2-1-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{1}{率}\text{の係数} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=0$$

さらに

$$第\,3\,項 = 第\,2\,項 \times \frac{3}{5}率 = -\frac{1}{2\cdot 5}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(率^3-率^2-率+1\right)$$

$$第\,4\,項 = 第\,3\,項 \times \frac{5}{7}率 = -\frac{1}{2\cdot 7}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(率^4-率^3-率^2+率\right)$$

$$第\,5\,項 = 第\,4\,項 \times \frac{7}{9}率 = -\frac{1}{2\cdot 9}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(率^5-率^4-率^3+率^2\right)$$

$$\vdots$$

$$第\,n\,項 = 第\,n-1\,項 \times \frac{2n-3}{2n-1}率 = -\frac{1}{2\cdot(2n-1)}r^2\sqrt{r}\sqrt{R}\left(率^n-率^{n-1}-率^{n-2}+率^{n-3}\right)$$

よって

$$率^0\text{の係数} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{16}{15}$$

$$率^1\text{の係数} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 7}=-\frac{16}{15}\cdot\frac{2}{7}$$

$$率^2\text{の係数} = -\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 7}-\frac{1}{2\cdot 9}=\frac{1\cdot 3}{9\cdot 2}\cdot(率^1\text{の係数})$$

$$率^3の係数 = -\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1}{2\cdot 9} - \frac{1}{2\cdot 11} = \frac{3\cdot 4}{11\cdot 3}\cdot(率^2の係数)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} a_n = 率^nの係数 &= -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n+3)} - \frac{1}{2(2n+5)} \\ &= -\frac{16(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \\ &= \frac{(2n-3)(n+1)}{n(2n+5)} a_{n-1} \end{aligned}$$

故に

$$V = \frac{16\,小^2\sqrt{小}\sqrt{大}}{15} - \frac{2\,率}{7\cdot 1}原数 - \frac{1\cdot 3\,率}{9\cdot 2}一差 - \frac{3\cdot 4\,率}{11\cdot 3}二差 - \frac{5\cdot 5\,率}{13\cdot 4}三差$$

70 大きい円柱に小さい円柱が斜めに交わったときの穿去積，覚積，内面積を求めよ.

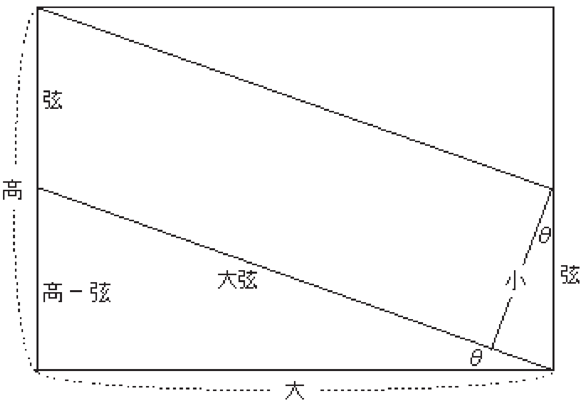
$\frac{大弦}{大} = \frac{弦}{小}$ より 大弦 $= \frac{大}{小}弦$

$$(高 - 弦)^2 + 大^2 = 大弦^2$$

$$(高 - 弦)^2 + 大^2 = \frac{大^2}{小^2}弦^2$$

弦を得る二次方程式

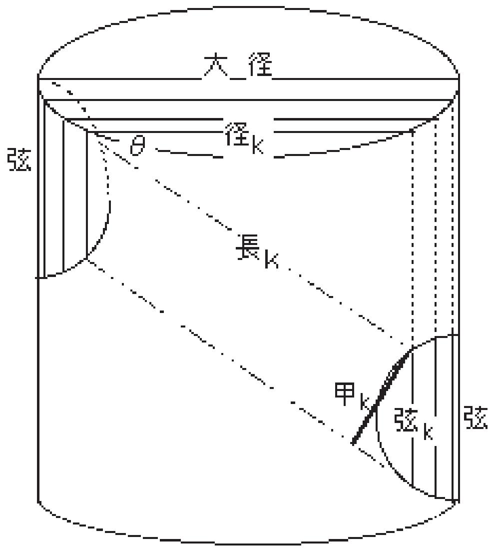
$$\left(1 - \frac{大^2}{小^2}\right)弦^2 - 2\,高弦 + 高^2 + 大^2 = 0$$



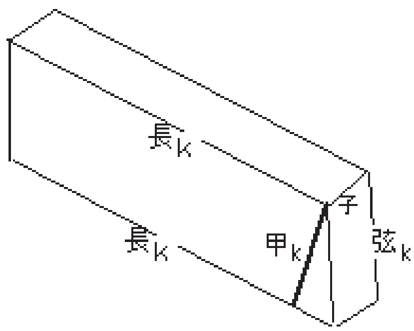
$$\therefore\quad 弦 = \frac{大^2 + 高^2}{高 + \sqrt{\dfrac{大^2+高^2}{\dfrac{小^2}{大^2}} - 大^2}}$$

$$長_k = \frac{弦}{小} 径_k$$

$$積_k = 長_k 甲_k 子 = \frac{弦}{小} \cdot 径_k 甲_k 子 = \frac{弦}{小} \times ([68]の\ V_k)$$



$$長_k = 径_k \sec\theta$$



よって 穿去積 $= \dfrac{弦}{小} \times$([68]の穿去積)

覓積，内面積についても[68]の $\dfrac{弦}{小} = \sec\theta$ 倍になる．

[71] 円柱に楕円柱が斜めに交わる．軸は直交している．側円と円柱は接している．穿去覓積を求める．

$$斜短径 = \frac{長 \cdot 短}{大}$$

この証明：

楕円を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とする．これが直線 $x\cos\theta - y\sin\theta = R$ と接するので，(R は大円の

半径)

$$b^2x^2+a^2\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x-\frac{R}{\sin\theta}\right)^2=a^2b^2$$

の判別式=0

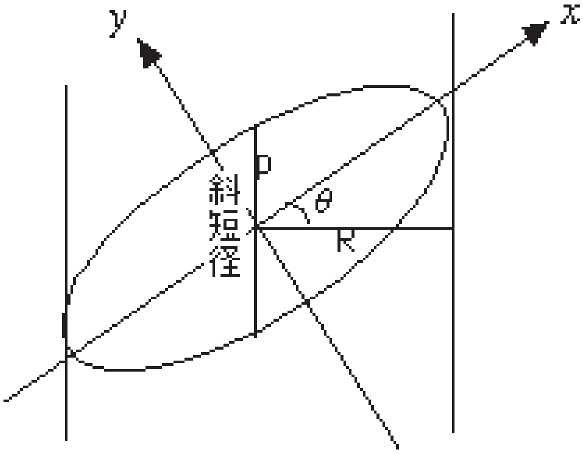
$$(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)x^2-2a^2R\cos\theta x+a^2R^2-a^2b^2\sin^2\theta=0$$

$$\therefore\quad D=(a^2R\cos\theta)^2-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(a^2R^2-a^2b^2\sin^2\theta)=0$$

よって

$$R^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$$

ところで $\dfrac{\text{斜短径}}{2}=p$ とおくと $p^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$ だから



$$p^2=\frac{a^2b^2}{R^2}$$

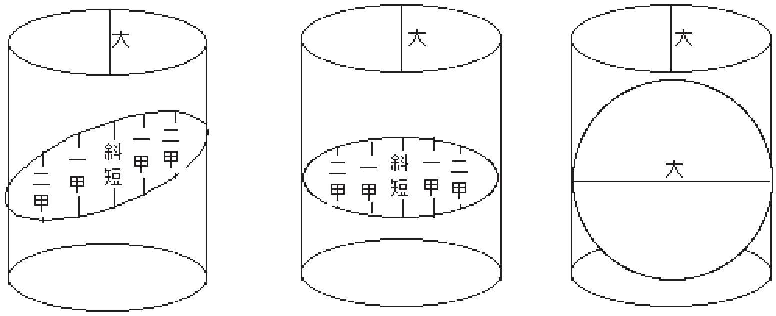
従って

$$\text{斜短径}=\frac{\text{長}\cdot\text{短}}{\text{大}}\qquad\square$$

⑫より直径が等しい円柱の 穿去覓積 $=V=\text{大}^2$ だから求める覓積 S は

$$S=\frac{\text{斜短}}{\text{大}}V=\text{大}\cdot\text{斜短}=\text{長}\cdot\text{短}$$

Cavalieri の原理



真中の図が楕円になることの証明

直線 $x\cos\theta - y\sin\theta = t$ と楕円の交点 A，B の x 座標を α，$\beta(\alpha < \beta)$ とすると，

$$R^2x^2 - (a^2t\cos\theta)x + a^2t^2 - a^2b^2\sin^2\theta = 0$$

の 2 解が α，β で

$$AB = \frac{\beta - \alpha}{\sin\theta} = \frac{2\sqrt{D}}{R^2\sin\theta} \quad \text{ただし，} D = a^4t^2\cos^2\theta - R^2(a^2t^2 - a^2b^2\sin^2\theta)$$

よって

$$\begin{cases} X = t \\ Y = \dfrac{\sqrt{D}}{R^2\sin\theta} \end{cases}$$

より t を消去すると

$$(R^2Y\sin\theta)^2 = a^4X^2\cos^2\theta - R^2(a^2X^2 - a^2b^2\sin^2\theta)$$

$$R^4Y^2\sin^2\theta = -a^2b^2X^2\sin^2\theta + a^2b^2R^2\sin^2\theta$$

$$\frac{X^2}{R^2} + \frac{R^2}{a^2b^2}Y^2 = 1$$

72 二つの円柱に楕円柱を穿去したときの覓積 S を求めよ．長径，短径，円柱径が与えられる．

円柱径を小とする．71と同様にして

$$\text{短斜} = \frac{\text{長}\cdot\text{短}}{2\,\text{小}}$$

67と同様にして

$$\text{甲}_k = \text{斜短} - \frac{\text{斜短}\cdot\text{天}^2}{2} - \frac{\text{斜短}\cdot\text{天}^4}{8} - \frac{3\,\text{斜短}\cdot\text{天}^6}{48} - \frac{15\,\text{斜短}\cdot\text{天}^8}{384}$$

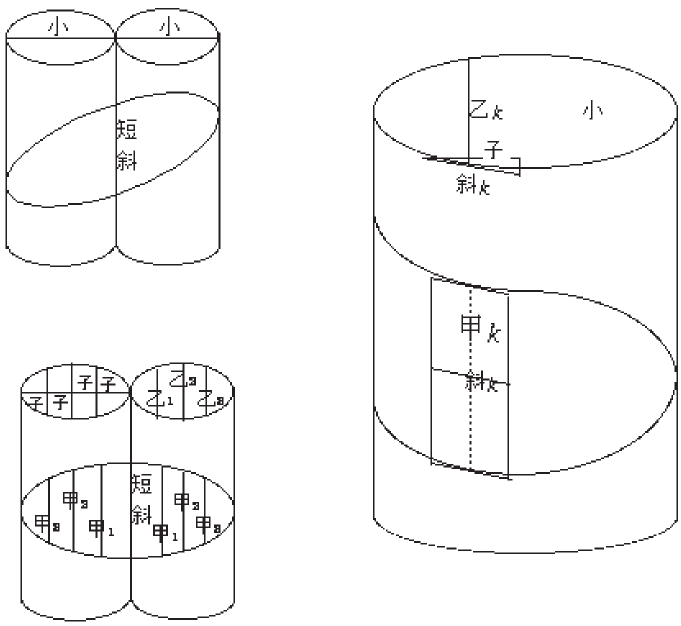
$$\text{斜}_k = \frac{\text{小}\cdot\text{子}}{\text{乙}_k}$$

$$S_k = \text{斜}_k\text{甲}_k$$

$$= \frac{長 \cdot 短}{2}\left(\frac{子}{乙_k} - \frac{子 \cdot 天^2}{2\,乙_k} - \frac{子 \cdot 天^4}{8\,乙_k} - \frac{3\,子 \cdot 天^6}{48\,乙_k} - \frac{15\,子 \cdot 天^8}{384\,乙_k}\right)$$

乙除隅乗表で畳んで 2 倍する

$$S = 2\sum^{\infty} S_k$$
$$= 2\,長 \cdot 短\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{48 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} - \frac{15 \cdot 15!!}{384 \cdot 16!!}\right)$$



73 円柱に楕円柱が交わっている．円柱径, 長径, 短径, 矢が与えられたとき, 穿去積を求める．

径 + 矢 = 大 とする．71でやったように 斜短 $= \frac{長 \cdot 短}{大}$ とし，Cavalieri で図 3 のように変形し，それを上下に $\frac{大}{斜短}$ 拡大すると 69の術が使える．その体積 (弧穿去責) V’ は

$$V' = \frac{16\,径^2\sqrt{天}\sqrt{径}}{15} - \frac{2\,率}{1 \cdot 7}原数 - \frac{1 \cdot 3\,率}{2 \cdot 9}一差 - \frac{2 \cdot 4\,率}{3 \cdot 11}二差 - \frac{5 \cdot 5\,率}{4 \cdot 13}三差$$

求める体積 V は

$$V = \frac{斜短}{大}V' = 長短\left(\frac{16\,径率\sqrt{径}}{15\sqrt{天}} - \frac{2\,率}{1 \cdot 7}原数 - \frac{1 \cdot 3\,率}{2 \cdot 9}一差 - \frac{2 \cdot 4\,率}{3 \cdot 11}二差 - \frac{5 \cdot 5\,率}{4 \cdot 13}三差\right)$$

74 円柱に半径が等しく，接した 2 つの円柱が交わったときの穿去積を求める．

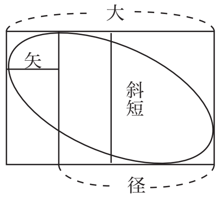


図 2

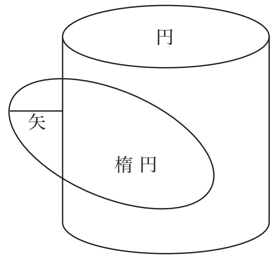


図 1

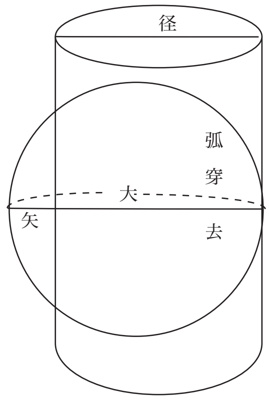


図 4

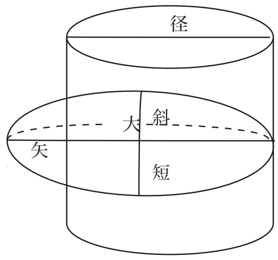


図 3

円柱径 $=$ 大, 穿去径 $=$ 小, $\dfrac{\text{小}}{n} =$ 子 とする.

$$\text{径}_k^2 = \text{大}^2 - 4\left(\frac{k}{n}\text{小}\right)^2$$

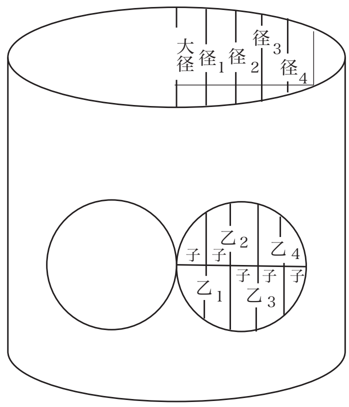
$$\text{径}_k^2 = \text{大}^2 - 4\,\text{率}\text{天}^2\text{大}^2 \qquad\qquad \text{ただし}\quad \frac{\text{小}^2}{\text{大}^2} \equiv \text{率}$$

$$\text{径}_k = \text{大}\left(1 - \frac{4\,\text{率}\text{天}^2}{2} - \frac{4^2\text{率}^2\text{天}^4}{8} - \frac{3\cdot 4^3\text{率}^3\text{天}^6}{48} - \frac{15\cdot 4^4\text{率}^4\text{天}^8}{384}\right)$$

$$V_k = \text{径}_k\text{乙}_k\text{子} = \text{大}\left(\text{乙}_k\text{子} - \frac{4\,\text{率}\text{天}^2\cdot\text{乙}_k\text{子}}{2} - \frac{4^2\text{率}^2\text{天}^4\cdot\text{乙}_k\text{子}}{8} - \frac{3\cdot 4^3\text{率}^3\text{天}^6\cdot\text{乙}_k\text{子}}{48} - \frac{15\cdot 4^4\text{率}^4\text{天}^8\cdot\text{乙}_k\text{子}}{384}\right)$$

隅乗乙表により畳み 2 倍すると [1)]

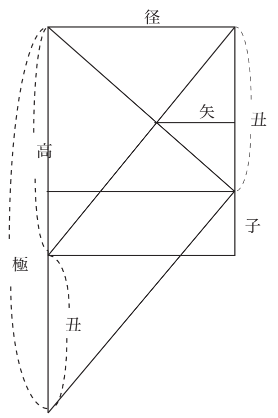
$$V = 2\sum^{\infty} V_k = 2\,\text{大}\frac{\pi}{4}\text{小}^2\left(1 - \frac{3\cdot 5\,\text{率}}{3\cdot 8} - \frac{7\cdot 9\,\text{率}^2}{4\cdot 48} - \frac{9\cdot 11\cdot 13\,\text{率}^3}{8\cdot 384} - \frac{5\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\,\text{率}^4}{64\cdot 3840}\right)$$

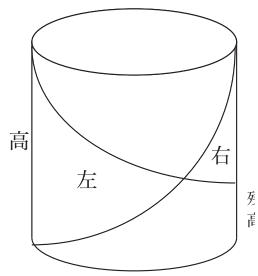


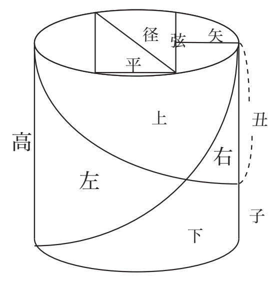
注 1) 隅乗乙表によると

$$\sum 乙_k子 = 小^2\frac{\pi}{4},\quad \sum 天^2\cdot 乙_k子 = 小^2\frac{3\cdot 5}{8\cdot 6}\frac{\pi}{4},\quad \sum 天^4\cdot 乙_k子 = 小^2\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{12\cdot 10\cdot 8\cdot 6}\frac{\pi}{4}$$

75 円柱を図のように左右から斜めに切る．円柱径，高さ，残高が与えられたとき，左右の体積の和を求めよ．







残高 $=$ 子, 高 $-$ 残高 $=$ 丑 とする．極 $=$ 高 $+$ 丑 $= 2$ 高 $-$ 子 とおく．

矢 : 丑 = 径 : 極 より 矢 $= \dfrac{径 \cdot 丑}{極}$

平 = 径 − 2 矢 とおくと

$$平 = 径 - \frac{2\,径 \cdot 丑}{極} = \frac{径\,(極 - 2\,丑)}{極} = \frac{径 \cdot 子}{極}$$

$$弦^2 = 径^2 - 平^2 = 径^2 - \frac{径^2 \cdot 子^2}{極^2} = 径^2 - 径^2 \cdot 率$$

これを平方綴術に開き

$$弦 = 径\left(1 - \frac{率}{2} - \frac{率^2}{8} - \frac{3\,率^3}{48} - \frac{15\,率^4}{384}\right)$$

よって

$$弦^3 = 径^3\left(1 - \frac{3\,率}{2} + \frac{3\,率^2}{8} + \frac{3\,率^3}{48} + \frac{3^2率^4}{384}\right) \cdots\cdots ①$$

㊱によって

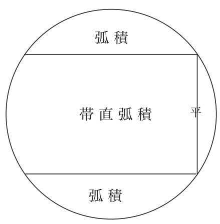
$$右積 = \frac{弦^3丑}{12\,矢} - \frac{弧積 \cdot 平 \cdot 丑}{2\,矢} = \frac{弦^3極}{12\,径} - \frac{弧積 \cdot 平 \cdot 極}{2\,径}$$

$$上右和 = \frac{\frac{\pi}{4}径^2丑}{2}, \quad 上左和 = \frac{\frac{\pi}{4}径^2高}{2}$$

$$\begin{aligned} 左積 = 上左和 - 上 &= 上左和 - (上右和 - 右積) \\ &= \frac{\frac{\pi}{4}径^2高}{2} - \frac{\frac{\pi}{4}径^2丑}{2} + 右積 \\ &= \frac{\frac{\pi}{4}径^2(高 - 丑)}{2} + 右積 = \frac{円責 \cdot 子}{2} + 右積 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} V = 左右積和 &= \frac{円責 \cdot 子}{2} + 2\,右積 \\ &= \frac{円責 \cdot 子}{2} + \frac{弦^3極}{6\,径} - \frac{弧積 \cdot 平 \cdot 極}{径} \\ &= \frac{円責 \cdot 子}{2} + \frac{弦^3極}{6\,径} - 弧責 \cdot 子 \\ &= \frac{帯直弧責 \cdot 子}{2} + \frac{弦^3極}{6\,径} \cdots\cdots ② \end{aligned}$$



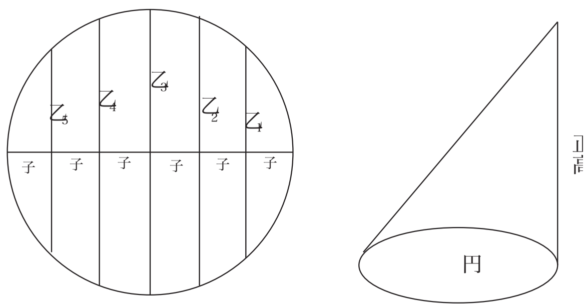
立表第九により

$$
\begin{aligned}
\text{帯直弧責} &= \text{径}\cdot\text{平} - \frac{\text{率径平}}{2\cdot 3} - \frac{\text{率}^2\text{径平}}{5\cdot 8} - \frac{3\,\text{率}^3\text{径平}}{7\cdot 48} - \frac{15\,\text{率}^4\text{径平}}{9\cdot 384}\\
&= \frac{\text{径}^2}{\text{子}}\left(\frac{\text{子}^2}{\text{極}} - \frac{\text{率}\cdot\text{子}^2}{2\cdot 3\,\text{極}} - \frac{\text{率}^2\text{子}^2}{5\cdot 8\,\text{極}} - \frac{3\,\text{率}^3\text{子}^2}{7\cdot 48\,\text{極}} - \frac{15\,\text{率}^4\text{子}^2}{9\cdot 384\,\text{極}}\right)\\
&= \frac{\text{径}^2}{\text{子}}\left(\text{率}\cdot\text{極} - \frac{\text{率}^2\text{極}}{2\cdot 3} - \frac{\text{率}^3\text{極}}{5\cdot 8} - \frac{3\,\text{率}^4\text{極}}{7\cdot 48} - \frac{15\,\text{率}^5\text{極}}{9\cdot 384}\right)\cdots\cdots③
\end{aligned}
$$

①③を②へ代入して

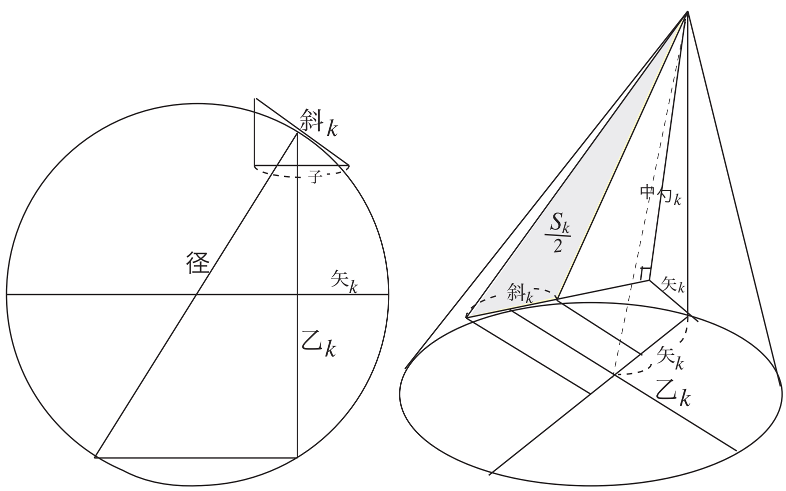
$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\text{径}^2\text{極}}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{\text{率}}{2} + \frac{\text{率}^2}{8} + \frac{\text{率}^3}{48} + \frac{\text{率}^4}{384}\right) + \left(\text{率} - \frac{\text{率}^2}{2\cdot 3} - \frac{\text{率}^3}{5\cdot 8} - \frac{3\,\text{率}^4}{7\cdot 48}\right)\\
&= \frac{\text{径}^2\text{極}}{4}\left(\frac{2}{3} + \text{率} - \frac{\text{率}^2}{3\cdot 4} - \frac{\text{率}^3}{5\cdot 24} - \frac{3\,\text{率}^4}{7\cdot 192}\right)
\end{aligned}
$$

76 図のような斜円錐の側面積を求めよ．正高は底面に垂直とする．



子 $=\dfrac{\text{径}}{n}$，矢$_k=\dfrac{k}{n}$径 = 天径 とする．中勾$_k^2=$ 高$^2+$ 天^{2}径^2 とする．率 $=\dfrac{\text{径}^2}{4\,\text{高}^2}$ とおいて

$$\frac{\text{中勾}_k^2}{\text{高}^2} = 1 + 4\,\text{率天}^2$$



平方綴術に開いて

$$中勺_k = 高\sqrt{1+4\,率天^2} = 高\left(1+\frac{4\,率天^2}{2}-\frac{4^2率^2天^4}{8}+\frac{3\cdot 4^3率^3天^6}{48}-\frac{15\cdot 4^4率^4天^8}{384}\right)$$

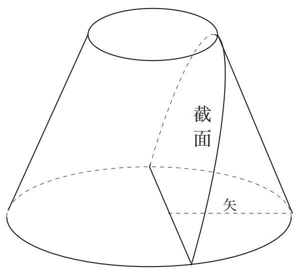
$斜_k : 子 = 径 : 乙_k$ より $斜_k = \dfrac{子\cdot 径}{乙_k}$

$$\begin{aligned} S_k &= 中勺_k \times 斜_k \\ &= 高径\left(\frac{子}{乙_k}+\frac{4\,率天^2子}{2\,乙_k}-\frac{4^2率^2天^4子}{8\,乙_k}+\frac{3\cdot 4^3率^3天^6子}{48\,乙_k}-\frac{15\cdot 4^4率^4天^8子}{384\,乙_k}\right)\end{aligned}$$

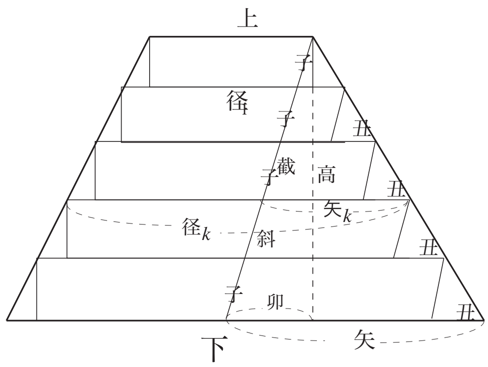
乙除偶乗表によって畳むと

$$\begin{aligned} S &= \sum^{\infty} S_k \\ &= \frac{\pi}{4}高径\left(2+\frac{3}{2}率-\frac{5\cdot 7\,率^2}{4\cdot 8}+\frac{7\cdot 9\cdot 11\,率^3}{8\cdot 48}-\frac{5\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{8^2\cdot 384}\right)\end{aligned}$$

77 円錐台を斜めに切断したときの切り口の面積を求めよ．上円径，下円径，高さ，矢が与えられる．



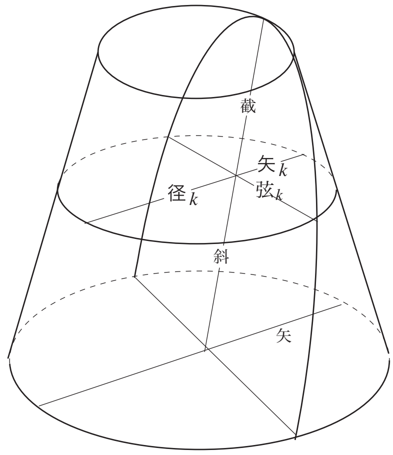
$丑 = \dfrac{矢}{n}$，$矢_k = \dfrac{k}{n}矢 = 天矢$ とする．$寅 = \dfrac{下-上}{n}$ とする．



$径_k = (下 - 上)天 + 上$ とすると

$$弦_k^2 = 4\,径_k矢_k - 4\,矢_k^2 = 4\{(下 - 上)天 + 上\}天矢 - 4(天矢)^2 = 4\,矢上(天 + 率天^2)\cdots ⓪$$

ここで $率 = \dfrac{下}{上} - \dfrac{上 + 矢}{上}$



平方綴術に開くと

$$弦_k = 2\sqrt{矢上}\left(\sqrt{天} + \frac{率天\sqrt{天}}{2} - \frac{率^2天^2\sqrt{天}}{8} + \frac{3\,率^3天^3\sqrt{天}}{48} - \frac{15\,率^4天^4\sqrt{天}}{384}\right)$$

$卯 = 矢 - \dfrac{下 - 上}{2}$ とすると，$截斜 = \sqrt{卯^2 + 高^2}$ で，　$子 = \dfrac{截斜}{n}$ とおくと

$$某積 = S_k = 弦_k子 = 2\sqrt{矢上}\left(\sqrt{天}子 + \frac{率天\sqrt{天}子}{2} - \frac{率^2天^2\sqrt{天}子}{8} + \frac{3\,率^3天^3\sqrt{天}子}{48} - \frac{15\,率^4天^4\sqrt{天}子}{384}\right)$$

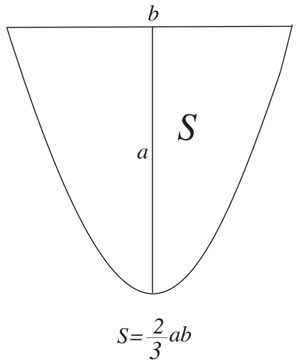
天商表に依て畳むと

$$S = \sum^{\infty} S_k = 4\,截斜\sqrt{矢上}\left(\frac{1}{3} + \frac{率}{5\cdot 2} - \frac{率^2}{7\cdot 8} + \frac{3\,率^3}{9\cdot 48} - \frac{15\,率^4}{11\cdot 384}\right)\cdots ①$$

$$\begin{cases} 率 = 0 \text{ のとき放物線} \\ 率 < 0 \text{ のとき楕円} \\ 率 > 0 \text{ のとき双曲線} \end{cases}$$

$矢 = 下 - 上$ すなわち $率 = 0$ のき ① は

$$S = \frac{4}{3}截斜\sqrt{矢上} = \frac{4}{3}截斜\sqrt{(下 - 上)上} = \frac{2}{3}ab \tag{17}$$



矢 $=$ 下 すなわち 率 $= -1$ のとき ① は

$$S = 4\,截斜\sqrt{上下}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 8} - \frac{3}{9\cdot 48} - \frac{15}{11\cdot 384}\right)\cdots ②$$

このとき S は 截斜 を長径，$\sqrt{上下}$ を短径とする楕円の面積だから

$$S = \frac{\pi}{4}截斜\sqrt{上下}\cdots ③$$

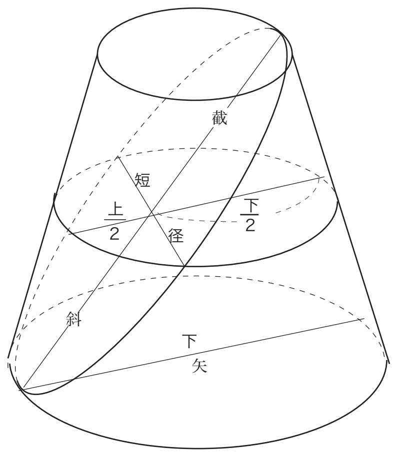
ところで

$$\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128} - \cdots\cdots$$

だから

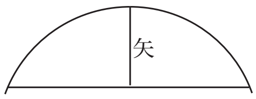
$$\frac{\pi}{8} = \int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{5\cdot 2} - \frac{2}{7\cdot 8} - \frac{2}{9\cdot 16} - \frac{2\cdot 5}{11\cdot 128} - \cdots\cdots$$

よって②と③は一致する．



$\boxed{4}$により

$$\text{弧責} = 4\,\text{矢}\sqrt{\text{矢径}}\left(\frac{1}{3} - \frac{\text{率}}{5\cdot 2} - \frac{\text{率}^2}{7\cdot 8} - \frac{3\,\text{率}^3}{9\cdot 48} - \frac{15\,\text{率}^4}{11\cdot 384}\right) \qquad \left(\text{率} = \frac{\text{矢}}{\text{径}}\right)$$



率 < 0 のとき率を $-$率 (率 > 0) としてこの楕円の方程式を作ると⓪より

$$y^2 = \text{矢上}\,(t - \text{率}\,t^2) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$x : t\,\text{矢} = \text{斜} : \text{矢}$ より $x = t\,\text{斜}$ 　　(斜=截斜)

$$y^2 = \text{矢上}\left(\frac{x}{\text{斜}} - \frac{\text{率}}{\text{斜}^2}x^2\right) = \frac{\text{矢上}}{\text{斜}}x - \frac{\text{矢上率}}{\text{斜}^2}x^2$$

$a = \dfrac{\text{矢上}}{\text{斜}},\ b = \dfrac{\text{矢上率}}{\text{斜}^2}$ とおいて

$$y^2 = ax - bx^2$$

$$bx^2 - ax + y^2 = 0$$

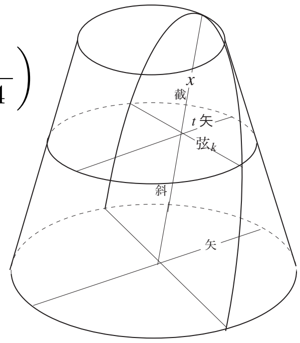
$$b\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4b}$$

$$\frac{\left(x - \dfrac{a}{2b}\right)^2}{\dfrac{a^2}{4b^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{a^2}{4b}} = 1$$

これは 長径 $= \dfrac{a}{b}$, 短径 $= \dfrac{a}{\sqrt{b}}$ の楕円になる．この楕円で長径が截斜までの面積を求める．

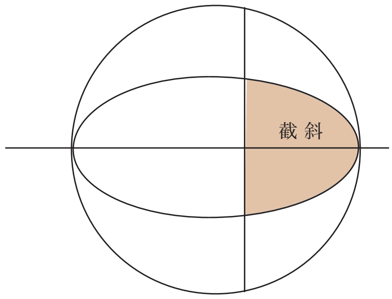
直径が $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{斜}}{\text{率}}$ で矢が截斜の弧責は$\boxed{4}$の公式を使って

$$\begin{aligned}\text{弧積} &= 4\,\text{斜}\sqrt{\text{斜}\cdot\frac{\text{斜}}{\text{率}}}\left(\frac{1}{3} - \frac{\text{率}}{5\cdot 2} - \frac{\text{率}^2}{7\cdot 8} - \frac{3\,\text{率}^3}{9\cdot 48} - \frac{15\,\text{率}^4}{11\cdot 384}\right)\\ &= \frac{4\,\text{斜}^2}{\sqrt{\text{率}}}\left(\frac{1}{3} - \frac{\text{率}}{5\cdot 2} - \frac{\text{率}^2}{7\cdot 8} - \frac{3\,\text{率}^3}{9\cdot 48} - \frac{15\,\text{率}^4}{11\cdot 384}\right)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}S &= \frac{\text{短径}}{\text{長径}}\text{弧積}\\ &= \sqrt{b}\,\text{弧積}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{矢上率}}{斜} \cdot \frac{4\,斜^2}{\sqrt{率}} \left(\frac{1}{3} - \frac{率}{5 \cdot 2} - \frac{率^2}{7 \cdot 8} - \frac{3\,率^3}{9 \cdot 48} - \frac{15\,率^4}{11 \cdot 384} \right)$$
$$= 4\,斜\sqrt{矢上} \left(\frac{1}{3} - \frac{率}{5 \cdot 2} - \frac{率^2}{7 \cdot 8} - \frac{3\,率^3}{9 \cdot 48} - \frac{15\,率^4}{11 \cdot 384} \right)$$



方程式を作らないで和算だけでもできる．

$$上 \times \frac{長 - 斜}{長} + 矢 = 下$$

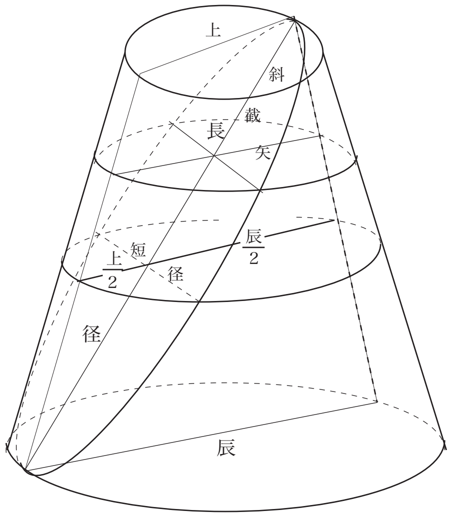
より

$$長 = \frac{上}{上 - 下 + 矢} 斜 = \frac{斜}{率}$$

また，$斜 : 矢 = 長 : 辰$ より $辰 = \dfrac{矢}{率}$ 　よって，この楕円は

$$長径 = \frac{斜}{率}, \quad 短径 = 2\sqrt{\frac{上}{2} \cdot \frac{辰}{2}} = \frac{\sqrt{矢上}}{\sqrt{率}}$$

となる．



現代数学解

- 楕円の場合

$$弧積 = 2\int_p^k \sqrt{k^2 - x^2}dx = k^2\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{p}{k} - \frac{p}{k}\sqrt{1-\left(\frac{p}{k}\right)^2}\right)$$

ここで，$k = \dfrac{斜}{2\,率}$，$p = k - 斜 = \dfrac{1-2\,率}{2\,率}斜$ だから $\dfrac{p}{k} = 1 - 2\,率$ で

$$1-\left(\frac{p}{k}\right)^2 = 1-(1-2\,率)^2 = 4(率-率^2)$$

よって

$$\sin^{-1}\frac{p}{k} + \frac{p}{k}\sqrt{1-\left(\frac{p}{k}\right)^2} = \sin^{-1}(1-2\,率) + 2(1-2\,率)\sqrt{率-率^2}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{矢上率}}{斜}弧積 \\ &= \frac{\sqrt{矢上率}}{斜}\frac{斜^2}{4\,率^2}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1-2\,率) - 2(1-2\,率)\sqrt{率-率^2}\right) \\ &= \frac{斜\sqrt{矢上}}{4\,率\sqrt{率}}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1-2\,率) - 2(1-2\,率)\sqrt{率-率^2}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

級数展開して

$$\sin^{-1}(1-2\,率)+2(1-2\,率)\sqrt{率-率^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{16\,率\sqrt{率}}{3} + \frac{8\,率^2\sqrt{率}}{5} + \frac{2\,率^3\sqrt{率}}{7} + \frac{率^4\sqrt{率}}{9} + \frac{5\,率^5\sqrt{率}}{88} + \cdots$$

従って

$$\begin{aligned} 弧積 &= \frac{斜^2}{4\,率^2}\left(\frac{16\,率\sqrt{率}}{3} - \frac{8\,率^2\sqrt{率}}{5} - \frac{2\,率^3\sqrt{率}}{7} - \frac{率^4\sqrt{率}}{9} - \frac{5\,率^5\sqrt{率}}{88} - \cdots\right) \\ &= \frac{4\,斜^2}{率^2}\left(\frac{率\sqrt{率}}{3} - \frac{率^2\sqrt{率}}{2\cdot 5} - \frac{率^3\sqrt{率}}{7\cdot 8} - \frac{3\,率^4\sqrt{率}}{9\cdot 48} - \frac{15\,率^5\sqrt{率}}{11\cdot 384} - \cdots\right) \end{aligned}$$

故に

$$S = \frac{\sqrt{矢上率}}{斜}弧積 = 4\,斜\sqrt{矢上}\left(\frac{1}{3} - \frac{率}{5\cdot 2} - \frac{率^2}{7\cdot 8} - \frac{3\,率^3}{9\cdot 48} - \frac{15\,率^4}{11\cdot 384}\right)$$

- 双曲線の場合

率 > 0 として，楕円のときと同様にしてこの双曲線の式を作ると

$$x^2 = \frac{矢上}{斜}y + \frac{矢上率}{斜^2}y^2$$

$a = \dfrac{矢上}{斜}$, $b = \dfrac{矢上率}{斜^2}$ とおいて

$$x^2 = ay + by^2$$

$$-\frac{x^2}{\dfrac{a^2}{4b}} + \frac{\left(y + \dfrac{a}{2b}\right)^2}{\dfrac{a^2}{4b^2}} = 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4b}} - \frac{a}{2b} = \frac{斜}{\sqrt{矢上率}}\sqrt{x^2 + \frac{矢上}{4\,率}} - \frac{斜}{2\,率}$$

よって求める面積 S は

$$S = 2\,斜\sqrt{矢上\,(1+率)} - 2\int_0^{\sqrt{矢上\,(1+率)}} y\,dx$$

ところで

$$2\int_0^p \sqrt{x^2+k^2}\,dx = k^2\left\{\log\left(\frac{p}{k} + \sqrt{1+\left(\frac{p}{k}\right)^2}\right) + \frac{p}{k}\sqrt{1+\left(\frac{p}{k}\right)^2}\right\}$$

である．ここで $p = \sqrt{矢上\,(1+率)}$, $k^2 = \dfrac{矢上}{4\,率}$ だから

$$\begin{aligned} S &= 2\,斜\sqrt{矢上\,(1+率)} - \left[\frac{斜}{\sqrt{矢上率}}\cdot\frac{矢上}{4\,率}\left\{\log\left(2\sqrt{率\,(1+率)}+1+2\,率\right)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. +2\sqrt{率\,(1+率)}(1+2\,率)\right\} \quad - \frac{斜}{率}\sqrt{矢上\,(1+率)}\right] \\ &= 斜\sqrt{矢上}\sqrt{1+率}\left(1+\frac{1}{2\,率}\right) \\ &\qquad - \frac{斜}{\sqrt{矢上率}}\cdot\frac{矢上}{4\,率}\log\left(2\sqrt{率\,(1+率)}+1+2\,率\right) \end{aligned} \tag{19}$$

級数展開して

$$\sqrt{1+率} = 1 + \frac{率}{2} - \frac{率^2}{8} + \frac{率^3}{16} - \frac{5\,率^4}{128} + \frac{7\,率^5}{256} - \cdots$$

$$\log\left(2\sqrt{率\,(1+率)}+1+2\,率\right) = 斜\sqrt{矢上}\left(-\frac{1}{2\,率} + \frac{1}{12} - \frac{3}{80}率 + \frac{5}{224}率^2 - \frac{35}{2304}率^3 + \frac{63}{5632}率^4\cdots\right)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} S &= 斜\sqrt{矢上}\left(1 + \frac{率}{2} - \frac{率^2}{8} + \frac{率^3}{16} - \frac{5\,率^4}{128} + \frac{7\,率^5}{256} - \cdots\right)\left(1+\frac{1}{2\,率}\right) \\ &\quad -斜\sqrt{矢上}\left(-\frac{1}{2\,率} + \frac{1}{12} - \frac{3}{80}率 + \frac{5}{224}率^2 - \frac{35}{2304}率^3 + \frac{63}{5632}率^4\cdots\right) \\ &= 4\,斜\sqrt{矢上}\left(\frac{1}{3} + \frac{率}{5\cdot 2} - \frac{率^2}{7\cdot 8} + \frac{3\,率^3}{9\cdot 48} - \frac{15\,率^4}{11\cdot 384} + \cdots\right) \end{aligned}$$

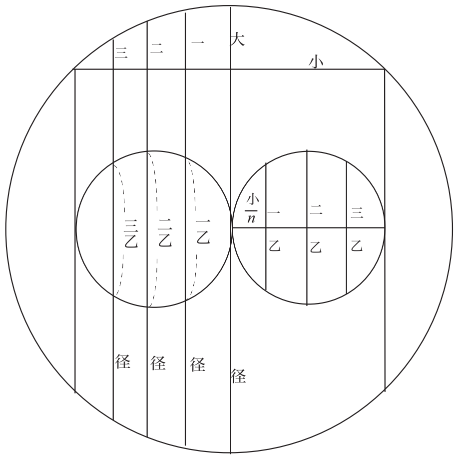
(1)(2)(3) を統括した式として①を作ったことになる．

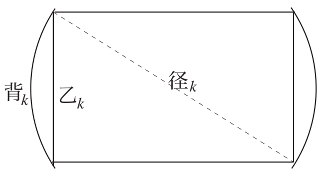
78 球から 2 つの円柱を穿去するとき，穿去積と表面積を求めよ．

球径 = 大, 円柱径 = 小 とする．$\text{子} = \dfrac{2\,\text{小}}{n}$ とし，$\text{径}_k^2 = \text{大}^2 - (k\,\text{子})^2 = \text{大}^2 - 4\,\text{天}^2\text{小}^2$ とする．

$\text{率} = \dfrac{4\,\text{小}^2}{\text{大}^2}$ とおくと $\dfrac{\text{径}_k^2}{\text{大}^2} = 1 - \text{率天}^2$

$$\text{帯直弧積} = \text{径}_k\text{乙}_k - \frac{\text{乙}_k^3}{3\cdot 2\,\text{径}_k} - \frac{\text{乙}_k^5}{5\cdot 8\,\text{径}_k^3} - \frac{3\,\text{乙}_k^7}{7\cdot 48\,\text{径}_k^5} - \frac{15\,\text{乙}_k^9}{9\cdot 384\,\text{径}_k^7} \qquad \text{(立表第九條)}$$





帯直弧積

$$V_k = \text{帯直弧積} \times \text{子}$$

$$= \frac{2\,\text{小}}{n}\left(\text{㋑}\,\text{径}_k\text{乙}_k - \text{㋺}\,\frac{\text{乙}_k^3}{3\cdot 2\,\text{径}_k} - \text{㋩}\,\frac{\text{乙}_k^5}{5\cdot 8\,\text{径}_k^3} - \frac{3\,\text{乙}_k^7}{7\cdot 48\,\text{径}_k^5} - \frac{15\,\text{乙}_k^9}{9\cdot 384\,\text{径}_k^7}\right) \quad \text{(径除奇除表より)}$$

$$= \frac{2\,\text{小大}}{n}\left(\text{㋑}\,\text{乙}_k - \frac{\text{率天}^2\text{乙}_k}{2} - \frac{\text{率}^2\text{天}^4\text{乙}_k}{8} - \frac{3\,\text{率}^3\text{天}^6\text{乙}_k}{48} - \frac{15\,\text{率}^4\text{天}^8\text{乙}_k}{384}\right.$$

$$\text{㋺} - \frac{\text{乙}_k^3}{6\,\text{大}^2} - \frac{\text{率天}^2\text{乙}_k^3}{6\cdot 2\,\text{大}^2} - \frac{3\,\text{率}^2\text{天}^4\text{乙}_k^3}{6\cdot 8\,\text{大}^2} - \frac{15\,\text{率}^3\text{天}^6\text{乙}_k^3}{6\cdot 48\,\text{大}^2}$$

$$\text{㋩} - \frac{\text{乙}_k^5}{5\cdot 8\,\text{大}^4} - \frac{3\,\text{率天}^2\text{乙}_k^5}{5\cdot 8\cdot 2\,\text{大}^4} - \frac{15\,\text{率}^2\text{天}^4\text{乙}_k^3}{5\cdot 8\cdot 8\,\text{大}^4}$$

$$- \frac{3\,\text{乙}_k^7}{7\cdot 48\,\text{大}^6} - \frac{15\,\text{率天}^2\text{乙}_k^7}{7\cdot 48\cdot 2\,\text{大}^5}$$

$$- \frac{15\,乙_k^9}{9\cdot 384\,大^8}\Bigg)$$

これを偶乗乙表に依りて畳み，穿去積 V とする．

$$V = 2\,大小^2\frac{\pi}{4}\Bigg(㋑1 - \frac{5\,率}{8\cdot 4} - \frac{7\cdot 9\,率^2}{4^2\cdot 192} - \frac{3\cdot 9\cdot 11\cdot 13\,率^3}{4^3\cdot 192\cdot 48} - \frac{15\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\,率^3}{4^4\cdot 1920\cdot 384}$$

$$㋺ - \frac{率}{8\cdot 4} - \frac{2\cdot 7\,率^2}{4^2\cdot 192} - \frac{9\cdot 9\cdot 11\,率^3}{4^3\cdot 192\cdot 48} - \frac{15\cdot 44\cdot 13\cdot 15\,率^4}{4^4\cdot 1920\cdot 384}$$

$$㋩ - \frac{3\,率^2}{4^2\cdot 192} - \frac{9\cdot 9\cdot 3\,率^3}{4^3\cdot 192\cdot 48} - \frac{9\cdot 22\cdot 13\cdot 15\,率^4}{4^4\cdot 1920\cdot 384}$$

$$- \frac{5\cdot 9\,率^3}{4^3\cdot 192\cdot 48} - \frac{9\cdot 5^2\cdot 44}{4^4\cdot 1920\cdot 384}$$

$$- \frac{15\cdot 105\,率^4}{4^4\cdot 1920\cdot 384}\Bigg)$$

$$= 2\,大小^2\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\left(\frac{小}{大}\right)^2 - \frac{5}{12}\left(\frac{小}{大}\right)^4 - \frac{5\cdot 7}{8^2}\left(\frac{小}{大}\right)^6 - \frac{7\cdot 9}{8^2}\left(\frac{小}{大}\right)^8\right)$$

$$= 2\,大小^2\frac{\pi}{4} - \frac{3\,極}{2^2}原数 - \frac{1\cdot 5\,極}{3^2}一差 - \frac{3\cdot 7\,極}{4^2}二差 - \frac{5\cdot 9\,極}{5^2}三差 \qquad \left(極 = \frac{小^2}{大^2}\right)$$

表面積　立表第九條より

$$背_k = 乙_k + \frac{乙_k^3}{2\cdot 3\,径_k^2} + \frac{3\,乙_k^5}{5\cdot 8\,径_k^4} + \frac{15\,乙_k^7}{7\cdot 48\,径_k^6} + \frac{105\,乙_k^9}{9\cdot 384\,径_k^8}$$

$$斜_k = \frac{大子}{径_k}$$

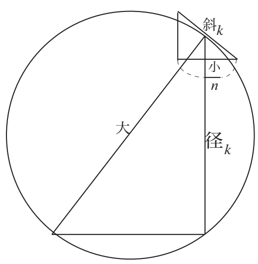
$$S_k = 背_k斜_k$$

$$= \frac{2\,大小}{n}\left(\frac{乙_k}{径_k} + \frac{乙_k^3}{2\cdot 3\,径_k^3} + \frac{3\,乙_k^5}{5\cdot 8\,径_k^5} + \frac{15\,乙_k^7}{7\cdot 48\,径_k^7} + \frac{105\,乙_k^9}{9\cdot 384\,径_k^9}\right)$$

体積の場合と同様にして径除奇除表を使い，偶乗乙表に依りて畳み表面積 S とする．

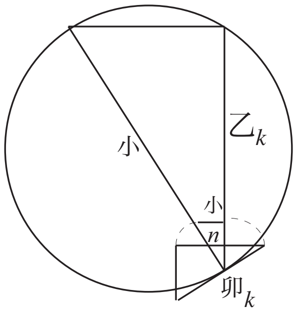
$$S = 2\,小^2\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{3\,極}{4} + \frac{3\cdot 5\,極}{12} + \frac{5^2\cdot 7\,極^3}{8^2} + \frac{7^2\cdot 9\,極^4}{8^2}\right)$$

$$= 2\,小^2\frac{\pi}{4} + \frac{1\cdot 3\,極}{2^2}原数 + \frac{3\cdot 5\,極}{3^2}一差 + \frac{5\cdot 7\,極}{4^2}二差 + \frac{7\cdot 9\,極}{5^2}三差$$



内面積 (問題にはないが解いている)

卯$_k$: $\dfrac{小}{n}$ = 小 : 乙$_k$ より 卯$_k$ = $\dfrac{小^2}{n\,乙_k}$

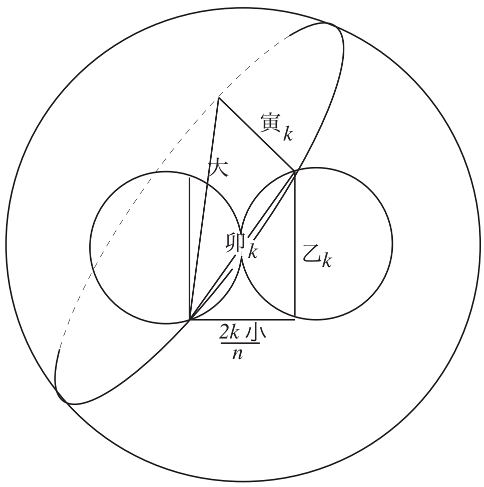


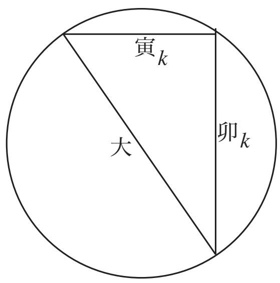
$$矢_k = \frac{2k\,小}{n}$$

$$丑_k^2 = 矢_k^2 + 乙_k^2 = \frac{4k^2小^2}{n^2} + 4\,小^2天\,(1-天) = 4\,天^2小^2 + 4\,小^2天\,(1-天) = 4\,小^2天$$

$$寅_k^2 = 大^2 - 丑_k^2 = 大^2 - 4\,小^2天 = 大^2\left(1 - 4\frac{小^2}{大^2}天\right) = 大^2(1 - 4\,極天)$$

$$寅_k = 大\sqrt{1-極天} = 大\left(1 - \frac{4\,極点}{2} - \frac{4^2極^2天^2}{8} - \frac{3\cdot 4^3極^3天^3}{48} - \cdots\cdots\right)$$





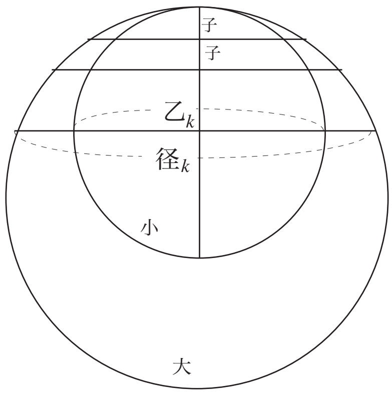
$$T_k = 2\,寅_k卯_k = \frac{2\,大小^2}{n}\left(\frac{1}{乙_k} - \frac{4\,極天}{2\,乙_k} - \frac{4^2極^2天^2}{8\,乙_k} - \cdots\cdots\right)$$

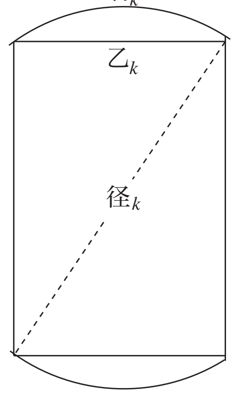
乙除偶乗表によりこれを畳み，内面積 T とする．

$$T = 2\,大小^2\left(\frac{2}{小}\,\frac{\pi}{4} - \frac{4\,極\cdot 2}{2\cdot 2\,小}\,\frac{\pi}{4} - \frac{4^2極^2\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 8\,小}\,\frac{\pi}{4} - \cdots\cdots\right)$$

$$= 大小\pi \left(1 - 極 - \frac{3\,極^2}{2^2} - \frac{3 \cdot 15\,極^3}{6^2} - \frac{15 \cdot 105\,極^4}{24^2} - \cdots\cdots \right)$$

79 球 (大径) に接している円柱 (小径) を穿去するときの穿去積と覓積を求めよ.





$子 = \dfrac{小}{n}$ とする. $帯直弧積 = 乙_k 径_k - \dfrac{乙_k^3}{2 \cdot 3\,径_k} - \dfrac{乙_k^5}{5 \cdot 8\,径_k^3} - \cdots\cdots$
ここで

$$径_k^2 = 4\frac{k}{n}小\left(大 - \frac{k}{n}小\right) = 4\,大小天\,(1 - 率天) \qquad \left(率 = \frac{小}{大}\right)$$

だから $径_k = 2\sqrt{大小}\sqrt{天\,(1 - 率天)} = 2\sqrt{大小}\sqrt{天}\left(1 - \dfrac{率天}{2} - \dfrac{率^2天^2}{8} - \dfrac{3\,率^3天^3}{48} - \cdots\cdots\right)$

$$V_k = 子 \times 帯直弧積 = ㋑\,乙_k 径_k 子 - ㋺\,\frac{乙_k^3}{2 \cdot 3\,径_k}子 - ㋩\,\frac{乙_k^5}{5 \cdot 8\,径_k^3}子 - \cdots\cdots$$

径除奇除表より

$$\text{㋑} = \frac{\text{小}\sqrt{\text{小天}}}{n}\left(2\,\text{乙}_k\sqrt{\text{天}} - \frac{2\,\text{率乙}_k\text{天}\sqrt{\text{天}}}{2} - \frac{2\,\text{率}^2\text{乙}_k\text{天}^2\sqrt{\text{天}}}{8} - \cdots\cdots\right)$$

$$\text{㋺} = \frac{\text{小}\sqrt{\text{小天}}}{n}\left(-\frac{\text{乙}_k^3}{12\,\text{大小}\sqrt{\text{天}}} - \frac{\text{率乙}_k^3\sqrt{\text{天}}}{2\cdot 12\,\text{大小}} - \cdots\cdots\right)$$

$$\text{㋩} = \frac{\text{小}\sqrt{\text{小天}}}{n}\left(-\frac{\text{乙}_k^5}{4\cdot 40\,\text{大}^2\text{小}^2\sqrt{\text{天}}} - \frac{3\,\text{率乙}_k^5}{40\cdot 16\,\text{大}^2\text{小}^2\sqrt{\text{天}}} - \cdots\cdots\right)$$

奇乗乙表および天除乙表によって畳むと

$$\text{㋑} \longrightarrow 16\,\text{小}^2\sqrt{\text{小天}}\left(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{2\,\text{率}}{3\cdot 5\cdot 7} - \frac{\text{率}^2}{5\cdot 7\cdot 9} - \cdots\cdots\right)$$

$$\text{㋺} \longrightarrow 16\,\text{小}^2\sqrt{\text{小天}}\left(-\frac{\text{率}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} - \frac{\text{率}^2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \cdots\cdots\right)$$

$$\text{㋩} \longrightarrow 16\,\text{小}^2\sqrt{\text{小天}}\left(-\frac{\text{率}^2}{5\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \cdots\cdots\right)$$

$$V = 16\,\text{小}^2\sqrt{\text{小天}}\left(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{\text{率}}{2\cdot 3\cdot 7} - \frac{\text{率}^2}{3\cdot 8\cdot 9} - \cdots\cdots\right)$$
$$= \frac{16\,\text{小}^2\sqrt{\text{小天}}}{3\cdot 5} - \frac{5\,\text{率}}{2\cdot 7}\text{原数} - \frac{1\cdot 7\,\text{率}}{4\cdot 6}\text{一差} - \frac{3\cdot 9\,\text{率}}{6\cdot 11}\text{二差} - \frac{5\cdot 11\,\text{率}}{8\cdot 13}\text{三差} - \cdots\cdots$$

穿去覓積

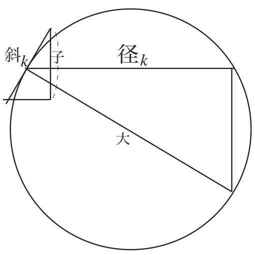
$$\text{背}_k = \text{乙}_k + \frac{\text{乙}_k^3}{2\cdot 3\,\text{径}_k^2} + \frac{3\,\text{乙}_k^5}{5\cdot 8\,\text{径}_k^4} + \frac{15\,\text{乙}_k^7}{7\cdot 48\,\text{径}_k^6} + \frac{105\,\text{乙}_k^9}{9\cdot 384\,\text{径}_k^8}$$

$$\text{斜}_k = \frac{\text{大子}}{\text{径}_k}$$

$$S_k = \text{背}_k\text{斜}_{=}\frac{\text{大小}}{n}\left(\frac{\text{乙}_k}{\text{径}_k} + \frac{\text{乙}_k^3}{2\cdot 3\,\text{径}_k^3} + \frac{3\,\text{乙}_k^5}{5\cdot 8\,\text{径}_k^5} + \frac{15\,\text{乙}_k^7}{7\cdot 48\,\text{径}_k^7} + \frac{105\,\text{乙}_k^9}{9\cdot 384\,\text{径}_k^9}\right)$$

これを奇乗乙表および天除乙表によって畳み，覓積 S とする．

$$S = \text{小}\sqrt{\text{小天}}\left(\frac{2}{3} + \frac{2\,\text{率}}{2\cdot 5} + \frac{2\cdot 3\,\text{率}^2}{7\cdot 8} + \frac{2\cdot 15\,\text{率}^3}{9\cdot 48} + \frac{2\cdot 105\,\text{率}^4}{11\cdot 384}\cdots\cdots\right)$$



ところで，3より

$$弧積 = 弦径\left(\frac{率}{3\cdot 2}+\frac{率^2}{5\cdot 4}+\frac{3\,率^3}{7\cdot 16}+\frac{15\,率^4}{9\cdot 96}\right) \qquad \left(率=\frac{弦^2}{径^2}\right)$$

であるのでこの S は大を円径とし $\sqrt{大小}$ を弦とする弧積の 4 倍であることがわかる.

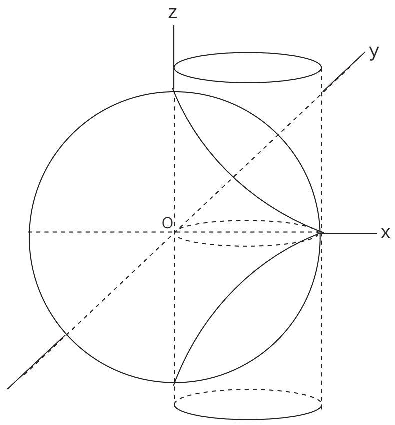
大 $=2$ 小 の場合は　球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱 $x^2+y^2=ax$ の穿去積となる

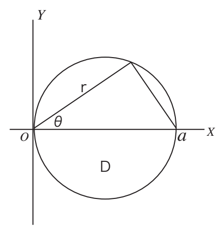
$D: x^2+y^2 \leqq ax$ として

$$V = 2\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと D : $0\leqq r\leqq a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ で与えられる.

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,drd\theta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3(1-|\sin^3\theta|)d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\frac{2}{3}a^3 \\
&= \frac{2}{9}a^3(3\pi-4)
\end{aligned}$$



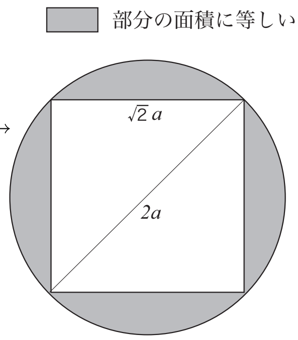


円柱 $x^2+y^2-ax=0$ と球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の覓積を求めると

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ \ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},\ \ \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{z}$$

$$\begin{aligned}
S&=2\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=2\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta\\
&=2a\int_a^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\\
&=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\theta}d\theta\\
&=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)d\theta\\
&=a^2\left[a+\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\pi a^2-2a^2
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$



80 円柱から円錐を穿去したときの面覓積 (円柱の側面が円錐を切り取る部分) を求めよ．円錐の高さは円柱の半径とする．

円柱径 = 大, 円錐径 = 小, $\frac{\text{小}}{n}=\text{子}$ とする．$\text{大}^2+\text{甲}_k^2=\text{丑}^2$ とおくと

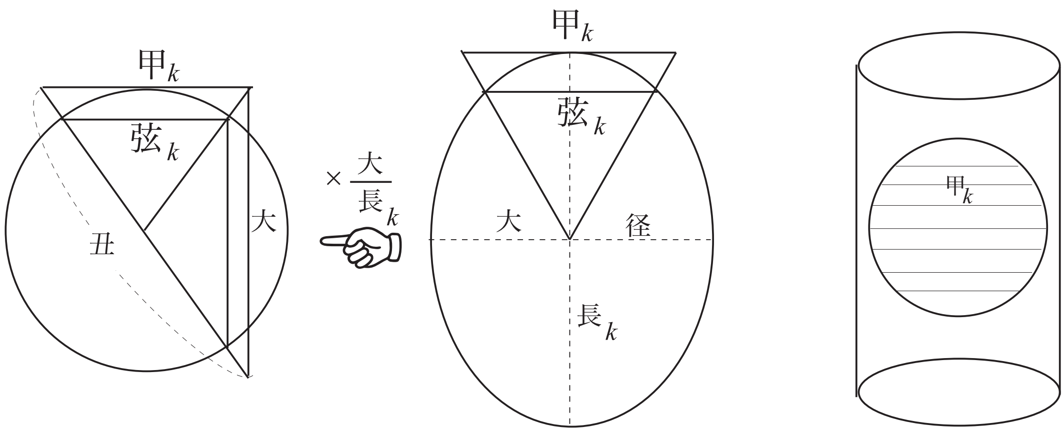
$$\frac{\text{丑}^2}{\text{大}^2}=1+\frac{\text{甲}_k^2}{\text{小}^2}\text{率}\qquad\text{ここで率}=\frac{\text{小}^2}{\text{大}^2}$$

平方綴術に開き

$$\frac{\text{丑}}{\text{大}}=1+\frac{\text{甲}_k^2\text{率}}{2\,\text{小}^2}-\frac{\text{甲}_k^4\text{率}^2}{8\,\text{小}^4}+\frac{3\,\text{甲}_k^6\text{率}^3}{48\,\text{小}^6}-\frac{15\,\text{甲}_8\text{率}^4}{384\,\text{小}^8}$$

よって

$$\frac{\text{大}}{\text{丑}}=1-\frac{\text{甲}_k^2\text{率}}{2\,\text{小}^2}+\frac{3\,\text{甲}_k^4\text{率}^2}{8\,\text{小}^4}-\frac{15\,\text{甲}_k^6\text{率}^3}{48\,\text{小}^6}+\frac{105\,\text{甲}_8\text{率}^4}{384\,\text{小}^8}$$



ところで

$$弦_k = 甲_k \frac{大}{丑}$$

[21]によって $S_k = 弦_k子$ だから

$$S_k = 甲_k子 - \frac{甲_k^3率子}{2\,小^2} + \frac{3\,甲_k^5率^2子}{8\,小^4} - \frac{15\,甲_k^7率^3子}{48\,小^6} + \frac{105\,甲_9率^4子}{384\,小^8}$$

偶乗甲表に依て畳み，面覓積 S とする．

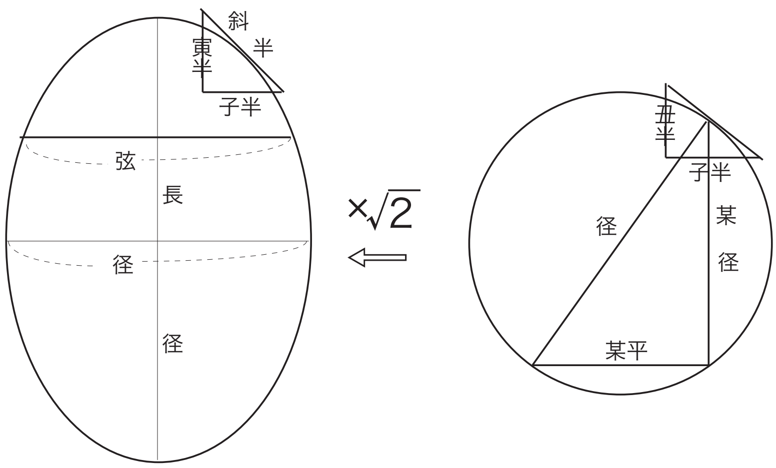
$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4}小^2\left(1 - \frac{3\,率}{2\cdot 4} + \frac{3\cdot 15\,率^2}{8\cdot 4\cdot 6} - \frac{15\cdot 105\,率^3}{48\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{945\cdot 105\,率^4}{384\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}小^2 - \frac{1\cdot 3\,率}{2\cdot 4}原数 + \frac{3\cdot 5\,率}{4\cdot 6}一差 - \frac{5\cdot 7\,率}{6\cdot 8}二差 + \frac{7\cdot 9\,率}{8\cdot 10}三差 - \frac{9\cdot 11\,率}{10\cdot 12}四差 \end{aligned}$$

[81] 円柱 3 箇を互いに垂直に穿去したときの交周長を求めよ．
求める周長は楕円の一部である． $\frac{弦}{n} = 子$ とする． また $弦 = \frac{径}{\sqrt{2}}$，$平_k = 弦天$

$$径_k^2 = 径^2 - 平_k^2 = 径^2 - \left(\frac{径天}{\sqrt{2}}\right)^2 = 径^2\left(1 - \frac{天^2}{2}\right)$$

だから，平方綴術および帰除綴術により

$$\frac{径}{径_k} = 1 + \frac{天^2}{2\cdot 2} + \frac{3\,天^4}{8\cdot 2^2} + \frac{15\,点^6}{48\cdot 2^3} + \frac{105\,天^8}{384\cdot 2^4} + \frac{9\cdot 105\,天^{10}}{3840\cdot 2^5} + \frac{11\cdot 945\,天^{12}}{3840\cdot 12\cdot 2^6}$$



$$丑:子=平_k:径_k \text{ より } 丑=\frac{平_k子}{径_k} \text{ また } \quad 長径=\sqrt{2}径$$

$$寅=丑\cdot\frac{長}{径}$$

とすると

$$斜_k^2=寅^2+子^2=\frac{径^2子^2}{径_k^2}+\frac{径^2子^2天^2}{2\,径_k^2}=\frac{径^2}{径_k^2}\left(1+\frac{天^2}{2}\right)子^2$$

平方綴術に開くと

$$\frac{斜_k}{子}=\frac{径}{径_k}㋑+\frac{径天^2}{2\cdot 2\,径_k}㋺-\frac{径天^4}{8\cdot 2^2径_k}㋩+\frac{3\,径天^6}{48\cdot 2^3径_k}㋥-\frac{15\,径天^8}{384\cdot 2^4径_k}㋭+\frac{105\,径天^{10}}{3840\cdot 2^4径_k}㋬-\frac{945\,径天^{12}}{3840\cdot 12\cdot 2^6径_k}㋣$$

$$㋑=1+\frac{天^2}{2\cdot 2}+\frac{3\,天^4}{8\cdot 2^2}+\frac{15\,天^6}{48\cdot 2^3}+\frac{105\,天^8}{384\cdot 2^4}+\frac{945\,天^{10}}{3840\cdot 2^5}+\frac{11\cdot 945\,天^{12}}{3840\cdot 12\cdot 2^6}$$

$$㋺=\frac{天^2}{4}+\frac{天^4}{2\cdot 2\cdot 4}+\frac{3\,天^6}{8\cdot 2^2\cdot 4}+\frac{15\,天^8}{48\cdot 2^3\cdot 4}+\frac{105\,天^{10}}{384\cdot 2^3\cdot 4}+\frac{945\,天^{12}}{3840\cdot 2^5\cdot 4}$$

$$㋩=-\frac{天^4}{32}-\frac{天^6}{2\cdot 2\cdot 32}-\frac{3\,天^8}{8\cdot 2^2\cdot 32}-\frac{15\,天^{10}}{48\cdot 2^3\cdot 32}-\frac{105\,天^{12}}{384\cdot 2^4\cdot 32}$$

$$㋥=\frac{3\,天^6}{384}+\frac{3\,天^8}{2\cdot 2\cdot 384}+\frac{3^2天^{10}}{8\cdot 2^2\cdot 384}+\frac{3\cdot 15\,天^{12}}{48\cdot 2^3\cdot 384}$$

$$㋭=-\frac{15\,天^8}{384\cdot 16}-\frac{15\,天^{10}}{2\cdot 2\cdot 384\cdot 16}-\frac{3\cdot 15\,天^{12}}{8\cdot 2^2\cdot 384\cdot 16}$$

$$㋬=\frac{105\,天^{10}}{3840\cdot 32}+\frac{105\,天^{12}}{2\cdot 2\cdot 3840\cdot 32}$$

$$㋣ = -\frac{945\,天^{12}}{3840\cdot 12\cdot 64}$$

㋑+㋺+㋩+㋥+㋭+㋬+㋣を天表により畳むと

$$\frac{1}{4}交周\cdot\frac{\sqrt{2}}{径} = 1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{3}{48\cdot 7}+\frac{9}{384\cdot 9}+\frac{9\cdot 5}{3840\cdot 11}+\frac{5\cdot 9\cdot 5}{3840\cdot 12\cdot 13}$$

ゆえに，4 を掛けて，$\sqrt{2}$ を掛けて，2 で割って，$2\sqrt{2}$ を $\sqrt{8}$ に換えて (分母有理化の手順)

$$交周 = \sqrt{8}径+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}原数+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 5}一差+\frac{3\cdot 5}{6\cdot 7}二差+\frac{3\cdot 7}{8\cdot 9}三差+\frac{5\cdot 9}{10\cdot 11}四差+\frac{5\cdot 11}{12\cdot 13}五差$$

82 円柱 (大円径) から円柱 (小円径) を穿去したときの交周の長さを求めよ．

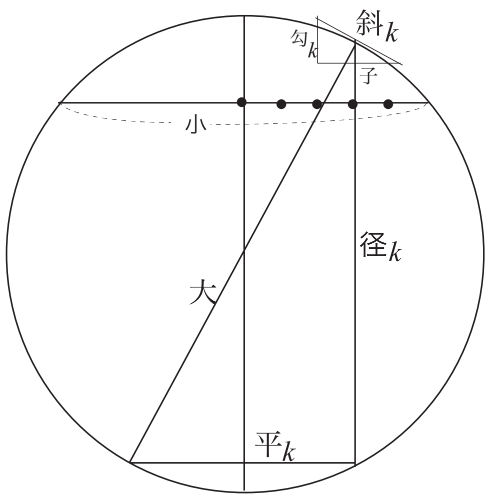
$子 = \dfrac{小}{n}$，$率 = \dfrac{小^2}{大^2}$ とする．

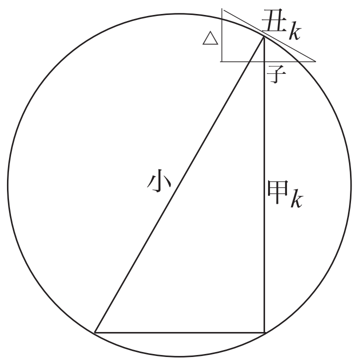
$$平_k = 天小$$

$$径_k = \sqrt{大^2 - 平^2} = \sqrt{大^2 - 天^2小^2} = \sqrt{大^2 - 天^2大^2率}$$

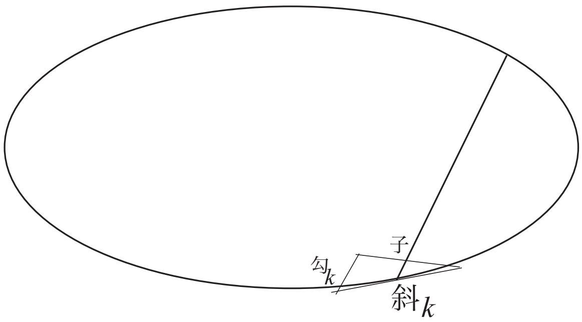
$$平_k : 径_k = 勾_k : 子より勾_k = \frac{平_k子}{径_k} = \frac{小子}{径_k}天$$

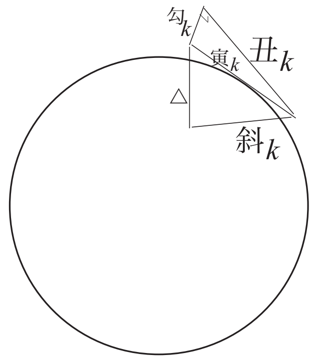
$$小 : 甲_k = 丑_k : 子 \quad より \quad 丑_k = \frac{小\cdot 子}{甲_k}$$





$$
\begin{aligned}
寅^2 &= 丑_k^2 + 勾_k^2 = \frac{小^2子^2}{甲_k^2} + \frac{子^2平_k^2}{径_k^2} \\
&= \frac{小^2子^2}{甲_k^2} + \frac{子^2小^2}{径_k^2}天^2 \\
&= \frac{小^2子^2}{甲_k^2}\left(1 + \frac{甲_k^2}{径_k^2}天^2\right)
\end{aligned}
$$





$$
\begin{aligned}
寅 &= \frac{小子}{甲_k}\left(1 + \frac{甲_k^2}{2\,径_k^2}天^2 - \frac{甲_k^4}{8\,径_k^4}天^4 + \frac{3\,甲_k^6}{48\,径_k^6}天^6 - \frac{15\,甲_k^8}{384\,径_k^8}天^8\right) \\
&= \frac{小子}{甲_k}\text{㋑} + \frac{甲_k小子}{2\,径_k^2}天^2\text{㋺} - \frac{甲_k^3小子}{8\,径_k^4}天^4\text{㋩} + \frac{3\,甲_k^5小子}{48\,径_k^6}天^6\text{㋥} - \frac{15\,甲_k^7小子}{384\,径_k^8}天^8\text{㋭}
\end{aligned}
$$

甲除偶乗より

$$㋑ = \frac{小 \cdot \frac{小}{n}}{甲_k} = \frac{小^2}{甲_k}\frac{1}{n} \longrightarrow 小^2 \cdot \frac{\pi}{2\,小} = \frac{\pi}{2}小$$

偶乗甲表により

$$\begin{aligned}
㋺ &= \frac{甲_k小^2}{2n}天^2\left(\frac{1}{大^2}+\frac{率}{大^2}天^2+\frac{率^2}{大^2}天^4+\frac{率^3}{大^2}天^6\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(率甲_k天^2+率^2甲_k天^4+率^3甲_k天^6+率^4甲_k天^8\right)\\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\left(率\frac{1}{4}\frac{\pi}{4}小+率^2\frac{3}{6\cdot 4}\frac{\pi}{4}小+率^3\frac{5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4}\frac{\pi}{4}小+率^4\frac{7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}\frac{\pi}{4}小\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
㋩ &= \frac{甲_k^3小^2}{8n}天^4\left(\frac{1}{大^4}+\frac{2\,率}{大^4}天^2+\frac{3\,率^2}{大^4}天^4+\frac{4\,率^3}{大^4}天^6\right)\\
&= \frac{1}{8n}\frac{小^2}{大^4}\left(甲_k^3天^4+2\,率甲_k^3天^6+3\,率^2甲_k^3天^8+4\,率^3甲_k^3天^{10}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \frac{1}{8}\frac{小^2}{大^4}\Bigg(&\frac{8\cdot 6\cdot 4}{3\cdot 3}\frac{\pi}{4}小^3+2\,率\frac{3\cdot 3\cdot 5}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}\frac{\pi}{4}小^3+3\,率^2\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{12\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}\frac{\pi}{4}小^3\\
&+4\,率^3\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{14\cdot 12\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}\frac{\pi}{4}小^3\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\times ㋺ &= \frac{小\pi}{4}\left(\frac{率}{4}+\frac{3}{6\cdot 4}率^2+\frac{5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4}率^3+\frac{7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}率^4\right)\\
&= \frac{小\pi}{4}\frac{(1-\sqrt{1-率})^2}{率} \qquad (注\ 1) \qquad 極 = \frac{(1-\sqrt{1-率})^2}{率}\ と置く\\
&= \frac{小\pi}{4}極
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\times ㋩ &= \frac{3\pi}{8^2}小\left(\frac{3}{8\cdot 6}率^2+\frac{5\cdot 3\cdot 2}{10\cdot 8\cdot 6}率^3+\frac{15\cdot 7\cdot 3}{12\cdot 10\cdot 8\cdot 6}率^4+\frac{105\cdot 9\cdot 4}{14\cdot 12\cdot 10\cdot 8\cdot 6}率^5\right)\\
&= \frac{3\pi}{8^2}小極^2 \quad (注\ 2)
\end{aligned}$$

$$2\times ㊁ = \frac{3\cdot 15\pi}{48^2}小極^3$$

よって

$$\begin{aligned}
交周 &= ㋑+㋺-㋩+㊁-㋭\\
&= 小\pi+\frac{\pi}{2^2}小極-\frac{3\pi}{8^2}小極^2+\frac{3\cdot 15\pi}{48^2}小極^3\\
&= 小\pi+\frac{極}{2^2}原数-\frac{1\cdot 3\,極}{4^2}一差+\frac{3\cdot 5\,極}{6^2}二差-\frac{5\cdot 7\,極}{8^2}三差+\frac{7\cdot 5\,極}{10^2}四差\cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

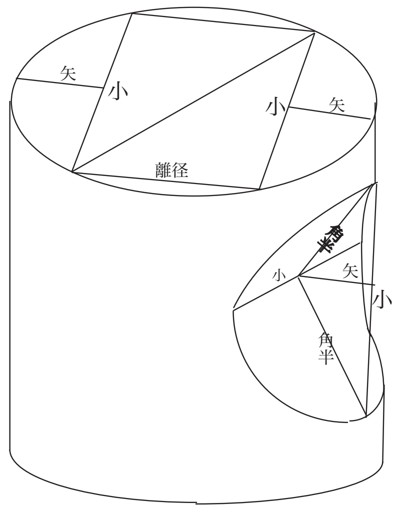
ところで,

$$\sqrt{1-率} = \sqrt{1-\frac{小^2}{大^2}} = \frac{\sqrt{大^2-小^2}}{大} = \frac{離径}{大} = \frac{大-2\,矢}{大} = 1-\frac{2\,矢}{大}$$

$$(1-\sqrt{1-率})^2 = \left(\frac{2\,矢}{大}\right)^2 = \frac{4\,矢^2}{大^2}$$

$$極 = \frac{(1-\sqrt{1-率})^2}{率} = \frac{\frac{4\,矢^2}{大^2}}{\frac{小^2}{大^2}} = \frac{4\,矢^2}{小^2}$$

よって，① は $\sqrt{4\,矢^2+小^2}$ を長径，小径を短径とする楕円の周長と同じである．



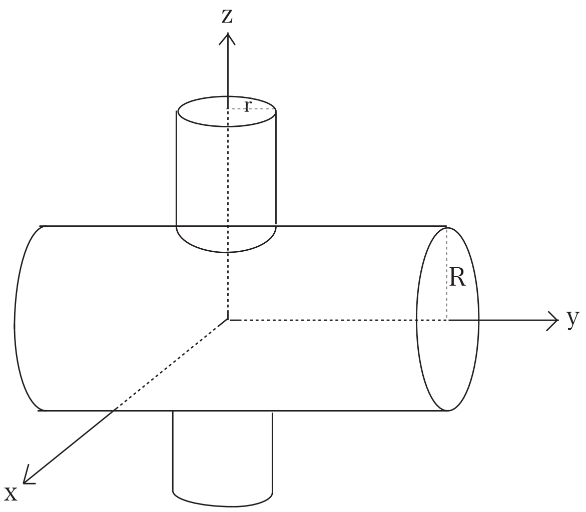
(注 1)

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{1-率})^2 &= 1-2\sqrt{1-率}+1-率\\ &= 2-率-2\sqrt{1-率}\\ &= 2-率-2\left(1-\frac{率}{2}-\frac{率^2}{4\cdot 2}-\frac{3}{6\cdot 8}率^3-\frac{5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}率^4-\frac{7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}率^5\right)\\ &= \frac{率^2}{4}+\frac{3}{6\cdot 4}率^3+\frac{5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4}率^4+\frac{7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}率^5\end{aligned}$$

(注 2)

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{1-率})^4 &= (2-率-2\sqrt{1-率})^2\\ &= 8-8\,率+率^2-8\sqrt{1-率}+4\,率\sqrt{1-率}\\ &= 8-8\,率+率^2-8\left(1-\frac{率}{2}-\frac{率^2}{4\cdot 2}-\frac{3}{6\cdot 8}率^3-\frac{5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}率^4-\frac{7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}率^5\right)\\ &\quad +4\,率\left(1-\frac{率}{2}-\frac{率^2}{4\cdot 2}-\frac{3}{6\cdot 8}率^3-\frac{5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}率^4-\frac{7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}率^5\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8\cdot 6}率^4 + \frac{5\cdot 3\cdot 2}{10\cdot 8\cdot 6}率^5 + \frac{15\cdot 7\cdot 3}{12\cdot 10\cdot 8\cdot 6}率^6$$



現代解　$R = \frac{大}{2},\ r = \frac{小}{2}$ として円柱を $x^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2=r^2$ とする．

$$y = \sqrt{r^2-x^2},\ z = \sqrt{R^2-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}},\ \frac{dz}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

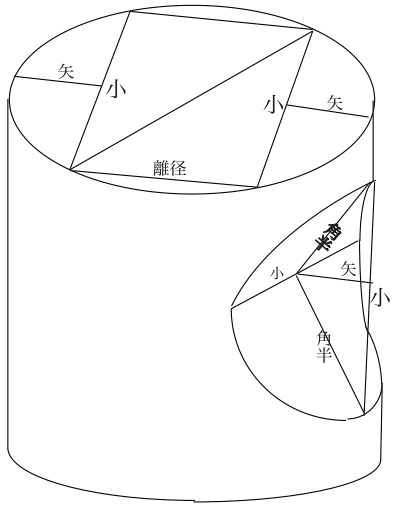
$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} &= \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}+\frac{x^2}{R^2-x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{r^2R^2-x^4}{(r^2-x^2)(R^2-x^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{x^4}{r^2R^2}}{\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)}}\end{aligned}$$

$\frac{x}{r} = t$ とおくと

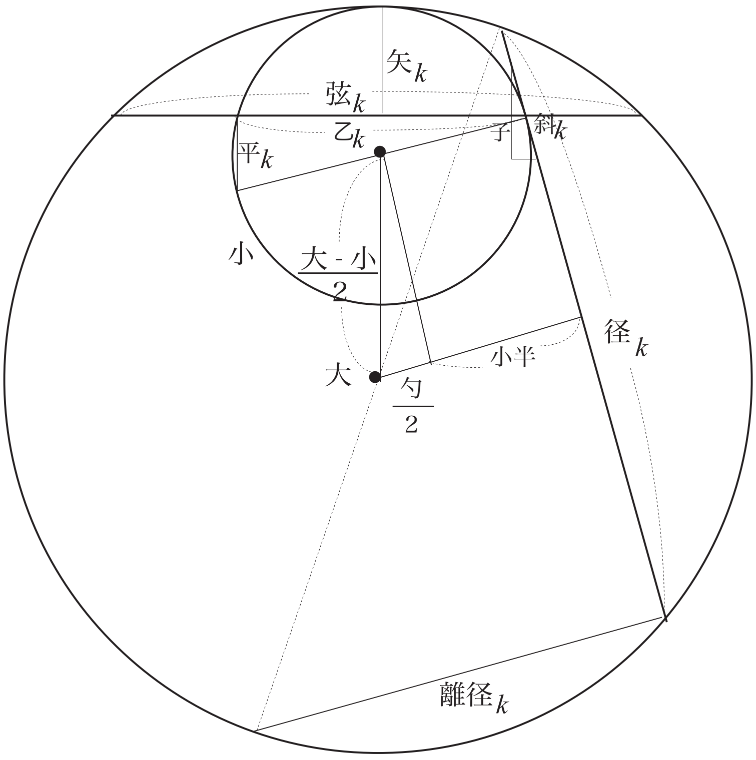
$$\begin{aligned}交周 = \int_0^r \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx &= r\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\frac{r^2}{R^2}t^4}{(1-t^2)\left(1-\frac{r^2}{R^2}t^2\right)}}\,dt \\ &= r\int_0^1 \sqrt{\frac{1-kt^4}{(1-t^2)(1-kt^2)}}\,dt\end{aligned}$$

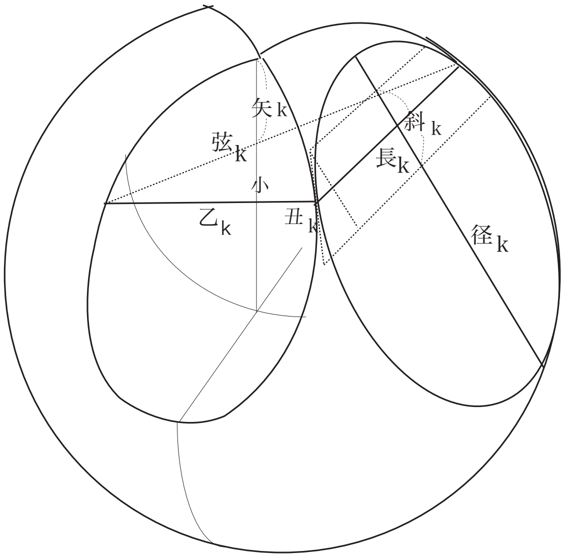
82 は $\sqrt{4矢^2+小^2}$ を長径，小径を短径とする楕円の周長と同じであった．従って，84の交周は

$A=\sqrt{\dfrac{R^2-R\sqrt{R^2-4r^2}}{2}}$, $B=r$ とするとき 楕円 $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ の周長に同じである．



83 球 (大径) から円 (小径) を穿去する．円は球に接している．交周を求めよ．
子 $=\dfrac{\text{小}}{n}$, 矢$_k$ = 小天 とする．





$$乙_k^2 = 4\,小矢_k - 4\,矢_k^2$$

$$弦_k^2 = 4\,大矢_k - 4\,矢_k^2$$

$$長_k^2 = 弦_k^2 - 乙_k^2 = 4(大 - 小)\,矢_k = 4(大 - 小)\,小天$$

$$\therefore\quad 長_k = 2\sqrt{大 - 小}\sqrt{小}\sqrt{天}$$

$$平_k = 小 - 2\,矢_k = 小\,(1 - 2\,天)$$

$小 : 平_k = (大 - 小) : 勺$ より

$$勺 = \frac{(大 - 小)\,平_k}{小} = (大 - 小)(1 - 2\,天)$$

$$離径_k = 勺 + 小 = 大 - 2(大 - 小)\,天$$

$$径_k^2 = 大^2 - 離径_k^2 = 4(大 - 小)\,大天 - 4(大 - 小)^2天^2$$

$$\frac{径_k^2}{大\,(大 - 小)} = 4\,天 - 4\,率天^2 \qquad \left(率 = \frac{大 - 小}{大}\right)$$

これを平方綴術に開き

$$\frac{径_k}{2\sqrt{大\,(大 - 小)\,天}} = 1 - \frac{率天}{2} - \frac{率^2天^2}{8} - \frac{3\,率^3天^3}{48} - \frac{15\,率^4天^4}{384}$$

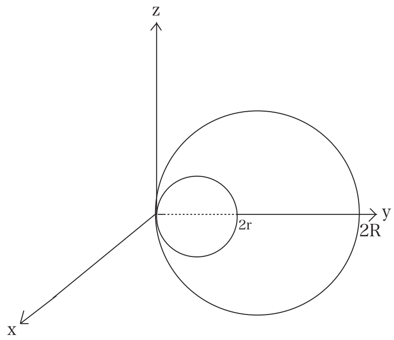
$$斜_k = \frac{小子}{乙_k},\ 丑_k = \frac{斜_k径_k}{長_k}$$

$$丑_k = \sqrt{大小}\left\{\frac{子}{乙_k} - \frac{率天子}{2\,乙_k} - \frac{率^2天^2子}{8\,乙_k} - \frac{3\,率^3天^3子}{48\,乙_k} - \frac{15\,率^4天^4子}{384\,乙_k}\right\}$$

乙除偶乗表にてこれを畳む倍して

$$交周 = \sqrt{大小}\pi\left\{1 - \frac{率}{2^2} - \frac{3\,率^2}{8^2} - \frac{3\cdot 15\,率^3}{48^2} - \frac{15\cdot 105\,率^4}{384^2}\right\}$$

この交周は $\sqrt{大小}$ を長径，小を短径とする楕円周に等しい．



現代解

$$球：x^2 + (y - \frac{大}{2})^2 + z^2 = \left(\frac{大}{2}\right)^2$$

$$円柱：\left(y - \frac{小}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{小}{2}\right)^2$$

とすると

$$交周/2 = L = \int_0^{小} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dy$$

円柱より

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-2y + 小}{2\sqrt{-y^2 + 小\,y}}$$

球と円柱から z を消去して，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{大 - 小}}{2\sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{小} \sqrt{1 + \frac{大 - 小}{4y} + \frac{(-2y + 小)^2}{4(-y^2 + 小\,y)}}\,dy \\ &= \int_0^{小} \sqrt{1 + \frac{\frac{大}{小} - 1}{4\frac{y}{小}} + \frac{\left(-2\frac{y}{小} + 1\right)^2}{4\frac{y}{小}\left(1 - \frac{y}{小}\right)}}\,dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{\frac{大}{小} - 1}{4t} + \frac{(-2t+1)^2}{4t(1-t)}} 小\, dt \qquad \left(\frac{y}{小} = t\right)$$

$$= \frac{\sqrt{大小}}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+kt}{t(1-t)}}\, dt \qquad \left(k = \frac{小}{大} - 1\right)$$

$$= \sqrt{大小} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+ku^2}{1-u^2}}\, du \qquad (t = u^2)$$

楕円 $\frac{x^2}{\frac{大小}{4}} + \frac{y^2}{\frac{小^2}{4}} = 1$ の周長を求めると

$$y = \frac{小}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{\frac{大小}{4}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{大\sqrt{1 - \frac{x^2}{\frac{大小}{4}}}}$$

$$周長/2 = 2\int_0^{\frac{\sqrt{大小}}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

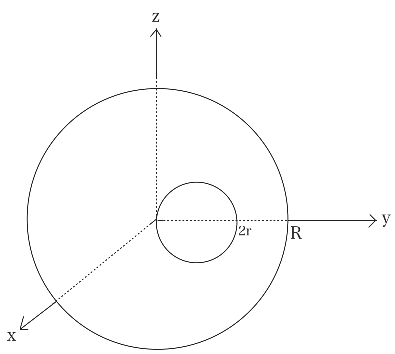
$$= 2\sqrt{\frac{大}{2}\frac{小}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{大小}}{2}} \sqrt{\frac{\frac{大小}{4} + \left(\frac{小}{大} - 1\right)x^2}{\frac{大^2小^2}{16} - \frac{大小}{4}x^2}}\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{大}{2}\frac{小}{2}}} \int_0^{\frac{\sqrt{大小}}{2}} \sqrt{\frac{\frac{大}{2}\frac{小}{2} + kx^2}{1 - \frac{x^2}{\frac{大}{2}\frac{小}{2}}}}\, dx \qquad \left(k = \frac{小}{大} - 1\right)$$

$$= \sqrt{大小} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+ku^2}{1-u^2}}\, du \qquad \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{大}{2}\frac{小}{2}}} = u\right)$$

よってこの周長は L に等しい.

84 球 (大径) から二つの接する等円 (小径) を穿去したときの交周を求めよ.



この交周は82の交周と同じである.

$$\text{球}：x^2+y^2+z^2=\left(\frac{\text{大}}{2}\right)^2$$

$$\text{円柱}：z^2+\left(y-\frac{\text{小}}{2}\right)=\left(\frac{\text{小}}{2}\right)$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{-y+\frac{\text{小}}{2}}{\sqrt{\text{小}\,y-y^2}}$$

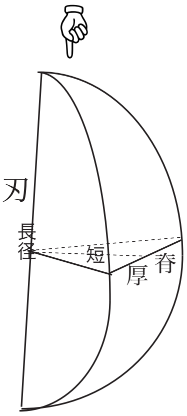
球と円柱から z を消去して $x=\sqrt{\left(\frac{\text{大}}{2}\right)-\text{小}\,y}$

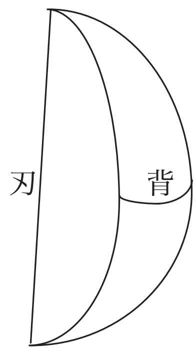
$$\frac{dx}{dy}=\frac{-\text{小}}{2\sqrt{\left(\frac{\text{大}}{2}\right)-\text{小}\,y}}$$

$$\begin{aligned}
\text{交周}&=2\int_0^{\text{小}}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dy\\
&=\int_0^{\text{小}}\sqrt{\frac{-4\,\text{小}^2y^2+\text{大}^2\text{小}^2}{(\text{大}^2-4\,\text{小}\,y)(\text{小}\,y-y^2)}}\,dy\\
&=\int_0^{\text{小}}\sqrt{\frac{4\,\text{小}^2}{\text{大}^2-4\,\text{小}\,y}+\frac{\text{小}^2}{\text{小}\,y-y^2}}\,dy\\
&=\int_0^{\text{小}}\sqrt{\frac{1}{\frac{\text{大}^2}{4\,\text{小}^2}-\frac{y}{\text{小}}}+\frac{1}{\frac{y}{\text{小}}-\left(\frac{y}{\text{小}}\right)}}\,dy\\
&=\text{小}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{\frac{\text{大}^2}{4\,\text{小}^2}-t}+\frac{1}{t-t^2}}\,dt \qquad \left(\frac{y}{\text{小}}=t\right)\\
&=\text{小}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{\frac{\text{大}^2}{4\,\text{小}^2}-u^2}+\frac{1}{u^2-u^4}}\,2u\,du \qquad \left(\sqrt{t}=u\right)\\
&=2\,\text{小}\int_0^1\sqrt{\frac{u^2}{\frac{\text{大}^2}{4\,\text{小}^2}-u^2}+\frac{1}{1-u^2}}\,du\\
&=2\,\text{小}\int_0^1\sqrt{\frac{1-ku^4}{(1-u^2)(1-ku^2)}}\,du \qquad \left(k=\frac{4\,\text{小}^2}{\text{大}^2}\right)\\
&=2\,\text{小}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{1-u^2}\left\{1+\frac{ku^2(1-u^2)}{1-ku^2}\right\}}\,du
\end{aligned}$$

85 楕円櫛形 (刃は長径，幅は短半径) の脊覚積を求めよ.

本問はこちら





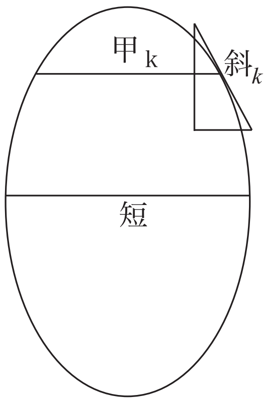
5で求めたように，$子=\dfrac{短}{n}$, $丑=\dfrac{長}{n}$ として

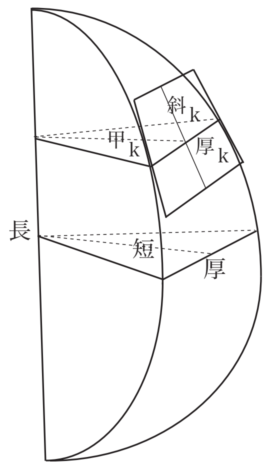
$$斜_k=\frac{長短}{n}\left(\frac{1}{甲_k}-\frac{率天^2}{2\,甲_k}-\frac{率^2天^4}{8\,甲_k}-\frac{3\,率^3天^6}{48\,甲_k}-\frac{15\,率^4天^8}{384\,甲_k}\right)$$

ここで，$率=1-\dfrac{短^2}{長^2}$

$短:厚=甲_k:厚_k$ より $厚_k=\dfrac{厚\cdot甲_k}{短}$

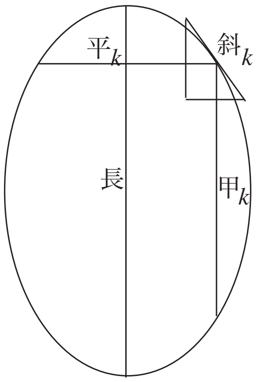
$$\begin{aligned}某覓積\ S_k &= 斜_k\cdot厚_k=\frac{長厚}{n}\left(1-\frac{率天^2}{2}-\frac{率^2天^4}{8}-\frac{3\,率^3天^6}{48}-\frac{15\,率^4天^8}{384}\right)\\ &\longrightarrow 長厚\left(1-\frac{率}{3\cdot2}-\frac{率^2}{5\cdot8}-\frac{3\,率^3}{7\cdot48}-\frac{15\,率^4}{9\cdot484}\right)\\ &= 長厚-\frac{率}{2\cdot3}原数-\frac{1\cdot3\,率}{4\cdot5}一差-\frac{3\cdot5\,率}{6\cdot7}二差-\frac{5\cdot7\,率}{8\cdot9}三差-\frac{7\cdot9\,率}{10\cdot11}四差\end{aligned}$$





別術

長短径を入れ替える．



$$斜_k = \frac{長短}{n}\left(\frac{1}{甲_k} - \frac{率天^2}{2\,甲_k} - \frac{率^2天^4}{8\,甲_k} - \frac{3\,率^3天^6}{48\,甲_k} - \frac{15\,率^4天^8}{384\,甲_k}\right)$$

ただし，$率 = \dfrac{長^2}{短^2} - 1$

$平_k = 短天$，$厚_k = \dfrac{厚平_k}{短}$ だから

$$\begin{aligned} 某覓積\ S_k = 斜_k厚_k &= \frac{長短厚}{n}\left(\frac{天}{甲_k} - \frac{率天^3}{2\,甲_k} - \frac{率^2天^5}{8\,甲_k} - \frac{3\,率^3天^7}{48\,甲_k} - \frac{15\,率^4天^9}{384\,甲_k}\right) \\ &\longrightarrow 短厚\left(1 + \frac{率}{3} - \frac{率^2}{15} + \frac{3\,率^3}{105} - \frac{15\,率^4}{945}\right) \\ &= 短厚 + \frac{率}{3}原数 - \frac{率}{5}一差 + \frac{3\,率}{7}二差 - \frac{5\,率}{9}三差 + \frac{7\,率}{11}四差 \end{aligned}$$

別術の方が乗除の歩みは簡潔であるが，率 > 1 のときは前術を用ふべし．

86 回転楕円体 (ラグビーボール) の表面積を求めよ．

$y = f(x)$ を x 軸の周りに一回転してできる側面積 S は

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geqq b)$ の場合 $y\prime = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$

$$\begin{aligned} S &= 4\pi\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - 率\,x^2}dx \\ &= 4\pi ab\int_0^1 \sqrt{1 - 率\,t^2}dt \qquad (1) \\ &= 4\pi ab\int_0^\theta \sqrt{1 - \sin^2\theta}\frac{1}{\sqrt{率}}\cos\theta d\theta \qquad \left(t = \frac{1}{\sqrt{率}}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi ab\int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{率}}\cos^2 d\theta \\
&= 4\pi ab\int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{率}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= 4\pi ab\frac{1}{2\sqrt{率}}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\theta} \\
&= \frac{2\pi ab}{\sqrt{率}}(\sin^{-1}\sqrt{率} + \sqrt{率}\sqrt{1-率}) \\
&= 2\pi b^2 + 2\pi ab\frac{\sin^{-1}\sqrt{率}}{\sqrt{率}}
\end{aligned}
$$

求積通考は (1) を級数展開し，項別積分したもの．

85で 厚 $= \dfrac{短\pi}{n}$ として

$$
S = 長短\pi - \frac{率}{2\cdot 3}原数 - \frac{1\cdot 3\,率}{4\cdot 5}一差 - \frac{3\cdot 5\,率}{6\cdot 7}二差 - \frac{5\cdot 7\,率}{8\cdot 9}三差 - \frac{7\cdot 9\,率}{10\cdot 11}四差
$$

別術

85の別術で，長短入れ替えて 率 $= \dfrac{長^2}{短^2} - 1$ とする．

$$
S = 短^2\pi + \frac{率}{3}原数 - \frac{率}{5}一差 + \frac{3\,率}{7}二差 - \frac{5\,率}{9}三差 + \frac{7\,率}{11}四差
$$

87 楕円を短軸の回りに一回転したときの表面積を求めよ．

86の別術で長短入れ替えて，率 $= 1 - \dfrac{短^2}{長^2}$ として

$$
矮立円覔積 = 長^2\pi - \frac{率}{3}原数 - \frac{率}{5}一差 - \frac{3\,率}{7}二差 - \frac{5\,率}{9}三差 - \frac{7\,率}{11}四差
$$

算法求積通考巻之四終