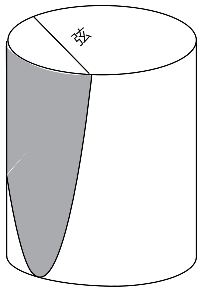
算法求積通考巻之三

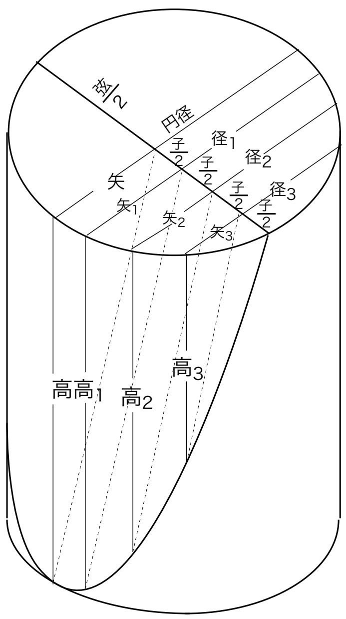
長谷川善左衛門弘閲

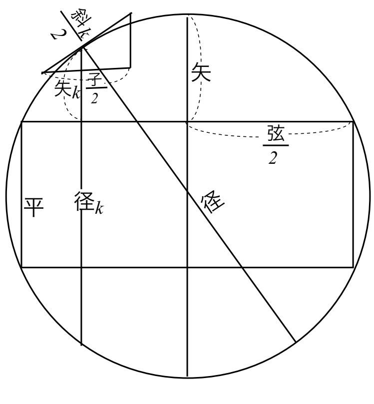
彦根藩　内田半吾久命編

$\boxed{36}$ 円柱を図のように斜めに切断するときの黒覓積と截積を求めよ．円径と高と弦が与えられているとする．



子 $= \dfrac{弦}{n}$ とする．平 $= \sqrt{径^2 - 弦^2}$，2 矢 $=$ 径 $-$ 平





$$矢_k = \frac{径_k}{2} - \frac{平}{2}$$

$$高_k = \frac{高}{矢}矢_k = \frac{径_k高}{2\,矢} - \frac{平\cdot高}{2\,矢}$$

$$S_k = 高_k斜_k = \frac{径_k斜_k高}{2\,矢} - \frac{斜_k平\cdot高}{2\,矢} = \frac{径\cdot高\cdot子}{2\,矢} - \frac{斜_k平\cdot高}{2\,矢}$$

これを畳んで黒覓積 S とする[1)]．

$$S = \frac{径弦高}{2\,矢} - \frac{弧背\cdot平\cdot高}{2\,矢}$$

$径_k{}^2 = 径^2 - 弦^2天^2$

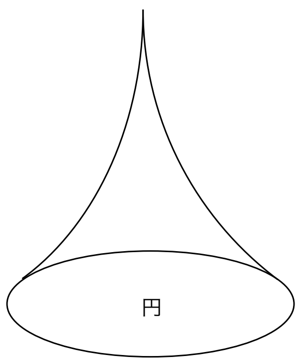
$$
\begin{aligned}
V_k &= \frac{矢_k高_k子}{2} \\
&= \frac{径_k{}^2高子}{8\,矢} - \frac{2\,径_k{}^2平高子}{8\,矢} + \frac{平^2高子}{8\,矢} \\
&= \frac{2\,径^2高子}{8\,矢} - \frac{弦^2天^2高子}{8\,矢} - \frac{弦^2高子}{8\,矢} - \frac{2\,径_k平高子}{8\,矢}
\end{aligned}
$$

これを畳んで截積 V とする[2)].

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{径^2弦高}{4\,矢} - \frac{2\,弦^3高}{12\,矢} - \frac{帯直弧積\cdot高\cdot平}{4\,矢} \qquad \boxed{帯直弧積=2\,弧積+平弦} \\
&= \frac{径^2弦高}{4\,矢} - \frac{2\,弦^3高}{12\,矢} - \frac{2\,弧積\cdot高\cdot平}{4\,矢} - \frac{平^2弦高}{4\,矢} \\
&= \frac{弦^3高}{12\,矢} - \frac{2\,弧積\cdot高\cdot平}{4\,矢} \qquad \boxed{2\,弧積 = \frac{弧背\cdot径 - 平\cdot弦}{2}} \\
&= \frac{弦^3高}{12\,矢} - \frac{弧背\cdot径\cdot平\cdot高}{8\,矢} + \frac{平^2弦高}{8\,矢} \\
&= \frac{径^2高弦}{8\,矢} - \frac{弧背\cdot径\cdot平\cdot高}{8\,矢} - \frac{弦^3高}{24\,矢} \\
&= \frac{径}{4}S - \frac{弦^3高}{24\,矢}
\end{aligned}
$$

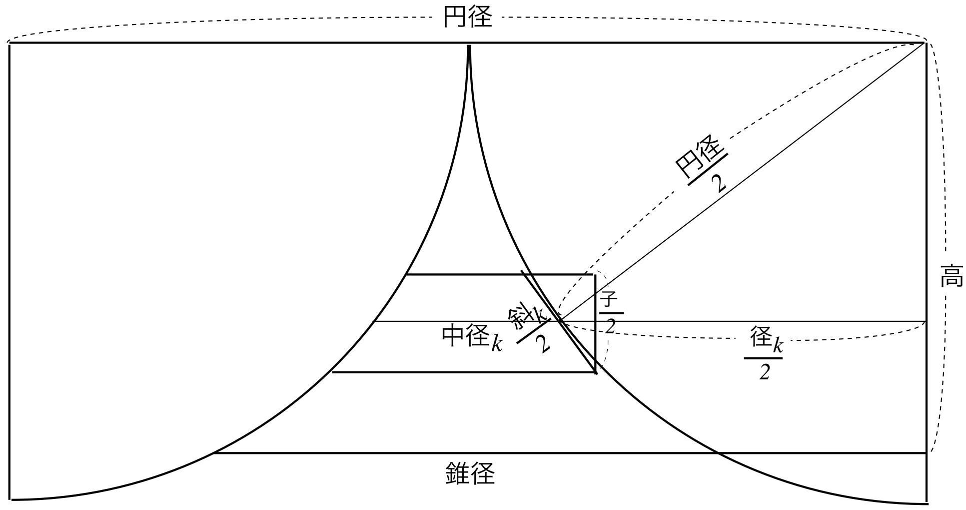
注 1) 子を畳むと弦となる．$斜_k$ を畳むと弧背になる．弧背の求め方は立表第九にあるので，ここでは弧背を使った答にしてある．
注 2) 子を畳んで弦，$天^2子$ を畳んで $\dfrac{1}{3}$，$径_k子$ を畳んで帯直弧積となる．帯直弧積は立表第九にある．

$\boxed{37}$ 図のような減弧錐[1)] がある．錐径[2)] と高さが与えられているとき，側面積を求めよ．



$弦 = 2\,高$，$2\,円径 = \dfrac{4\,高^2}{錐径} + 錐径$[3)] とし，$子 = \dfrac{弦}{n}$ とする．$中径_k = 径 - 径_k$，$周_k = 中径_k\pi$

$$
S_k = \frac{1}{2}周_k斜_k = \frac{斜_k径\pi}{2} - \frac{径_k斜_k\pi}{2} = \frac{斜_k径\pi}{2} - \frac{径子\pi}{2}
$$



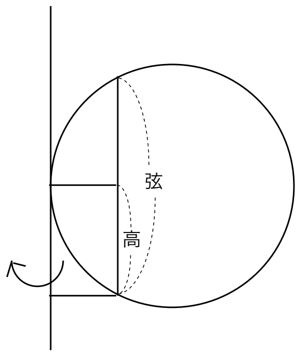
これを畳んで側面積 S とする．

$$S = \frac{径 \cdot 弧背\pi}{2} - \frac{径弦\pi}{2}$$

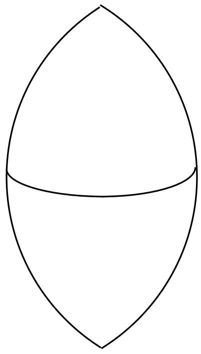
注 1) 母線が円弧になっているような錐．

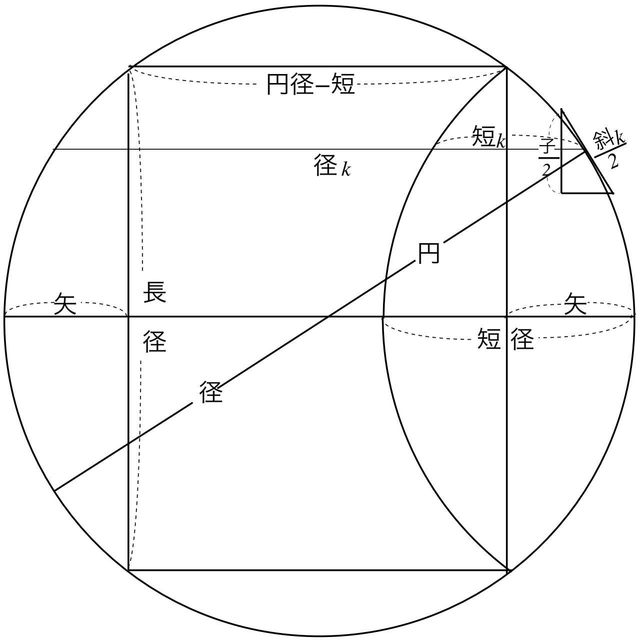
注 2) 底面の円の直径のこと．

注 3) 母線の円の直径を円径とする．



$\boxed{38}$ 図のような両弧立円[1] がある．長径と短径[2] が与えられているとき，覓積 (側面積) を求めよ．





子 $=\dfrac{\text{長径}}{n}$ とする．短$_k$ = 径$_k$ − (円径 − 短)，周$_k$ = 短$_k\pi$

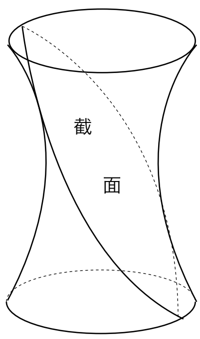
$$S_k = \text{周}_k\text{斜}_k = \text{径}_k\text{斜}_k\pi - (\text{円径} - \text{短})\,\text{斜}_k\pi = \text{円径}\cdot\text{子}\pi - (\text{円径} - \text{短})\,\text{斜}_k\pi$$

これを畳んで覚積 V とする[3]．

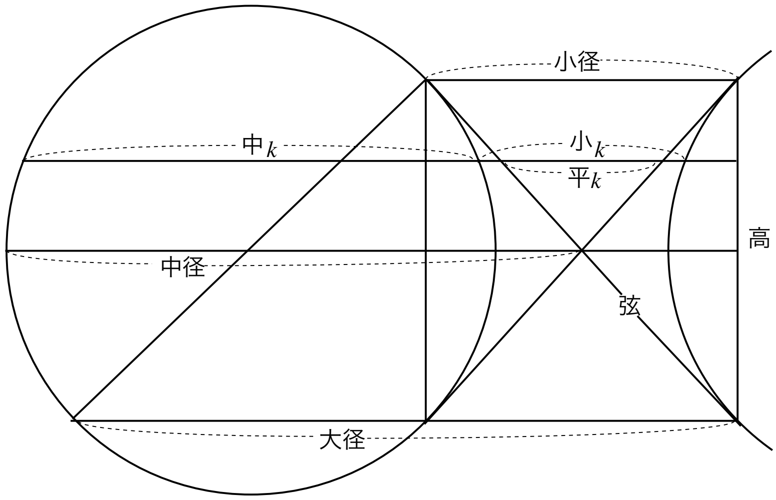
$$V = \text{円径}\cdot\text{長径}\pi - (\text{円径} - \text{短})\,\text{弧背}\pi$$

注 1) 円弧と弦で囲まれた部分を弦の回りに 1 回転させた立体．
注 2) 弦が長径で，矢の 2 倍が短径である．
注 3) 子を畳んで弦，斜$_k$ を畳んで弧背となる．この弧背は長径を弦とし，短径の半分を矢とする円弧である．

$\boxed{39}$ 図のような減弧柱[1] を斜めに切るとき，断面積の最小値を求めよ．柱径と高さが与えられているとする．

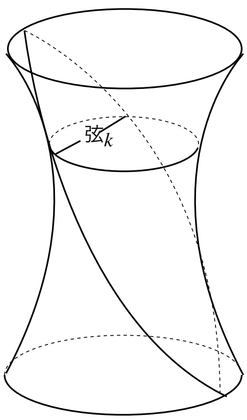


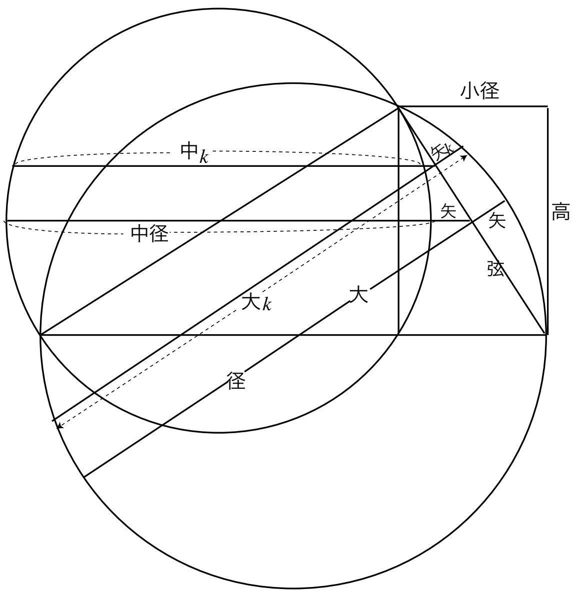
一対の子午線に内側から接する平面で切断するとき，断面積が最小で，その切り口が円になる[2]．



子 $=\dfrac{高}{n}$，中$_k{}^2=$ 中$^2-$ 天^{2}高^2，小$_k=$ 大 $-$ 中$_k$，平$_k=$ 天小 とする．

弦$_k{}^2=$ 小$_k{}^2-$平$_k{}^2=($大$-$中$_k)^2-$天^{2}小$^2=$ 大$^2-2$ 大$\cdot$中$_k+$中$^2-$天^{2}高$^2-$天^{2}小$^2=$ 大$^2-2$ 大$\cdot$中$_k+$中$^2-$天^{2}弦^2





大 : 大$_k=$ 中 : 中$_k$ となるように 大$_k$ を定義すると，

$$弦_k{}^2=大^2-2\,中\cdot大_k+中^2-天^2弦^2=大_k{}^2-2\,中\cdot大_k+中^2$$

$$\therefore\quad 弦_k=大_k-中$$

これは 2 矢$_k$ と同じであるから截面半は円弧であり，その直径は大径である．

ゆえに, 求める面積は $\dfrac{高^2+柱径^2}{柱径}$ を直径, $\sqrt{高^2+柱径^2}$ を弦とする円弧の面積を 2 倍したものである．

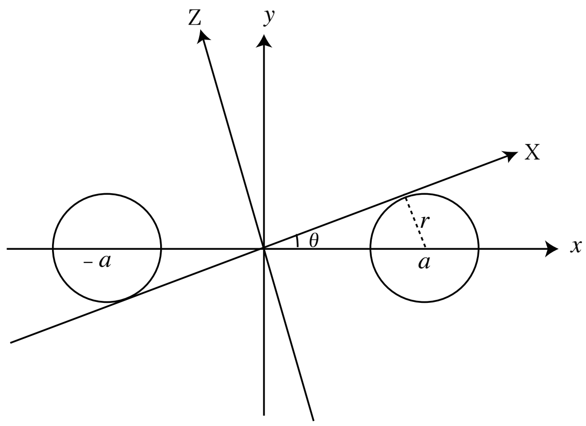
注 1) 円柱の側面が円弧になったもので，トーラスの穴の部分.

注 2) この円を Villarceau の円という．xyz 座標でのトーラス T の方程式を

$$T : (a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$$

とかく．次のような新たな座標系 $(X,\ Y,\ Z)$ を導入する.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$



$$(a - \sqrt{(X\cos\theta - Z\sin\theta)^2 + Y^2})^2 + (X\sin\theta + Z\cos\theta)^2 = r^2$$

このトーラスの XY 平面での切り口を求めるために，$Z = 0$ とおくと

$$(X^2 + Y^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(X^2\cos^2\theta + Y^2)$$

$\cos^2\theta = \dfrac{a^2 - r^2}{a^2}$ を代入して

$$(X^2 + Y^2 + r^2 - a^2)^2 - 4r^2Y^2 = 0$$

$$\{X^2 + (Y - r)^2 - a^2\}\{X^2 + (Y + r)^2 - a^2\} = 0$$

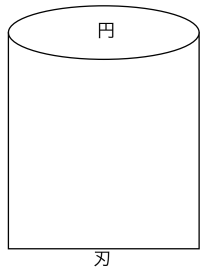
よって，トーラス T の XY 平面での切り口は次の 2 円 C_1，C_2 となる.

$$C_1 : X^2 + (Y - r)^2 = a^2, \quad C_2 : X^2 + (Y + r)^2 = a^2$$

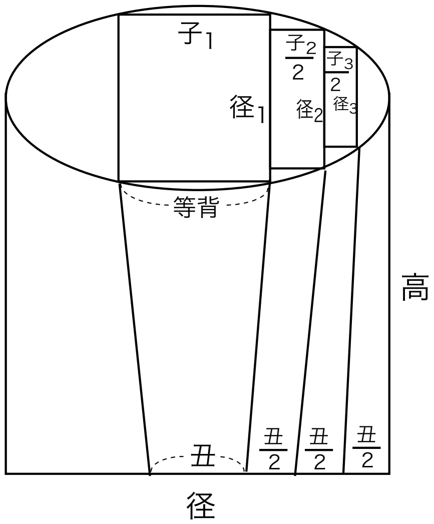
この 2 円 C_1，C_2 を Villarceau の円[*1]という．なお本算題については数理解析研究所講究録 [3] に詳しい.

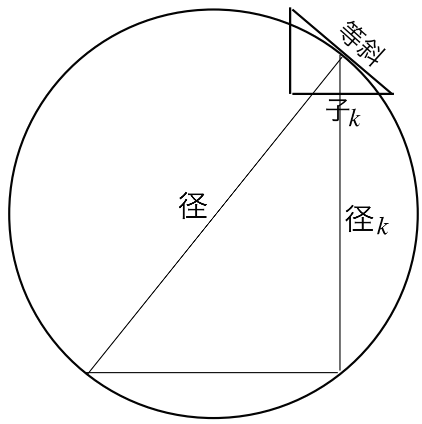
$\boxed{40}$ 図のような正形円楔[1)](円径と刃が等しい) がある．円径と高さが与えられたとき体積を求めよ.

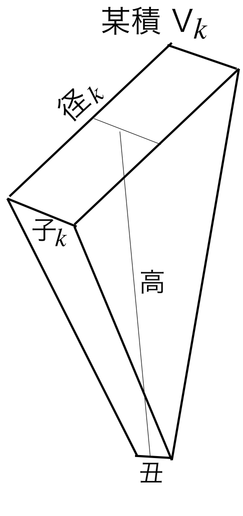
[*1] Antoine Joseph Francois Yvon Villarceau (1813-1889), *Comptes rendus*, 1848



$等背 = \dfrac{円周}{2n}$ とする． $丑 = \dfrac{2\,等斜}{\pi}$







$$V_k = \frac{子_k径_k高}{3} + \frac{丑径_k高}{6} = \frac{子_k径_k高}{3} - \frac{等斜 \cdot 径_k高}{3\pi} = \frac{子_k径_k高}{3} + \frac{子_k径高}{3\pi}$$

これを畳んで円楔積 V とする [2)]．

$$V = \frac{径^2高\pi}{12} + \frac{径^2高}{3\pi}$$ [3)]

注 1) ㉖参照

注 2) $子_k径_k$ を畳んで円積，$子_k$ を畳むと円径となる．

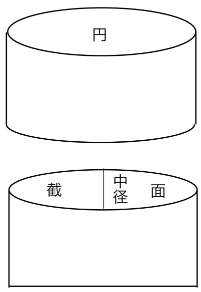
注 3) $丑径_k$ の畳数については，次のように解釈できる．

$$丑 = \frac{径}{n},\ 等斜 = 径 \tan\frac{\pi}{2n} = n\,丑\tan\frac{\pi}{2n}$$

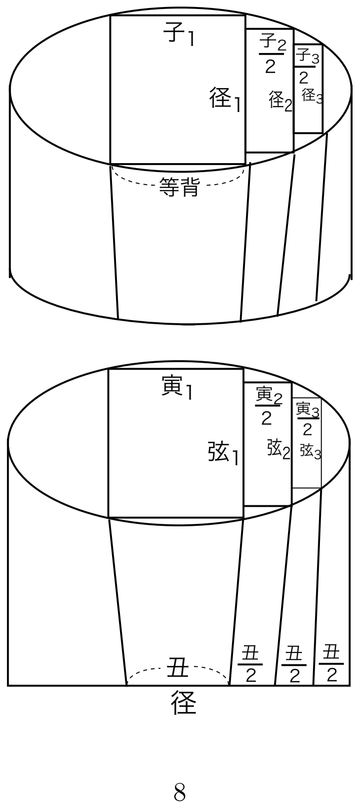
$$\therefore\quad 等斜 \cdot 径_k = n\,丑径_k \tan\frac{\pi}{2n}$$

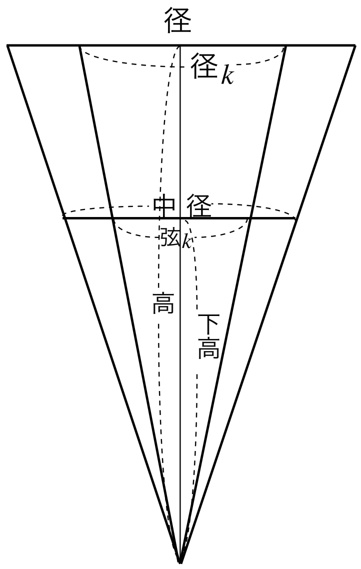
$$\therefore\quad 丑径_k = \frac{等斜\cdot 径_k}{n\tan\frac{\pi}{2n}} = \frac{子_k径}{n\tan\frac{\pi}{2n}} = 子_k径\frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}\,\frac{2}{\pi} \longrightarrow \frac{2}{\pi}径^2$$

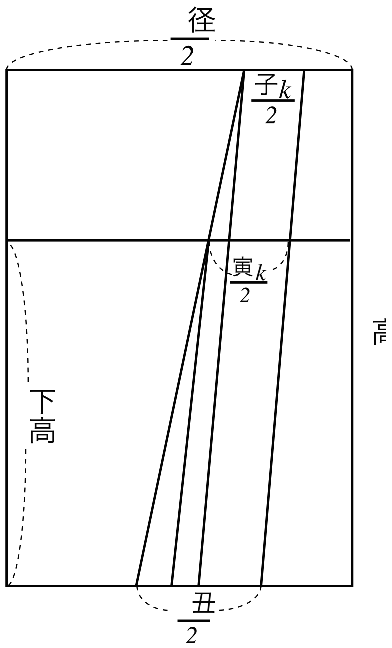
$\boxed{41}$ 正形円楔 (円径と刃が等しい) があり，これを図のように円の面に平行に切るとき，断面積と下の体積を求めよ．円径と高さと中径が与えられているとする．



$$下高 = \frac{中径\cdot高}{径},\ 弦_k = \frac{径_k中径}{径},\ 丑 - 寅_k = \frac{下高\,(丑 - 子_k)}{高},\ 寅_k = 丑 - \frac{中径\cdot丑}{径} + \frac{中径\cdot子_k}{径}$$





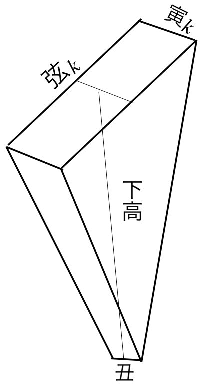


$$S_k=\text{寅}_k\text{弦}_k=\frac{2\,\text{中径}\cdot\text{径}_k\text{等斜}}{\text{径}\pi}-\frac{2\,\text{中径}^2\text{径}_k\text{等斜}}{\text{径}^2\pi}+\frac{\text{中径}^2\cdot\text{径}_k\text{子}_k}{\text{径}^2}=\frac{2\,\text{中径}\cdot\text{子}_k}{\pi}-\frac{2\,\text{中径}^2\text{子}_k}{\text{径}\pi}+\frac{\text{中径}^2\text{径}_k\text{子}_k}{\text{径}^2}$$

これを畳んで，断面積 S とする

$$S=\frac{2\,\text{中径}\cdot\text{径}}{\pi}-\frac{2\,\text{中径}^2}{\pi}+\frac{\text{中径}^2\pi}{4}$$

某積 V$_k$



$$V_k=\frac{\text{寅}_k\text{弦}_k\text{下高}}{3}+\frac{\text{丑}\cdot\text{弦}_k\text{下高}}{6}=\frac{\text{中径}\cdot\text{子}_k\text{下高}}{\pi}-\frac{2\,\text{中径}^2\text{子}_k\text{下高}}{3\,\text{径}\pi}+\frac{\text{中径}^2\text{径}_k\text{子}_k\text{下高}}{3\,\text{径}^2}$$

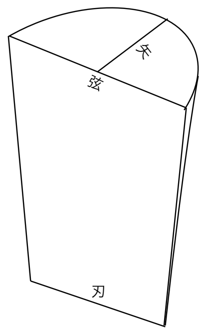
これを畳んで下積 V とする．

$$V=\frac{\text{中径}^2\text{径}\cdot\text{高}}{\text{径}\pi}-\frac{2\,\text{中径}^3\text{高}}{3\,\text{径}\pi}+\frac{\text{中径}^3\text{高}\pi}{12\,\text{径}}=\frac{\text{中径}^2\text{高}}{3\pi}+\frac{\text{中径}\cdot\text{高}\,S}{3\,\text{径}}$$

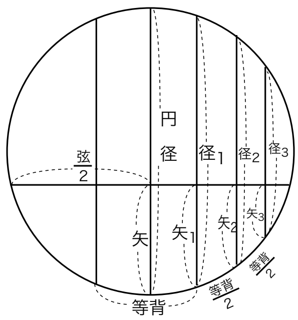
円楔，正形の真数を計算すると次のようになる．

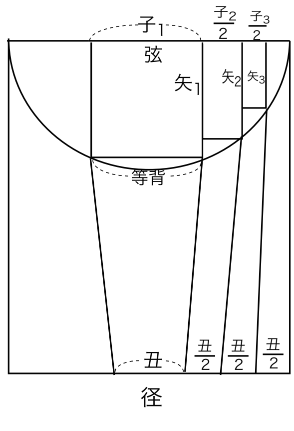
試　数	
円楔　円径 5 寸　中径 3 寸　高 4 寸	
正形	截面積　10 歩 88830 有奇
	截下積　12 歩 53035 有奇
	楔全積　36 歩 79026 有奇
作形	截面積　11 歩 78097 有奇
	截下積　14 歩 13716 有奇
	楔全積　39 歩 26990 有奇

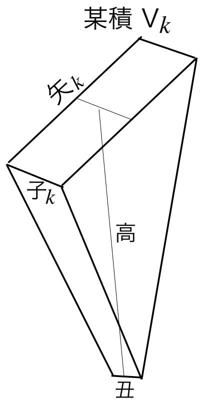
$\boxed{42}$ 図のような正形弧楔の体積を求めよ．弦，矢，刃，高が与えられているとする．



平 $=$ 径 $-$ 2 矢，等背 $= \dfrac{\text{背}}{n}$，丑 $= \dfrac{\text{刃}}{n}$，矢$_k = \dfrac{\text{径}_k - \text{平}}{2}$







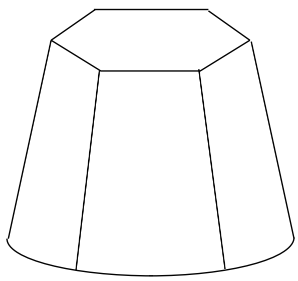
$$V_k=\frac{子_k矢_k高}{3}+\frac{丑\cdot矢_k高}{6}=\frac{高}{6}\left(2\,子_k矢_k+\frac{径_k刃}{2n}-\frac{平\cdot刃}{2n}\right)=\frac{高}{6}\left(2\,子_k矢_k+\frac{子_k径\cdot刃}{2\,背}-\frac{平\cdot刃}{2n}\right)^{1)}$$

これを畳んで体積 V とする[2].

$$V=\frac{高}{6}\left(2\,弧積+\frac{径\cdot弦\cdot刃}{2\,背}-\frac{平\cdot刃}{2}\right)=\frac{高}{12}\left(\frac{径\cdot弦\cdot刃}{背}+径\cdot背-平\,(弦+刃)\right)^{3)}$$

注 1) 等斜 : $子_k=径:径_k$，n 等斜 $=$ 弧背
注 2) $子_k矢_k$ を畳んで弧積，$子_k$ を畳んで弦とする．
注 3) $2\,弧積=\dfrac{背\cdot径-弦\cdot平}{2}$

$\boxed{43}$ 図のような正形角円台[1] の体積を求めよ．角数，正多角形の一辺の長さ，円径，高が与えられているとする．

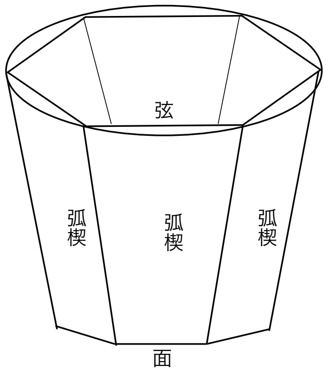


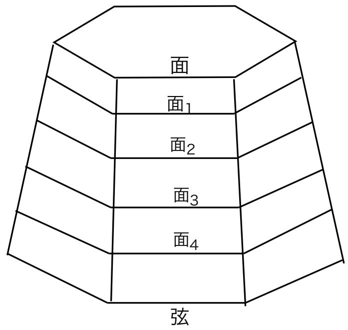
角円台から内側の角錐台を取り去った残りは，弧楔形が角数だけ集まったものである．ゆえに，角円台積 $=$ 弧楔積 $\times$ 角数 $+$ 角台積 で求まる．

$弦=\dfrac{径}{2\,角径率}$[2]，$平=\dfrac{径\times平径率}{角径率}$[3]，$背=\dfrac{径\pi}{角数}$，$角積率=\dfrac{角数\times平径率}{2}$

㊷により弧楔積 U は

$$U=\frac{高}{12}\left(\frac{径\cdot弦\cdot面}{背}+背\cdot径-平\,(弦+面)\right)=\frac{高}{3}\left(\frac{径\cdot面\cdot角数}{8\,角径率\pi}+\frac{径^2\pi}{4\,角数}-\frac{径^2平径率}{8\,角径率^2}-\frac{径\cdot面\cdot平径率}{4\,角径率}\right)$$





次に角台積 W を求める．子 $= \dfrac{高}{n}$，面$_k$ = 面 + (弦 − 面) 天,

$$V_k = {面_k}^2角積率 \cdot 子 = 高\left(\frac{面^2角積率}{n} + \frac{2\,面\,(弦-面)\,天\cdot角積率}{n} + \frac{(弦-面)\,天^2角積率}{n}\right)$$

これを畳んで角台積 W とする．

$$W = 高\left(\frac{面^2角積率}{3} + \frac{弦\cdot面\cdot角積率}{3} + \frac{弦^2角積率}{3}\right) = \frac{高}{3}\left(面^2角積率 + \frac{面\cdot径\cdot平径率\cdot角数}{4\,角径率} + \frac{径^2平径率\cdot角数}{8\,角径率^2}\right)$$

ゆえに，角円台積 V は

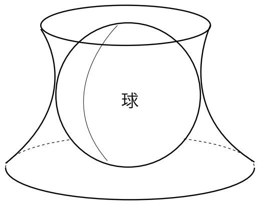
$$V = U \times 角数 + W = \frac{高}{3}\left(\frac{角数^2径\cdot面}{8\pi角径率} + \frac{径^2\pi}{4} + 面^2角積率\right)$$

注 1) 底面が円で，上面が正多角形の立体.

注 2) 角径率は一辺が 1 の正多角形の外接円の半径．角中径ともいう．

注 3) 平径率は一辺が 1 の正多角形の内接円の半径．平中径ともいう．

$\boxed{44}$ 図のような弧環台[1] があり，球が内接している．弧環台の傍覧積 (側面積) を求めよ．上径，下径，高が与えられているとする．

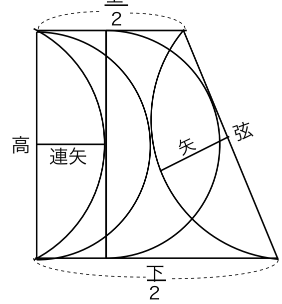


弦$^2 = \dfrac{(下-上)^2}{4} + 高^2$,　　定 = 4 連矢 = 上 + 下 − 2 弦,

高 : 連矢 = 弦 : 矢[2] より 矢 $= \dfrac{定\cdot弦}{4\,高}$,

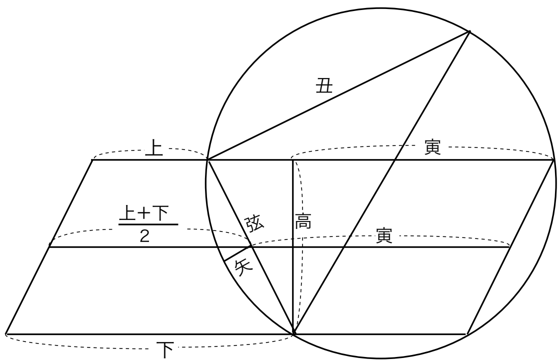
径 $= \dfrac{弦^2}{4\,矢} +$ 矢　(径矢弦の術),　　丑 = 径 − 2 矢 $= \dfrac{弦^2}{4\,矢} -$ 矢,

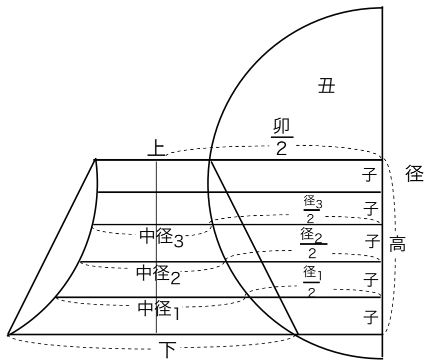
寅 $= \dfrac{丑\cdot高}{弦}$,　卯 $= \dfrac{上+下}{2} +$ 寅 $= \dfrac{上下}{定}$,　中径$_k$ = 卯 − 径$_k$ $= \dfrac{上下}{定} -$ 径$_k$,



$周_k = 中径_k \pi$,　　$斜_k 径_k = 径 \cdot 子$ だから

$$S_k = 周_k 斜_k = \frac{上下斜_k \pi}{定} - 径子\pi$$





これを畳んで傍覚積 S とする[3].

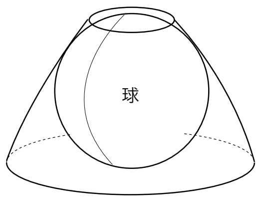
$$S = \frac{上下 \cdot 弧背\pi}{定} - 高 \cdot 径\pi$$

注 1) 上下は円で側面は円弧になっている.

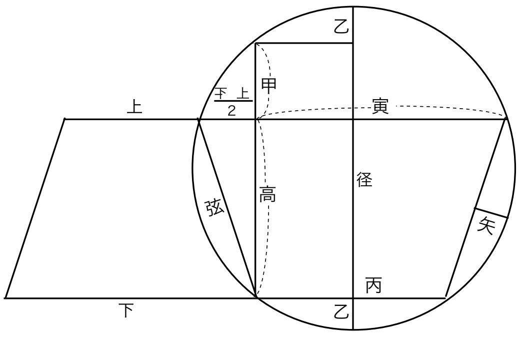
注 2) 算法助術 68 番の公式による.

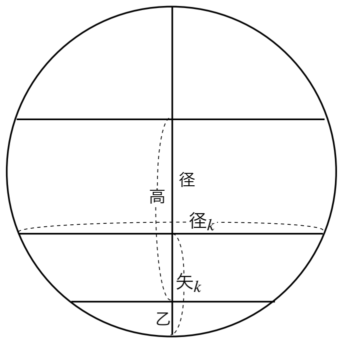
注 3) $斜_k$ を畳むと弧背，子を畳むと高となる.

$\boxed{45}$ 図のような弧環台[1] があり，球が内接している．球の外側の体積を求めよ．上径，下径，球径が与えられているとする.



球径を高として, $\boxed{44}$と同様にして, $弦^2 = \dfrac{(下 - 上)^2}{4} + 高^2$, $定 = 上 + 下 - 2\,弦$, $卯 = \dfrac{上下}{定}$, $矢 = \dfrac{定弦}{4\,高}$





$$甲=\frac{(下-上)\,寅}{2\,高},\qquad 乙=\frac{径-甲-高}{2},\qquad 丙=寅-\frac{下-上}{2}$$

$子=\dfrac{高}{n}$ とすると，$矢_k=乙+天高$

$$径_k{}^2=4\,矢_k径-4\,矢_k{}^2=4(径-乙)\,乙+4\,高径天-8\,乙高天-4\,高^2天^2=丙^2+4\,高径天-8\,乙高天-4\,高^2天^2$$

$中径_k=卯-径_k$

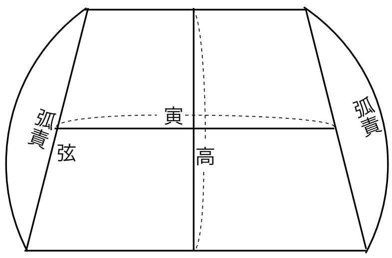
$$V_k=\frac{\pi}{4}中径_k{}^2子=\frac{\pi}{4}\left(卯^2子㋑-2\,径_k卯子㋺+径_k{}^2子㋩\right)$$

これを畳んで弧環台の体積 V とする．

㋑を畳むと 卯^{2}高

㋺ を畳むと 2 帯弧梯責 × 卯

帯弧梯積



㋩ $=丙^2子+4\,径高天子-8\,乙高天子-4\,高^2天^2子$ を畳むと

$$寅^2高-(下-上)\,寅高+\frac{(下-上)^2高}{4}+2\,甲高^2+\frac{2}{3}高^3$$

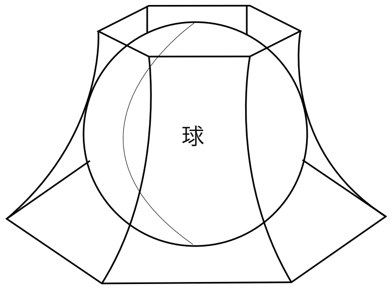
帯弧梯責 $=2\,弧責+寅\cdot高$ だから

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{4}\left(卯^2高-2\,帯弧梯責\times卯+寅^2高+\frac{(下-上)^2高}{4}+\frac{2}{3}高^3\right)\\&=\frac{\pi}{4}\left(-4\,弧責\cdot卯+(寅-卯)^2高+\frac{(下-上)^2高}{4}+\frac{2}{3}高^3\right)\\&=\frac{\pi}{4}\left(\frac{(上^2+下^2)\,高}{2}-4\,弧責\cdot卯+\frac{2}{3}高^3\right)\end{aligned}$$

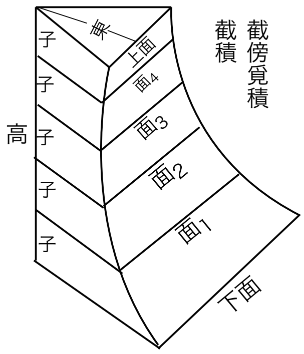
$$\therefore\quad 外責=V-球積=\frac{\pi}{4}\left(\frac{(上^2+下^2)\,高}{2}-4\,弧責\cdot卯\right)=\frac{(上^2+下^2)\,高\pi}{8}-\frac{弧責\cdot上下\pi}{定}$$

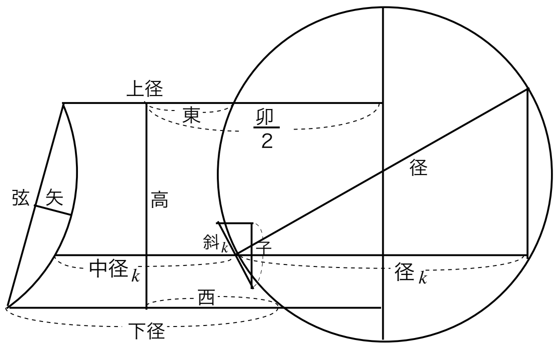
注 1) 定 > 0 のときは㊹の図ような立体で，減台という．定 < 0 のときは㊺の図ような立体で，加台という．ただし，㊺の解中の図は減台になっている．

$\boxed{46}$ 図のような弧角台 1) があり，球が内接している．台の体積と側面積を求めよ．上下の正多角形の一辺の長さ，高，角数が与えられているとする．



平中径率 $=\alpha$ とする．東 $=$ 上面 $\cdot\alpha$，西 $=$ 下面 $\cdot\alpha$，上径 $=2$ 東，下径 $=2$ 西，弦$^2=(\text{東}-\text{西})^2+\text{高}^2$





$\boxed{45}$と同様にして，南 $=$ 東 $+$ 西 $-$ 弦，定 $=2$ 南

$$\text{矢}=\frac{\text{定弦}}{4\,\text{高}}=\frac{\text{南弦}}{2\,\text{高}}$$

$$\text{卯}=\frac{\text{上径}\cdot\text{下径}}{\text{定}}=\frac{2\,\text{東西}}{\text{南}}$$

$$\text{中径}_k=\text{卯}-\text{径}_k,\quad \text{面}_k=\frac{\text{中径}_k}{2\alpha}$$

某積 U_k は

$$U_k=\frac{\text{中径}_k\text{面}_k\text{子}}{4}=\frac{\text{中径}_k{}^2\text{子}}{8\alpha}=\frac{1}{8\alpha}\left(\text{卯}^2\text{子}-2\,\text{径}_k\text{卯子}+\text{径}_k{}^2\text{子}\right)$$

これを畳んで截積 U とする[2]．$\boxed{45}$のイ，ロ，ハとまったく同じであるので，

$$U=\frac{1}{8\alpha}\left(\frac{2}{3}\text{高}^3+\frac{(\text{上}^2+\text{下}^2)\,\text{高}}{2}-4\,\text{弧責}\cdot\text{卯}\right)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{12}\text{高}^3+\frac{(\text{東}^2+\text{西}^2)\,\text{高}}{4}-\frac{\text{弧責}\cdot\text{東西}}{\text{南}}\right)$$

弧角台の体積 V は

$$V=\text{角数}\cdot U=\frac{\text{角数}}{\alpha}\left(\frac{1}{12}\text{高}^3+\frac{(\text{東}^2+\text{西}^2)\,\text{高}}{4}-\text{弧責}\cdot\text{北}\right)\qquad \boxed{\text{北}=\frac{\text{東西}}{\text{南}}}$$

某覓積 W_k は

$$W_k=\text{面}_k\text{斜}_k=\frac{\text{中径}_k\text{斜}_k}{2\alpha}=\frac{\text{斜}_k\text{卯}}{2\alpha}-\frac{\text{径}_k\text{斜}_k}{2\alpha}=\frac{\text{斜}_k\text{卯}}{2\alpha}-\frac{\text{径子}}{2\alpha}$$

これを畳んで截旁覓積とする．

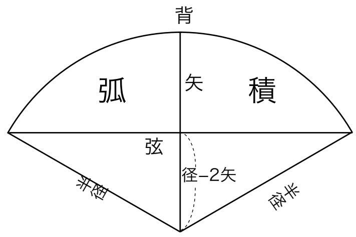
$$截旁覓積 = \frac{弧背 \cdot 卯}{2\alpha} - \frac{径 \cdot 高}{2\alpha}$$

$北 = \dfrac{卯}{2}$ とし，角数を乗じて減台旁覓積 W とする．

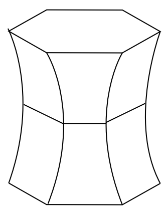
$$W = \frac{弧背 \cdot 北 \cdot 角数}{\alpha} - \frac{径 \cdot 高 \cdot 角数}{2\alpha}$$

$南 < 0$ のときは加台である．

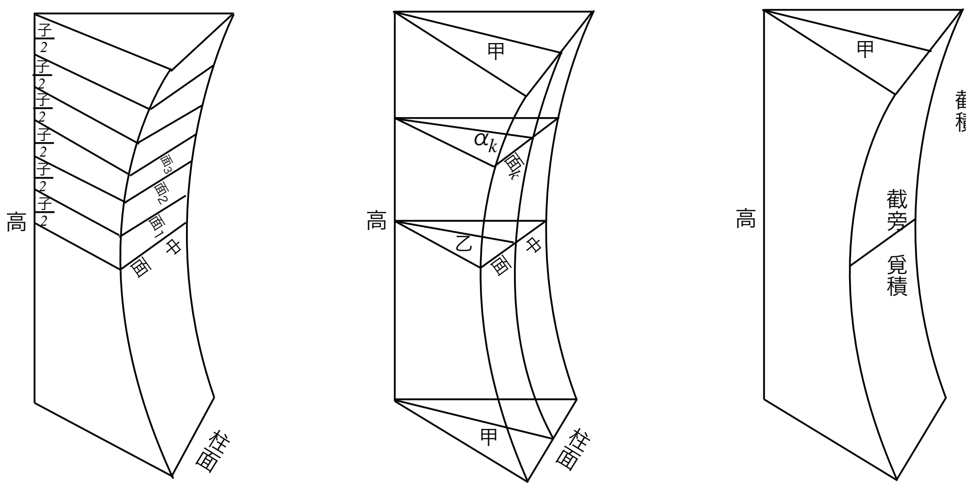
注 1) 上下は正多角形で側面は円弧になっている．図は減台である．
注 2) $弧背 = \dfrac{(径 - 2\,矢)\,弦}{径} + \dfrac{4\,弧責}{径}$

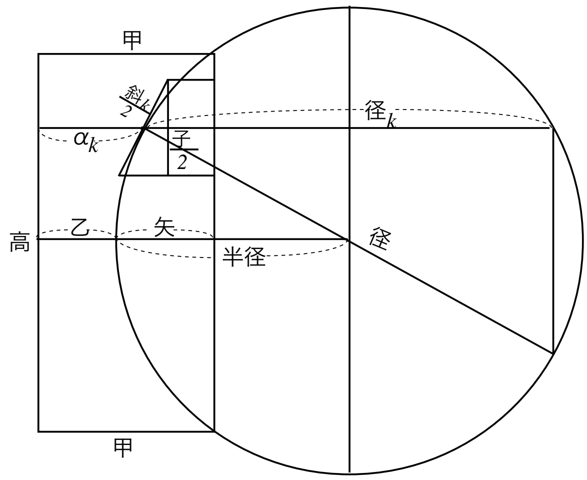


$\boxed{47}$ 図のような弧角柱[1] がある．柱角面 (多角形の一辺の長さ)，高，中角面 ($\frac{1}{2}$高 における多角形の一辺の長さ) が与えられたとき，角数にしたがって体積と側面積を求めよ．



$甲 = 柱面\alpha$，$乙 = 中面\alpha$，$矢 = 甲 - 乙$，$子 = \dfrac{高}{n}$，$径_k{}^2 = 径^2 - 高^2天^2$，$乾 = 径 + 2\,乙$ とする．





$$某平中径 = \alpha_k = \frac{乾}{2} - \frac{径_k}{2}$$

$$面_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$$

$$S_k = 面_k斜_k = \frac{乾 \cdot 斜_k}{2\alpha} - \frac{径_k斜_k}{2\alpha} = \frac{乾 \cdot 斜_k}{2\alpha} - \frac{径子}{2\alpha}$$ [2)]

これを畳んで截旁覓積とする[3)].

$$截旁覓積 = \frac{弧背 \cdot 乾}{2\alpha} - \frac{径高}{2\alpha}$$

角数を乗じて求める側面積 S とする.

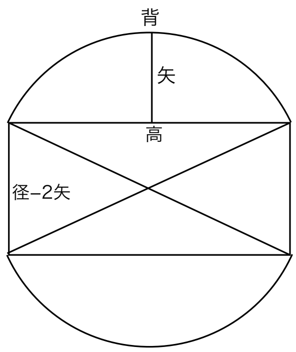
$$S = \frac{弧背 \cdot 乾 \cdot 角数}{2\alpha} - \frac{径高 \cdot 角数}{2\alpha}$$

$$V_k = \frac{\alpha_k面_k子}{2} = \frac{{\alpha_k}^2子}{2\alpha} = \frac{1}{8\alpha}\left(乾^2子 - 2\,径_k乾子 + 径^2子 - 高^2天^2子\right)$$

これを畳んで截積 V とする.

$$V = \frac{1}{8\alpha}\left(乾^2高 - 2\,帯直弧責 \cdot 乾 + 径^2高 - \frac{1}{3}高^3\right)$$

ここで $2\,帯直弧責 = 弧背 \cdot 径 + (径 - 2\,矢)\,高$ を代入して



$$V=\frac{1}{8\alpha}\left(-\text{弧背}\cdot\text{径乾}+2\,\text{甲高乾}+\text{径}^2\text{高}-\frac{1}{3}\text{高}^3\right)$$

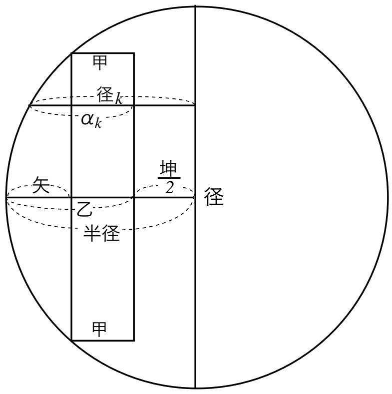
求める内弧角柱積 W は

$$W=V\times\text{角数}=-\frac{S\,\text{径}}{4}+\frac{\text{柱面}\cdot\text{高}\cdot\text{乾}\cdot\text{角数}}{4}-\frac{\text{高}^3\text{角数}}{24\alpha}$$

外弧角柱積 W' は 坤 $=$ 径 $-\,2$ 乙 として

$$W'=\frac{S\,\text{径}}{4}-\frac{\text{柱面}\cdot\text{高}\cdot\text{坤}\cdot\text{角数}}{4}+\frac{\text{高}^3\text{角数}}{24\alpha}$$

外弧角柱の図

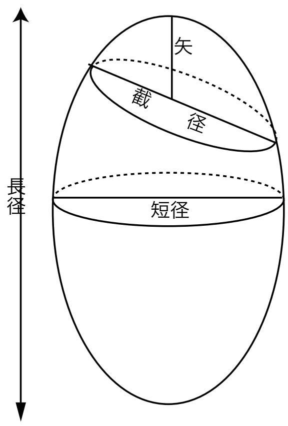


注 1) 上底，下底が正多角形で側面が円弧になっている．円弧の形状によって，内弧角柱，外弧角柱がある．図は内弧角柱．

注 2) 斜_k : 子 $=$ 径 : 径_k

注 3) 斜_k を畳むと弧背，子を畳んで高となる．

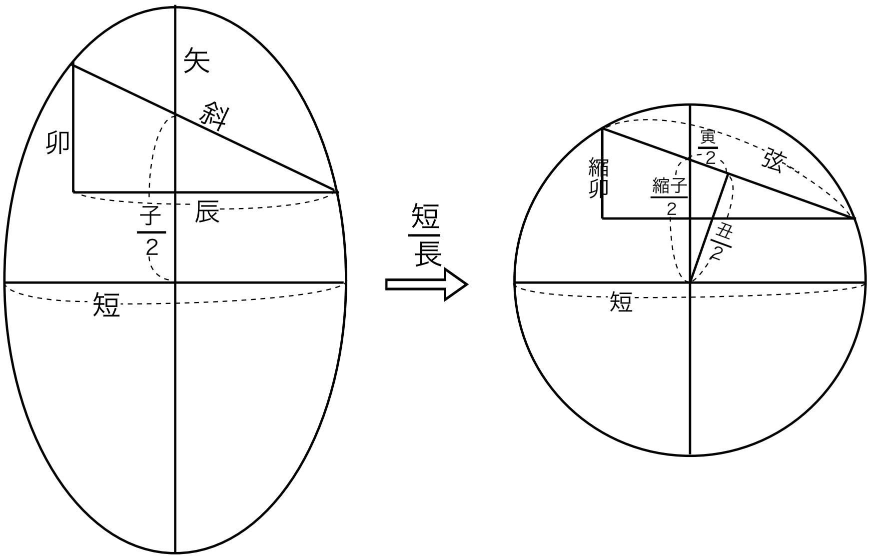
$\boxed{48}$ 回転楕円体 (ラグビーボール) を斜めに切るとき，上積を求めよ．長径，短径，截斜，矢が与えられているとする．



子 $=$ 長 -2 矢 とする．この楕円を $\dfrac{短}{長}$ に縮める．縮子 $=\dfrac{短}{長}$子

$$寅^2 = 縮子^2 - 丑^2 = \frac{短^2}{長^2}子^2 - 丑^2$$

$$弦^2 = 短^2 - 丑^2$$



$$卯 = \frac{長}{短}縮卯 = \frac{長}{短}\cdot\frac{弦\cdot寅}{縮子}$$

同じく

$$辰 = \frac{弦\cdot丑}{縮子}$$

以上を 卯$^2+$辰$^2-$斜$^2=0$ へ代入して

$$\frac{長^2弦^2寅^2}{短^2縮子^2} + \frac{弦^2丑^2}{縮子^2} - 斜^2 = 0$$

$$\left(\frac{長^2}{短^2}-1\right)丑^4 - \left(長^2 - 短^2 + 子^2\right)丑^2 + 短^2子^2 - \frac{斜^2短^2子^2}{長^2} = 0$$

極 $=\dfrac{長^2}{短^2}-1,\quad$ 西 $=\dfrac{短}{2}+\dfrac{子^2}{2\,短\cdot極},\quad$ 東 $=\dfrac{子^2}{極}$ とおくと，

$$\left(\frac{丑^2}{短}\right)^2 - 2\,西\frac{丑^2}{短} + 東 - \frac{斜^2東}{長^2} = 0$$

$$\frac{丑^2}{短} = 西 - \sqrt{西^2 - 東 + \frac{斜^2東}{長^2}} \equiv 南$$

$$\therefore\quad 丑 = \sqrt{短\cdot南}$$

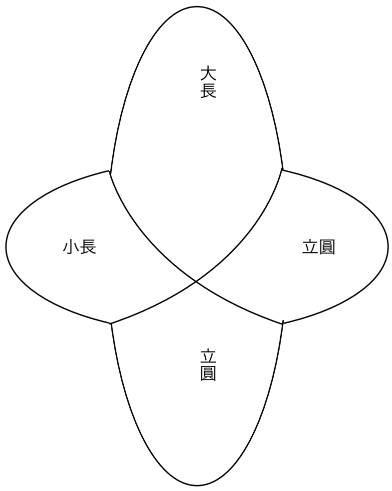
$\boxed{6}$の公式より

$$\begin{aligned}
\text{縮上積} &= \text{球欠積} = \frac{3}{4}\frac{\pi}{6}\text{弦}^2 \cdot \text{球矢} + \frac{\pi}{6}\text{球矢}^3 \\
&= \text{球矢}\left(\frac{\pi}{8}\text{弦}^2 + \frac{\pi}{6}\text{球矢}^2\right) \\
&= \frac{\text{球矢}}{4}\left(\frac{\pi}{2}(\text{短}^2 - \text{丑}^2) + \frac{\pi}{6}(\text{短} - \text{丑})^2\right) \\
&= \frac{\text{球矢}}{4}\left(\frac{2}{3}\pi\text{短}^2 - \frac{\pi}{3}\text{短}\cdot\text{南} - \frac{\pi}{3}\text{短}\cdot\text{丑}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{上積} = \frac{\text{長}}{\text{短}}\text{縮上積} = \frac{\text{北}}{4}\text{玉積率}\,(\text{長}\cdot\text{短} + \text{長}\cdot\text{北} - \text{長}\cdot\text{南}) \qquad \boxed{\text{北} = 2\,\text{球矢} = \text{短} \pm \text{丑}^{\,1)}}$$

注 1)　矢 $> \dfrac{\text{長}}{2}$ のときは $+$，矢 $< \dfrac{\text{長}}{2}$ のときは $-$

$\boxed{49}$ 短径が等しい 2 つの楕円体 (ラグビーボール) が直交するように交わった立体の体積 (十字積) を求めよ．大長径，小長径，等短径が与えられているとする．



㋐より 縮乾 $= \dfrac{\text{乾}\cdot\text{短}}{\text{小長}}$

$$\text{坤}^2 = \text{短}^2 - \text{縮乾}^2 = \text{短}^2 - \frac{\text{乾}^2\cdot\text{短}^2}{\text{小長}^2}$$

㋑より 縮坤$^2 = \dfrac{\text{短}^2\text{坤}^2}{\text{大長}^2} = \dfrac{\text{短}^4}{\text{大長}^2} - \dfrac{\text{乾}^2\text{短}^4}{\text{小長}^2\text{大長}^2}$

これらを 縮坤$^2 + \text{乾}^2 - \text{短}^2 = 0$ へ代入して

$$\frac{\text{短}^4}{\text{大長}^2} - \frac{\text{乾}^2\text{短}^4}{\text{小長}^2\text{大長}^2} + \text{乾}^2 - \text{短}^2 = 0$$

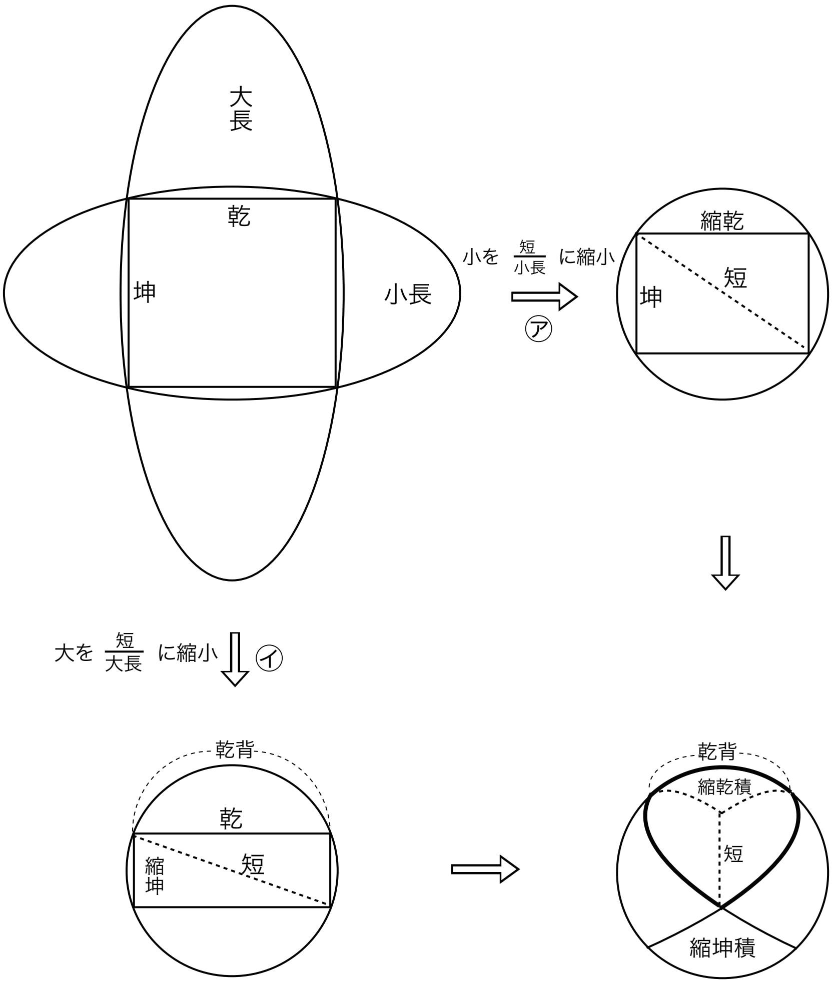
$$(\text{小長}^2\text{大長}^2 - \text{短}^4)\,\text{乾}^2 - \text{短}^2\text{小長}^2(\text{大長}^2 - \text{短}^2) = 0$$

極 $=$ 小長^{2}大長$^2 -$ 短^4 と置いて

$$乾 = \frac{短 \cdot 小長\sqrt{大長^2 - 短^2}}{\sqrt{極}}$$

大長と小長を入れ替えて

$$坤 = \frac{短 \cdot 大長\sqrt{小長^2 - 短^2}}{\sqrt{極}}$$



22により[1)]

$$V_1 = 縮乾積 = \frac{1}{6}乾背 \cdot 短^2$$

$$V_2 = 乾積^{2)} = \frac{大長}{短}V_1 = \frac{1}{6}乾背 \cdot 大長 \cdot 短$$

大長と小長を入れ替えて

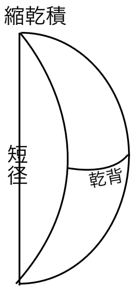
$$V_3 = 坤積 = \frac{1}{6}乾背 \cdot 小長 \cdot 短$$

$$十字積 = 2(V_2 + V_3) = \frac{1}{3}(乾背 \cdot 大長 + 坤背 \cdot 小長)\ 短$$

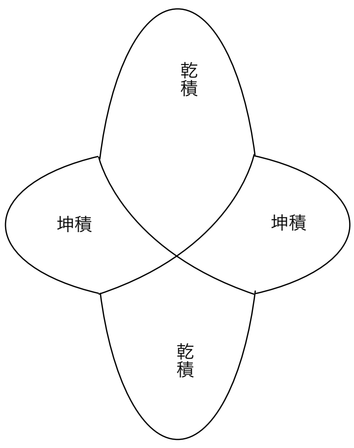
弧背の求め方は$\boxed{1}$の公式を使う．$率 = \dfrac{弦^2}{径^2}$

$$弧背 = 弦 + \frac{1^2}{3!}率 \cdot 弦 + \frac{3^2}{5!}率^2弦 + \frac{5^2}{7!}率^3弦 + \cdots\cdots$$

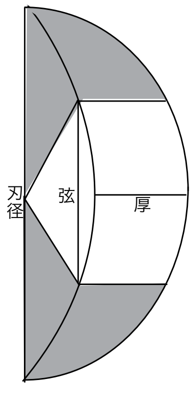
注 1) $\boxed{22}$の図



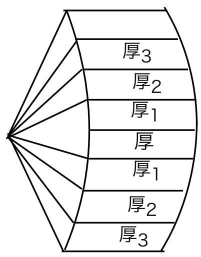
注 2)

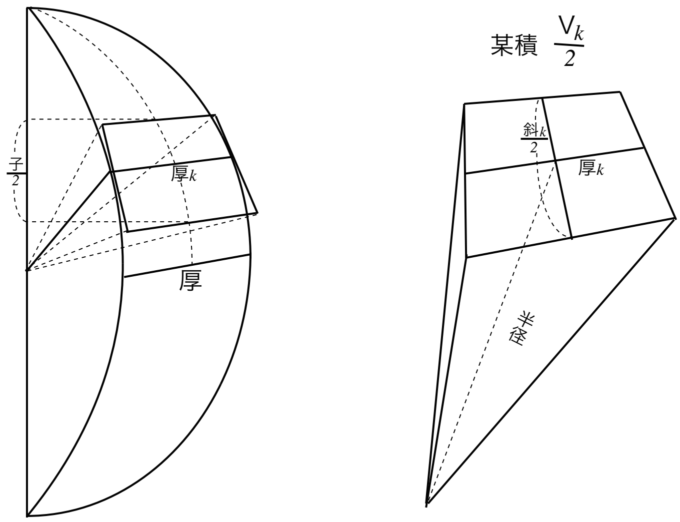


$\boxed{50}$ 半円櫛形で上下の黒積は等しいとき，白積を求めよ．径，弦，厚が与えられているとする．



子 $=\dfrac{\text{弦}}{n}$ とする．$\text{厚}_k=\dfrac{\text{径}_k\text{厚}}{\text{径}}$





某積 V_k は

$$V_k=\frac{1}{6}\text{厚}_k\text{斜}_k\text{径}=\frac{1}{6}\text{径}_k\text{斜}_k\text{厚}=\frac{1}{6}\text{子}\cdot\text{径}\cdot\text{厚}$$ [1)]

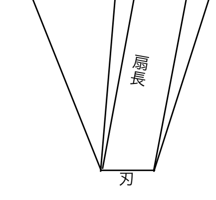
これを畳んで白積 V とする[2)]．

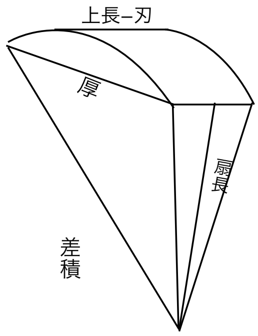
$$V=\frac{1}{6}\text{弦}\cdot\text{径}\cdot\text{厚}$$

注 1) 例のごとく，比例により $\text{径}_k\text{斜}_k=\text{子}\cdot\text{径}$

注 1) 子を畳んで弦となる．

$\boxed{51}$ 図のような扇面楔の体積を求めよ．扇長，上長，刃，厚が与えられているとする．





㊿によって

$$V_1 = 差積 = \frac{1}{6}厚 \cdot 2\,扇長\,(上長 - 刃) = \frac{1}{3}厚 \cdot 扇長\,(上長 - 刃)$$

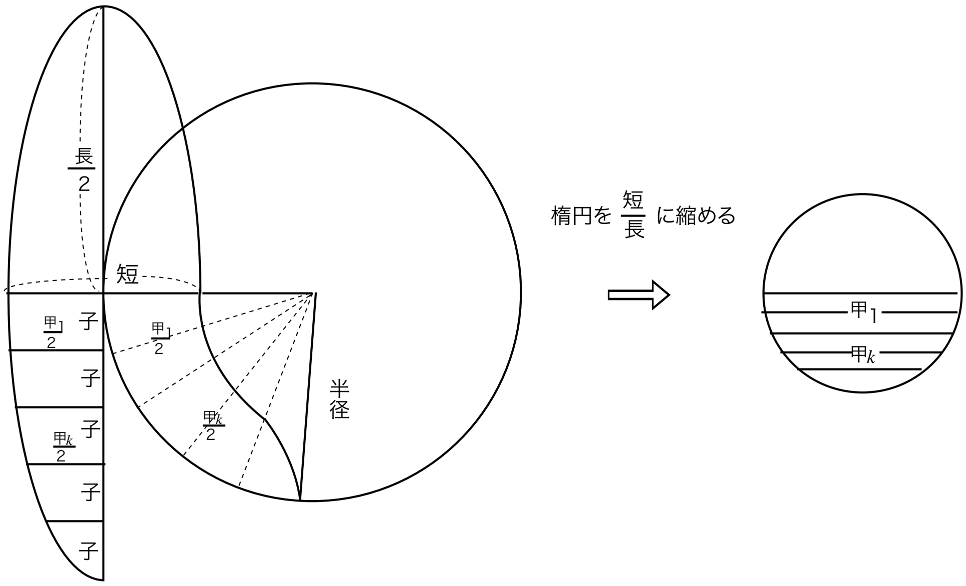
$$V_2 = 中の扇柱 = \frac{1}{2}背 \cdot 扇長 \cdot 刃$$

求める体積 V は

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}厚 \cdot 扇長 \cdot 上長 - \frac{1}{3}厚 \cdot 扇長 \cdot 刃 + \frac{1}{2}背 \cdot 扇長 \cdot 刃$$

$\boxed{52}$ 図のような碇形の立体がある．これは回転楕円体を等分 (裂数) してイカの足のようにまげたもの[1)]．まげるときの円径と長径，短径が与えられているとする．

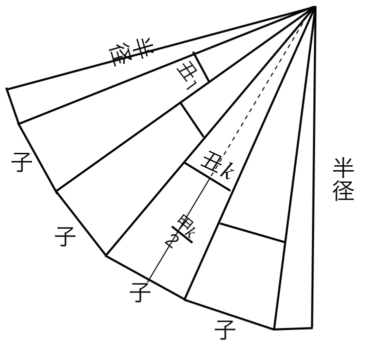
子 $= \dfrac{長}{2n}$ とする．径矢弦の術より 甲$_k$ = 短 − 短^{2}天^2

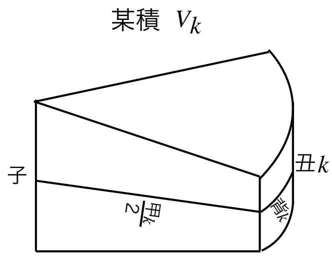


$$\frac{径}{2} : 子 = \left(\frac{径}{2} - \frac{甲_k}{2}\right) : 丑_k \text{ より } 丑_k = \frac{(径 - 甲_k)\,子}{径}$$

$$角径率 = \alpha \text{ として } 弦_k = \frac{甲_k}{2\alpha}$$

裂数 $= N$ として 背$_k = \dfrac{\text{甲}_k \pi}{N}$





某積 V_k は $\boxed{51}$により

$$
\begin{aligned}
V_k &= \frac{1}{3}\text{弦}_k \frac{\text{甲}_k}{2}\text{丑}_k - \frac{1}{3}\text{弦}_k \frac{\text{甲}_k}{2}\text{子} + \frac{1}{2}\text{背}_k \frac{\text{甲}_k}{2}\text{子} \\
&= \frac{1}{12}\left(-\frac{\text{甲}_k{}^3\text{子}}{\alpha\text{径}} + \frac{3\,\text{甲}_k{}^2\pi}{N}\text{子}\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(-\frac{\text{甲}_k{}^3\text{子}}{\alpha\text{径}} + \frac{3(\text{短}^2 - \text{短}^2\text{天}^2)\pi}{N}\text{子}\right)
\end{aligned}
$$

これを偶乗甲表により畳んで爪一股積 V とする[2)].

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{12}\left(-\frac{\frac{3}{4}\frac{\pi}{4}\text{短}^3}{\alpha\text{径}}\frac{\text{長}}{2} + \frac{3}{N}\left(\text{短}^2 - \frac{1}{3}\text{短}^2\right)\pi\frac{\text{長}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(-\frac{3\pi\text{短}^3\text{長}}{32\alpha\text{径}} + \frac{\text{短}^2\text{長}}{N}\pi\right)
\end{aligned}
$$

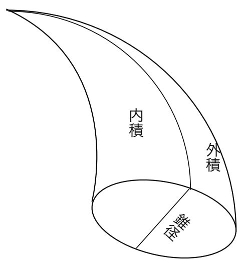
$$
\text{須戸積} = \frac{1}{2}\text{回転楕円体} = \frac{1}{2}\text{球} \times \frac{\text{長}}{\text{短}} = \frac{\pi}{12}\text{短}^2\text{長}
$$

よって

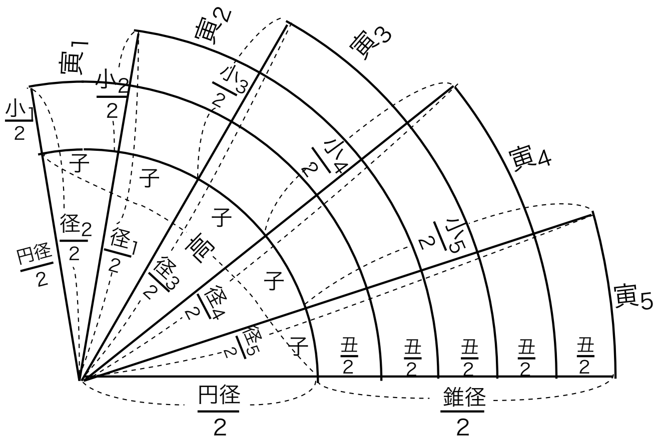
$$
\text{碇積} = \text{須戸積} + NV = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{3N\,\text{短}}{64\alpha\text{径}}\right)\text{短}^2\text{長}
$$

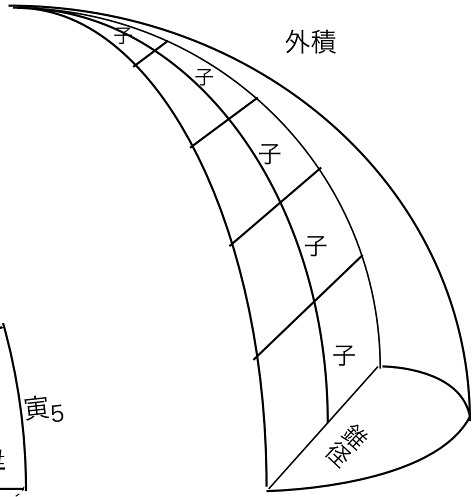
注 1) 原書の図は 裂数 $= 4$
注 2) 甲$_k{}^3$ を畳むと $\dfrac{3}{4}\dfrac{\pi}{4}$短^3，天^2 を畳んで $\dfrac{1}{3}$

$\boxed{53}$ 図のように円錐の高さの線が円形に撓むように曲げて牛角形にした立体の外積，内積を求めよ．円錐の径，高さ，撓円の円径が与えられているとする．



$子 = \dfrac{高}{n}$，$丑 = \dfrac{錐径}{n}$，$小径_k = 錐径 \cdot 天$ とする．





$$径_k = 円径 + 小径_k, \quad 寅_k = \frac{径_k 子}{円径}, \quad 背_k = \frac{小径_k \pi}{2}$$

$\boxed{51}$より[1)]

$$V_k = \frac{3\,背_k 小径_k 子}{12} + \frac{寅_k 小径_k^2}{6} - \frac{小径_k 子}{6} = \frac{3\pi 錐径^2 高 \cdot 天^2}{24} + \frac{錐径^3 高 \cdot 天^3}{6\,円径}$$

これを畳んで外積 V とする[2)]．

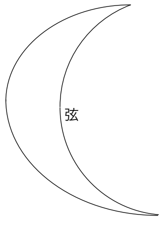
$$V = \frac{錐径^2 高 \pi}{24} + \frac{錐径^3 高}{24\,円径}$$

同様にして内積 U は[3)]

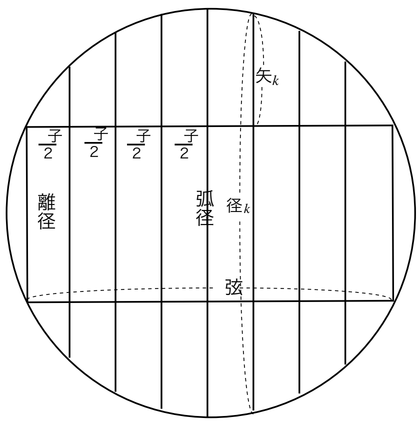
$$U = \frac{錐径^2 高 \pi}{24} - \frac{錐径^3 高}{24\,円径}$$

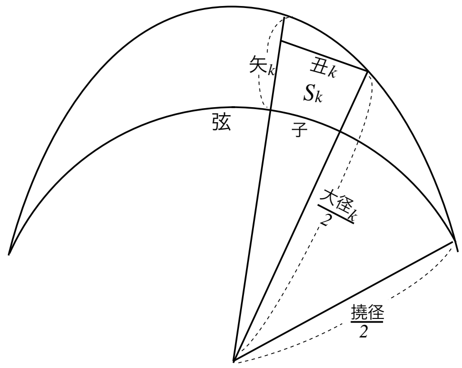
注 1) $\boxed{51}$で $\dfrac{小_k}{2}$ を扇長，$寅_k$ を上長，子を刃，$小_k$ を厚とする．
注 2) $天^2$ を畳むと $\dfrac{1}{3}$，$天^3$ を畳むと $\dfrac{1}{4}$
注 3) $V + U = 円錐の体積$ となっている．

$\boxed{54}$ 円弧と弦で囲まれた図形を，弦が円形に撓るように曲げた三日月形の図形の面積を求めよ．元の円径，弦，撓円の径が与えられているとする．



$子 = \dfrac{弦}{n}$ とする．$径_k{}^2 = 弧径^2 - 弦^2天^2$，　$離径^2 = 弧径^2 - 弦^2$，　$矢_k = \dfrac{径_k - 離径}{2}$





$大径_k = 撓径 + 2\,矢_k$，　$丑_k = \dfrac{大径_k \cdot 子}{撓径} = 子 + \dfrac{2\,矢_k \cdot 子}{撓径}$

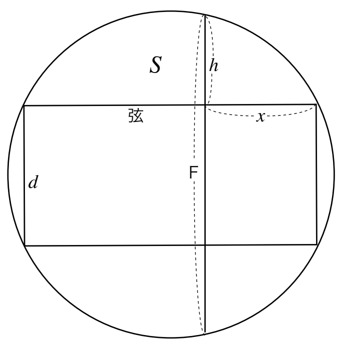
$$
\begin{aligned}
S_k &= \frac{矢_k \cdot 子}{2} + \frac{丑_k矢_k}{2} \\
&= 矢_k子 + \frac{矢_k^2子}{撓径} \\
&= 矢_k子 + \frac{径_k^2子}{4\,撓径} - \frac{2\,径_k \cdot 離径 \cdot 子}{4\,撓径} + \frac{離径^2子}{4\,撓径} \\
&= 矢_k子 + \frac{2\,弧径^2子}{4\,撓径} - \frac{弦^2天^2子}{4\,撓径} - \frac{2\,径_k \cdot 離径 \cdot 子}{4\,撓径} - \frac{弦^2子}{4\,撓径}
\end{aligned}
$$

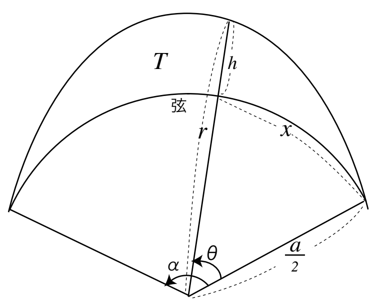
これを畳んで 月形積 S とする[1)].

$$
S = 弧責 + \frac{弧径^2弦}{4\,撓径} - \frac{弦^3}{12\,撓径} - \frac{2\,帯直弧責 \cdot 離径}{4\,撓径} - \frac{弦^3}{4\,撓径} = 弧責 - \frac{弧責 \cdot 離径}{撓径} + \frac{弦^3}{6\,撓径}\ ^{2)}
$$

注 1) $径_k子$ を畳むと $帯直弧積 = 2\,弧責 + 離径 \cdot 弦$

注 2) この結果は現代数学では以下のように確認できる．





$$F^2 = R^2 - (弦 - 2x)^2 = R^2 - (弦 - a\theta)^2$$

$$h = \frac{1}{2}(F - d)$$

$$r = \frac{a}{2} + h$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \left\{ r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right\} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (ah + h^2) d\theta$$

$x = \dfrac{a}{2}\theta$ と変換して，$x : 0 \to \text{弦}$ のとき $\theta : 0 \to \alpha = \dfrac{2\,\text{弦}}{a}$

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha ah d\theta = \int_0^{\text{弦}} h dx = S(\text{弧責})$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha h^2 d\theta = \frac{1}{8}\int_0^\alpha (F^2 - 2dF + d^2) d\theta$$

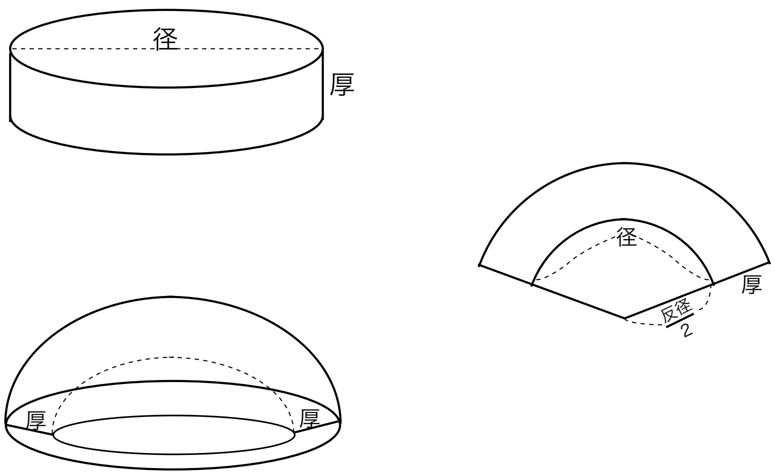
$$\frac{1}{8}\int_0^\alpha F^2 d\theta = \frac{1}{8}\int_0^\alpha \{R^2 - (\text{弦} - a\theta)^2\} d\theta = \frac{R^2\text{弦}}{4a} - \frac{\text{弦}^3}{12a}$$

$$\frac{1}{8}\int_0^\alpha 2dF d\theta = \frac{d}{2a}\int_0^{\text{弦}} F dx = \frac{d}{2a} \times \text{帯直弧責} = \frac{d}{2a}(2S + d\,\text{弦})$$

$$\frac{1}{8}\int_0^\alpha d^2 d\theta = \frac{d^2\text{弦}}{4a}$$

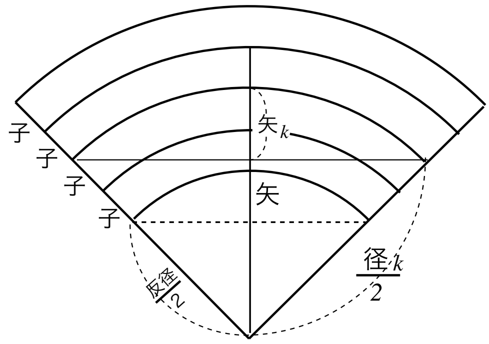
$$T = S + \frac{R^2\text{弦}}{4a} - \frac{\text{弦}^3}{12a} - \frac{d}{2a}(2S + d\,\text{弦}) + \frac{d^2\text{弦}}{4a} = S - \frac{d}{a}S + \frac{\text{弦}^3}{6a}$$

$\boxed{55}$ 円盤を球のように曲げたときの体積 (反積) を求めよ．円盤の直径，厚さ，曲げたときの内側の円の直径 (反内径) が与えられているとする．



反径を円径とし，盤径を弧背として別に矢を求めておく[1]．

子 $= \dfrac{\text{厚}}{n}$ とする．矢$_k = \dfrac{\text{径}_k\text{矢}}{\text{反径}}$，　径$_k$ = 反径 + 2 厚天



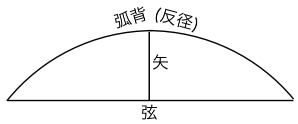
$\boxed{7}$により，球欠覓積 $=$ 矢$_k$径$_k\pi$

$$V_k = \text{子}\cdot\text{球欠覓積} = \text{子}\cdot\frac{{\text{径}_k}^2\text{矢}}{\text{反径}}\pi = \frac{\text{厚}}{n}\frac{1}{\text{反径}}(\text{反径}{+}2\,\text{厚天})^2\text{矢}\pi = \left(\text{反径}\frac{\text{厚}}{n} + 4\,\text{厚}^2\frac{\text{天}}{n} + 4\frac{\text{厚}^3}{\text{反径}}\frac{\text{天}^2}{n}\right)\text{矢}\pi$$

これを畳んで 反積 V とする．

$$V = \left(\text{反径}\cdot\text{厚} + 2\,\text{厚}^2 + \frac{4\,\text{厚}^3}{3\,\text{反径}}\right)\text{矢}\pi = \left\{(\text{反径}+\text{厚})^2 + \frac{\text{厚}^2}{3}\right\}\frac{\text{厚}}{\text{反径}}\text{矢}\pi$$

注 1) 立表第九弧背により, $s=$ 弧背,　率 $= \dfrac{\text{弦}^2}{\text{径}^2}$ として, $s^2 = \text{弦}^2\left(1 + \dfrac{1}{3}\text{率} + \dfrac{8}{45}\text{率}^2 + \dfrac{4}{35}\text{率}^4 + \cdots\right)$



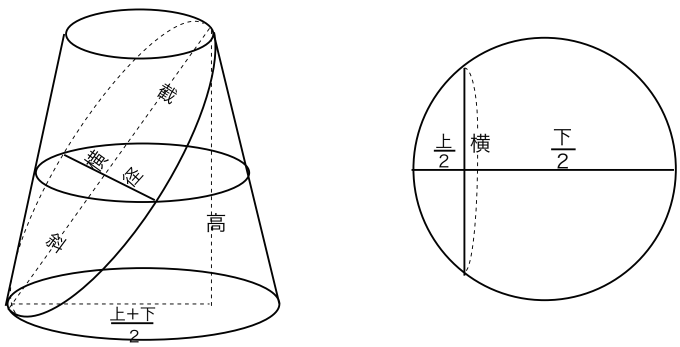
径矢弦の術より 弦$^2 = 4\,$矢径$\,-\,4\,$矢^2 を代入して，$s^2 = 4\,\text{矢径} + \dfrac{4}{3}\text{矢}^2 + \dfrac{32}{45}\dfrac{\text{矢}^3}{\text{径}} + \dfrac{16}{35}\dfrac{\text{矢}^4}{\text{径}^2} + \cdots$

これを矢について解いて，矢 $= \dfrac{s^2}{4\,\text{径}} - \dfrac{s^4}{48\,\text{径}^3} + \dfrac{s^6}{1440\,\text{径}^5} - \dfrac{s^8}{80640\,\text{径}^7} + \cdots$

よって

$$\text{矢} = \frac{\text{反径}}{2}\left\{\frac{1}{2!}\left(\frac{\text{径}}{\text{反径}}\right)^2 - \frac{1}{4!}\left(\frac{\text{径}}{\text{反径}}\right)^4 + \frac{1}{6!}\left(\frac{\text{径}}{\text{反径}}\right)^6 - \frac{1}{8!}\left(\frac{\text{径}}{\text{反径}}\right)^8 + \cdots\right\}$$

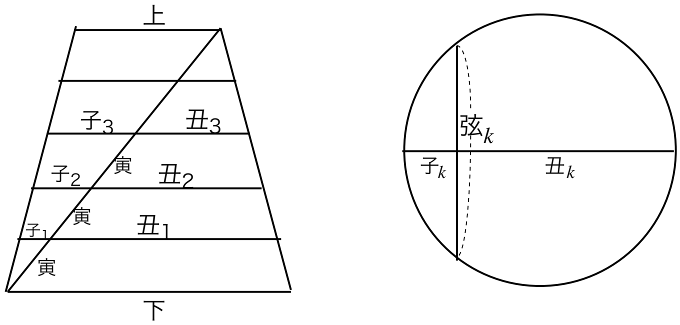
$\boxed{56}$ 円錐台を斜めに切断した切り口の面積を求めよ．上径，下径と高が与えられているとする．



半分の高さで切った切り口を横径とすると，横^2 = 上 · 下，　斜$^2 = \left(\dfrac{上 + 下}{2}\right)^2 + 高^2$

高を n 等分する．子$_k$ = 上天，　丑$_k$ = 下 − 下天

$$弦_k{}^2 = 4\,子_k丑_k = 4(下 - 下天)\,上天 = 4\,横^2(天 - 天^2) = 乙_k{}^2$$



寅 $= \dfrac{斜}{n}$ とする．

$$S_k = 弦_k寅 = 乙_k \cdot \frac{斜}{n}$$

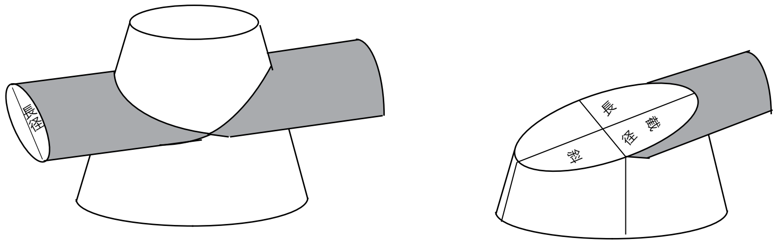
偶乗乙表によりこれを畳んで求める面積 S とする．

$$S = \frac{\pi}{4}横 \cdot 斜 = \frac{\pi}{4}斜\sqrt{上下}$$

この結果は斜を長径，横を短径とする楕円の面積になっている [1]．

注 1) この後，だからこの切り口は楕円である，というような言い方をしている．

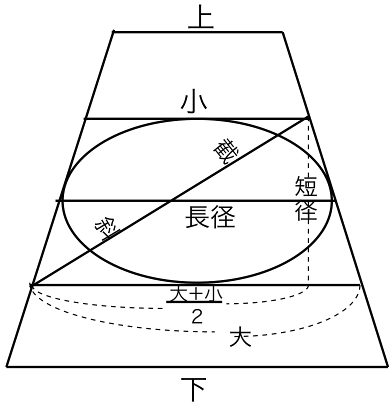
$\boxed{57}$ 図のように円錐台に楕円柱を穿去するとき，交周の長さを求めよ．上径，下径，高，長径，短径が与えられているとする．



切り口は楕円である [1]．切り口の楕円の短径は楕円柱の長径になる．よって，截斜を求めればよい．斜を長径として$\boxed{5}$により楕円周長が求まる．

$$\begin{aligned} 斜^2 &= \left(\frac{大 + 小}{2}\right)^2 + 短^2 \\ &= \frac{(大 - 小)^2}{4} + 大小 + 短^2 \qquad (長^2 = 大小) \end{aligned}$$

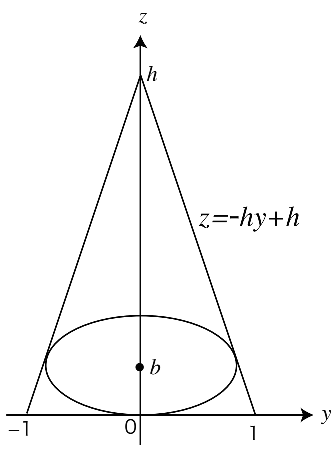
$$= \frac{短^2}{4\,高^2}(下 - 上)^2 + 長^2 + 短^2$$



楕円周長は 率 $= 1 - \dfrac{長^2}{斜^2}$ として

$$楕円周長 = 斜\pi \left(1 - \frac{1}{2^2}率 - \frac{3}{8^2}率^2 - \frac{3 \cdot 15}{48^2}率^3 - \frac{15 \cdot 105}{384^2}率^4 + \cdots\right)$$

注 1) 円錐と楕円柱の穿去曲線が楕円であることの確認



楕円柱を

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{(x-b)^2}{b^2} = 1 \cdots\cdots ①$$

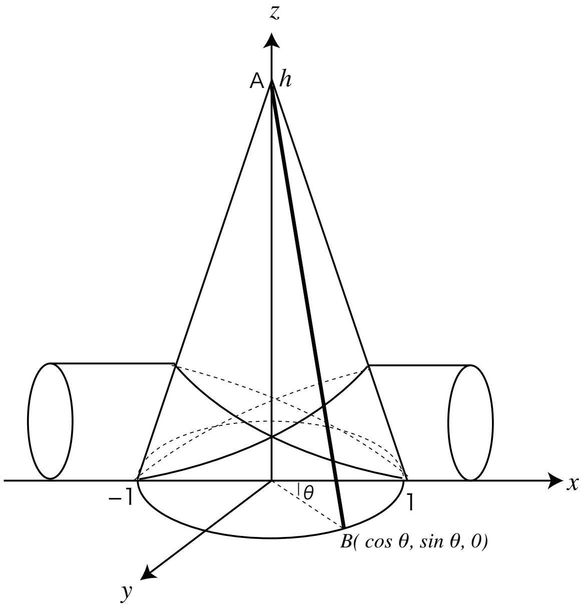
とする．まず楕円と母線が接する条件を出す．母線 $z = -hy + h$ を ① に代入して，判別式 $= 0$ より

$$a^2h - h + 2b = 0 \cdots\cdots ②$$

この②の条件のもとで，切り口が平面になることを示す．母線の式を空間で表示すると，2 点

$A(0,\ 0,\ h),\ B(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を結ぶ直線とみて

$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=\frac{x-h}{-h}\cdots\cdots ③$$



$y=(\tan\theta)x$ を ① へ代入して

$$b^2x^2\tan^2\theta+a^2z^2-2a^2bz=0$$

こころで,

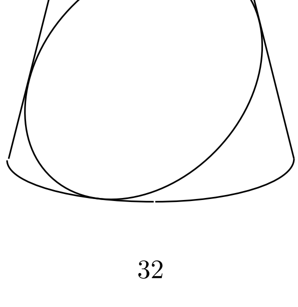
$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\left(\frac{z-h}{-hx}\right)^2-1$$

と②により

$$(b-h)z-bh=\pm bhx$$

よって切り口は平面である.

$\boxed{58}$ 図のように円錐台に楕円柱を穿去するとき，交周の長さを求めよ．上径，下径，高が与えられていいるとする.

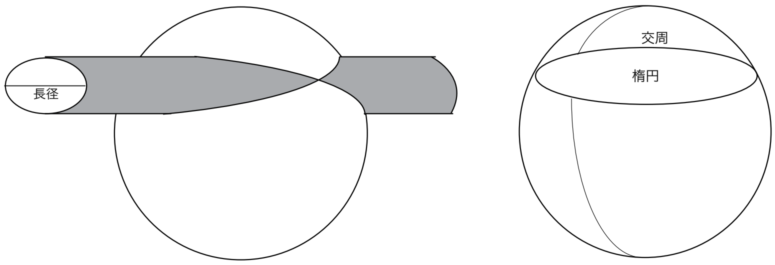


穿去の仕方は$\boxed{57}$とは違うが，$\boxed{56}$と同じである．すなわち交周は円錐を斜めに切った切り口になる．$\boxed{56}$と同じようにして

$$横^2 = 上 \cdot 下, \quad 斜^2 = \left(\frac{上 + 下}{2}\right)^2 + 高^2$$

横を短径，斜を長径として楕円周長を求めればよい．

$\boxed{59}$ 図のように球から楕円柱を穿去したときの交周長を求めよ．長径が与えられているとする．



切り口は円[1] で，その直径は長径になる．だから 交周長 = 長径 $\times \pi$

注 1) 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots\cdots ①$ と楕円柱 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(z-p)^2}{b^2} = 1 \cdots\cdots ②$ との交線が円になる証明.

まず円と楕円が接する条件を調べるために，$x^2 + z^2 = 1$ を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(z-p)^2}{b^2} = 1$ へ代入して 判別式 $= 0$ より

$$a^4 - a^2 + b^2 + a^2p^2 - a^2b^2 = 0 \cdots\cdots ③$$

この条件のもとで，切り口が平面になることを示す．①②より x を消去し，③を代入して

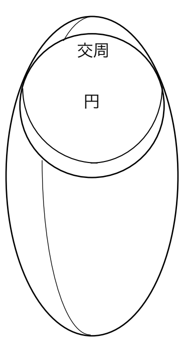
$$\underline{(a^2-b^2)z^2 - 2pa^2z + a^2 - a^4} - b^2y^2 = 0$$

③より $\underline{\qquad\qquad}$ の 判別式 $= 0$ であることがわかるので,

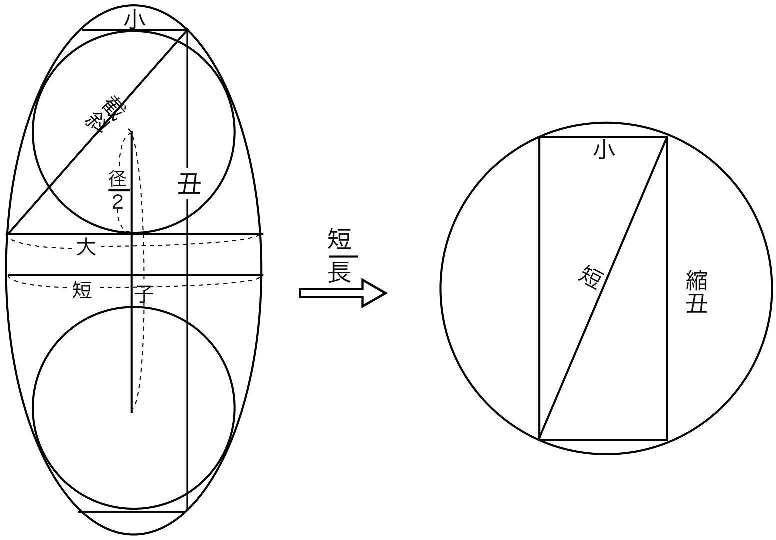
$$(a^2-b^2)z - 2pa^2 \pm by = 0$$

よって切り口は平面である．

$\boxed{60}$ 図のように回転楕円体から円柱を穿去したときの交周長を求めよ．楕円と円柱は二箇所で接している．長径，短径，円柱径が与えられているとする．



回転楕円体を $\dfrac{短}{長}$ 倍して球に変換すると，㉟によりその交周は円周である．従って，本問の交周は楕円周である．仍て截斜を長径とし，円柱径を短径とする楕円周になる．



$$截斜 = \sqrt{径^2 + \left(\frac{上+下}{2}\right)^2}$$

だから $\dfrac{上+下}{2}$ が求まればよい．算法助術 84 の公式より

$$子^2 = \frac{(長^2 - 短^2)(短^2 - 径^2)}{短^2}$$

$丑 = 子 + 径$ とすると $縮丑 = \dfrac{短}{長}丑$

$$小^2 + 縮丑^2 = 短^2$$

$$長^2小^2 + 短^2(子+径)^2 = 長^2短^2$$

$$長^2小^2 + (長^2 - 短^2)(短^2 - 径^2) + 2\,子径短^2 + 径^2短^2 - 長^2短^2 = 0$$

$$2\,子径短^2 = 短^4 + 長^2径^2 - 長^2小^2 - 2\,短^2径^2$$

自乗して整理すると

$$(長^2小^2 + 長^2径^2 - 短^4)^2 = 4\,長^2径^2(長^2 - 短^2)\,小^2$$

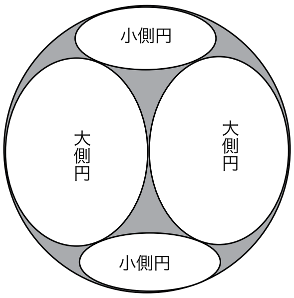
平方に開いて

$$長^2小^2 - 2\,長径\sqrt{長^2 - 短^2}小 + 長^2径^2 - 短^4 = 0$$

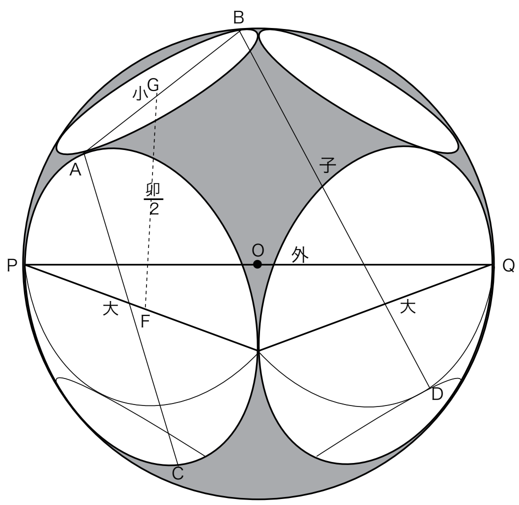
この小に関する二次方程式の二解が上と下であるので，

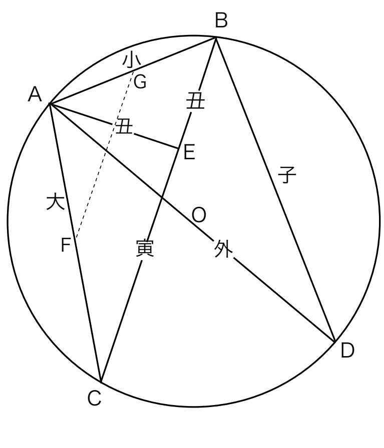
$$\frac{上+下}{2} = \frac{径\sqrt{長^2 - 短^2}}{長}$$

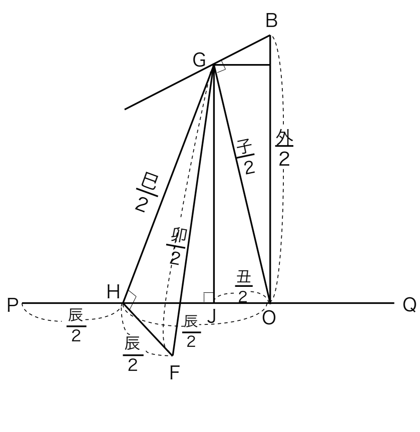
$\boxed{61}$ 図のように球から大小各二箇の楕円柱を穿去したとき，球の残りの表面積 (黒覚積) を求めよ．球の直径が与えられているとする．



各楕円柱との交周は円であり，その径は大小楕円の長径である．よって大 4 個，小 4 個の球闕の表面積を求め，球全体の表面積から引けばよい．球径を外とする．







$$大 = \frac{外}{\sqrt{2}}$$

$$小^2 = 外^2 - 子^2 \cdots\cdots ①$$

$$丑 = \frac{小}{\sqrt{2}} \cdots\cdots ②$$

$$寅 = \frac{大 \cdot 子}{外} = \frac{子}{\sqrt{2}} \cdots ③$$

$卯 = 丑 + 寅$ とすると $卯 = \dfrac{小}{\sqrt{2}} + \dfrac{子}{\sqrt{2}}$

$辰 = \dfrac{外}{2} \cdots\cdots ④$ とすると

$$\left(\frac{巳}{2}\right)^2 = \left(\frac{卯}{2}\right)^2 + \left(\frac{辰}{2}\right)^2$$

より

$$巳^2 = \frac{1}{2}小^2 + 小子 + \frac{1}{2}子^2 - \frac{外^2}{4} \cdots\cdots ⑤$$

$\triangle GHO$ に双股弦の術を使うと

$$2\,午辰 = 子^2 + 辰^2 - 巳^2 \cdots\cdots ⑥$$

$\triangle BGO$ において $午外 = 子小$ だから $午 = \dfrac{子小}{外}$，これと④⑤を⑥に代入して

$$子小 = \frac{子^2}{2} + \frac{外^2}{2} - \frac{小^2}{2} - 子小$$

①を代入して

$$子 - 2\,小 = 0$$

自乗して

$$子^2 - 4\,小^2 = 0$$

$$子^2 - 4(外^2 - 子^2) = 0$$

$$\therefore \quad 子 = \frac{2}{\sqrt{5}}外$$

ところで

$$小矢 = \frac{1}{2}(外 - 子) = \frac{1}{2}\left(外 - \frac{2}{\sqrt{5}}外\right)$$

$$大矢 = \frac{1}{2}(外 - 大) = \frac{1}{2}\left(外 - \frac{1}{\sqrt{2}}外\right)$$

だから，$\boxed{7}$により

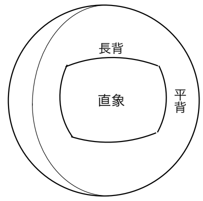
$$大覓積 = 外 \cdot 大矢 \cdot \pi$$

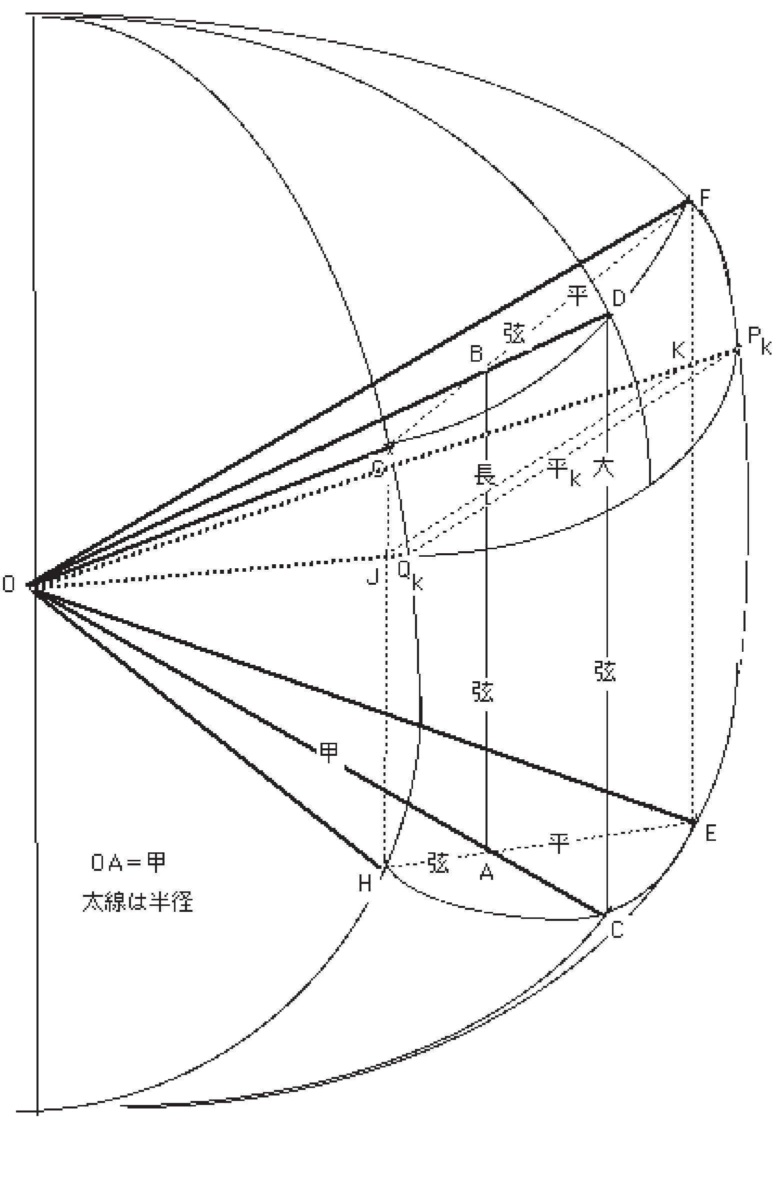
$$\text{小覔積} = \text{外} \cdot \text{小矢} \cdot \pi$$

よって

$$\text{黒覔積} = \text{外}^2\pi - 4\,\text{大覔積} - 4\,\text{小覔積} = (\sqrt{3.2} + \sqrt{2} - 3)\,\text{外}^2\pi$$

$\boxed{62}$ 円径と長弦，平弦が与えられたときの直象の面積を求める．





$\dfrac{\text{大弦}}{n} = \text{子}$,　$\text{弦}_k = \text{天} \cdot (\text{大弦})$ とする.　　$\text{甲}^2 = \left(\dfrac{\text{径}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\text{平}}{2}\right)^2$

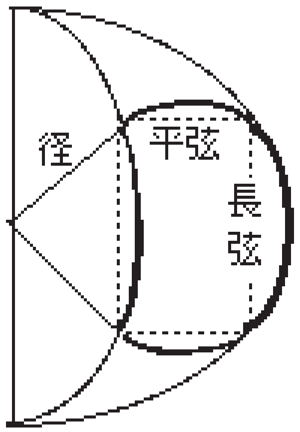


fig.1

$\text{甲} : \text{長弦} = \dfrac{\text{径}}{2} : \text{大弦}$ より $\text{大弦} = \dfrac{\text{長弦} \cdot \text{径}}{2\,\text{甲}} = \dfrac{\text{長弦} \cdot \text{径}}{\sqrt{\text{径}^2 - \text{平}^2}}$

$\text{斜}_k : \text{子} = \text{径} : \text{径}_k$ で, $\text{斜}_k = \dfrac{\text{径} \cdot \text{子}}{\text{径}_k}$(fig.2)

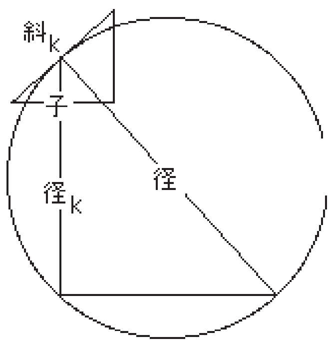


fig.2

$\boxed{21}$ により 某積 $= S_k = \text{平}_k \cdot \text{斜}_k$ (fig.3)

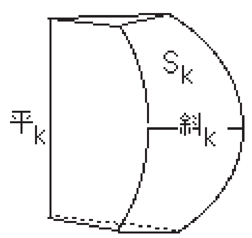


fig.3

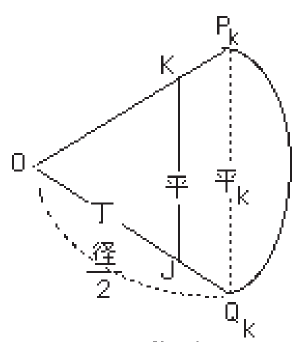
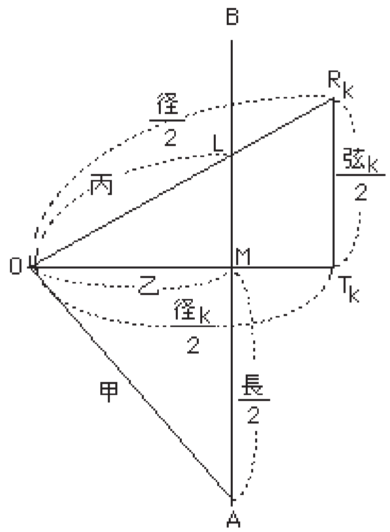
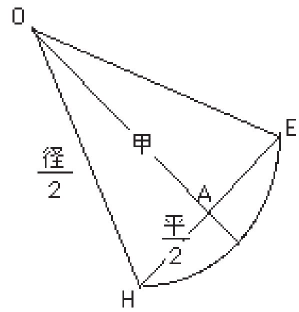
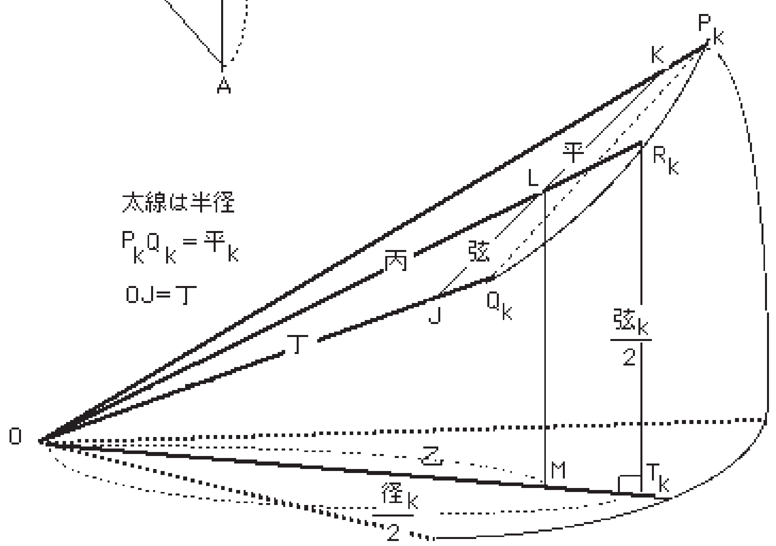


fig.4

$$丁 : \frac{径}{2} = 平 : 平_k \qquad (OJ : OQ_k = JK : Q_kP_k) \text{ より } 平_k = \frac{径 \cdot 平}{2\,丁} \text{ (fig.4)}$$







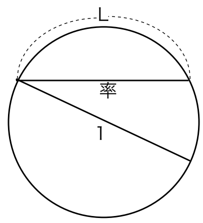
$$S_k = 斜_k \cdot 平_k = \frac{径^2 \cdot 平 \cdot 子}{2\,丁 \cdot 径_k}$$

$$丁^2 = 丙^2 + \frac{平^2}{4} = \frac{乙^2 \cdot 径^2}{径_k^2} + \frac{平^2}{4} \qquad \left(丙 : 乙 = \frac{径}{2} : \frac{径_k}{2} \quad \text{より} 丙 = \frac{乙 \cdot 径}{径_k}\right)$$

$$\begin{aligned}
4\,丁^2径_k^2 &= 4\,乙^2 \cdot 径^2 + 平^2径_k^2 \qquad \left(乙^2 = 甲^2 - \left(\frac{長}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(径^2 - 平^2 - 長^2) \quad \text{より}\right) \\
&= (径^2 - 平^2 - 長^2)\,径^2 + 平^2径_k^2 \qquad (径_k^2 = 径^2 - 弦_k^2 = 径^2 - 天^2大^2 \quad \text{より}) \\
&= (径^2 - 平^2 - 長^2)\,径^2 + 平^2(径^2 - 天^2大^2) \\
&= (径^2 - 平^2 - 長^2)\,径^2 + 平^2\left(径^2 - 天^2\frac{長^2径^2}{径^2 - 平^2}\right) \\
&= (径^2 - 長^2)\,径^2 - 天^2平^2\frac{長^2径^2}{径^2 - 平^2} \\
&= (径^2 - 長^2)\,径^2 - 天^2(径^2 - 長^2)\frac{長^2平^2径^2}{(径^2 - 長^2)(径^2 - 平^2)}
\end{aligned}$$

$$= (\text{径}^2 - \text{長}^2)\,\text{径}^2(1 - \text{率}^2\text{天}^2) \qquad \left(\text{率}^2 = \frac{\text{長}^2\text{平}^2}{(\text{径}^2 - \text{長}^2)(\text{径}^2 - \text{平}^2)} \quad \text{とおく}\right)$$

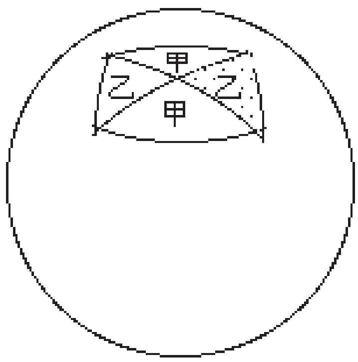
$$\begin{aligned}
S_k &= \frac{\text{径}\cdot\text{平}\cdot\text{子}}{\sqrt{\text{径}^2 - \text{長}^2}\sqrt{1 - \text{率}^2\text{天}^2}} \\
&= \frac{\text{径}\cdot\text{平}\dfrac{\text{長}\cdot\text{径}}{\sqrt{\text{径}^2 - \text{平}^2}}\cdot\dfrac{1}{n}}{\sqrt{\text{径}^2 - \text{長}^2}\sqrt{1 - \text{率}^2\text{天}^2}} \\
&= \frac{\text{率}\cdot\text{径}^2}{\sqrt{1 - \text{率}^2\text{天}^2}}\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$



立表第九弧背率により $\dfrac{\text{率}}{\sqrt{1 - \text{率}^2\text{天}^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$ の畳数は, 直径が 1 で率を弦とする弧背長 L である．ゆえに

$$\text{直象面積} = \text{径}^2 L$$

$\boxed{63}$ 円径と長弦, 平弦が与えられたときの直象を 2 つの大円で 4 分割するとき, 甲, 乙の面積を求めよ．



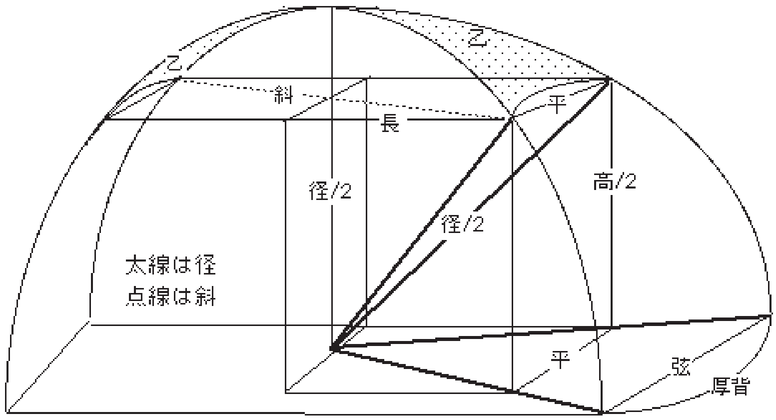
$$\text{長}^2 + \text{平}^2 = \text{斜}^2$$

$$\text{径}^2 - \text{斜}^2 = \text{高}^2$$

$$\frac{\text{平}}{\text{斜}} = \frac{\text{弦}}{\text{径}} \equiv \text{大弦}$$

直径 1 の円での大弦に対する弧背を大背とする．即ち 大背 $\times$ 径 $=$ 厚背

㉒ により 櫛形背覓責 $=$ 厚背 $\times$ 径 $=$ 大背 $\times$ 径^2



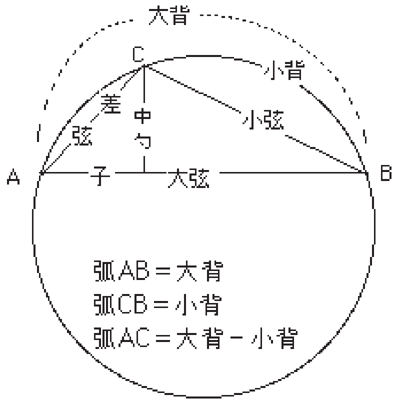
$\boxed{62}$の長弦を高に換えて直象面積を求める.

$$率^2 = \frac{高^2平^2}{(径^2-高^2)(径^2-平^2)} = \frac{高^2平^2}{斜^2(径^2-平^2)} \equiv 小弦^2$$

直径 1 の円での小弦に対する弧背を小背とする．即ち 直象面積 $=$ 小背 $\times$ 径^2

$$乙責 = \frac{櫛形背覓責 - 直象面積}{2} = \frac{(大背-小背)\ 径^2}{2}$$

中勺^2 $=$ 小弦^{2}差弦^2[1] だから



$$子^2 = 差弦^2 - 中勺^2 = 差弦^2 - 小弦^2差弦^2 = 差弦^2 - \frac{高^2平^2}{斜^2(径^2-平^2)} \times 差弦^2 = \frac{径^2長^2差弦^2}{斜^2(径^2-平^2)}$$

$$\therefore \quad 2\,子 \times 大弦 = \frac{2\,差弦 \cdot 大弦 \cdot 径 \cdot 長}{斜\sqrt{径^2-平^2}} \cdots\cdots ①$$

双股弦の術により

$$子 \times 大弦 = 大弦^2 + 差弦^2 - 小弦^2 \cdots\cdots ②$$

①②より

$$2\,差弦 \cdot 長 \cdot 平 \cdot 径\sqrt{径^2-平^2} - (径^2-平^2)\ 平^2 - (径^2-平^2)\ 差弦^2斜^2 + 高^2平^2 = 0$$

斜^2 − 平^2 = 長^2 だから

$$2\,\text{差弦}\cdot\text{長}\cdot\text{平}\cdot\text{径}\sqrt{\text{径}^2-\text{平}^2}-(\text{径}^2-\text{平}^2)\,\text{差弦}^2\text{斜}^2-\text{長}^2\text{平}^2=0$$

$$-\frac{\text{長}^2\text{平}^2\text{径}^2}{\text{斜}^2}+2\,\text{差弦}\cdot\text{長}\cdot\text{平}\cdot\text{径}\sqrt{\text{径}^2-\text{平}^2}-(\text{径}^2-\text{平}^2)\,\text{差弦}^2\text{斜}^2-\text{長}^2\text{平}^2+\frac{\text{長}^2\text{平}^2\text{径}^2}{\text{斜}^2}=0$$

$$-\left(\frac{\text{長}\cdot\text{平}\cdot\text{径}}{\text{斜}}-\sqrt{\text{径}^2-\text{平}^2}\text{差弦}\cdot\text{斜}\right)^2+\frac{\text{長}^2\text{平}^2\text{高}^2}{\text{斜}^2}=0$$

$$\frac{\text{長}\cdot\text{平}\cdot\text{径}}{\text{斜}}-\sqrt{\text{径}^2-\text{平}^2}\text{差弦}\cdot\text{斜}-\frac{\text{長}\cdot\text{平}\cdot\text{高}}{\text{斜}^2}=0$$

$$\therefore\quad \text{差弦}=\frac{(\text{径}-\text{高})\,\text{長}\cdot\text{平}}{\text{斜}^2\sqrt{\text{径}^2-\text{平}^2}}\equiv\text{乙弦}$$

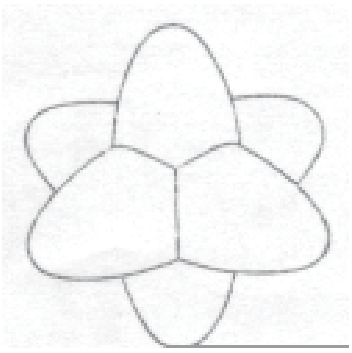
直径 1 の円での乙弦に対する弧背を 大背 − 小背 ≡ 乙背 とする．

$$\therefore\quad \text{乙面積}=\frac{\text{乙背}\times\text{径}^2}{2}$$

甲面積は平と長を入替えればよい．

注 1) 所謂正弦定理で，和算では三原適等という．松永良弼が「円中三原適等」で証明している．

$\boxed{64}$ 長径と短径が与えられた，合同な 3 個の回転楕円体が互いに直交した立体の体積を求めよ．



$$2\,\text{面}^2=\text{斜}^2$$

$$\text{縮面}=\frac{\text{短}}{\text{長}}\times\text{面}$$

$$\text{縮面}^2+\text{斜}^2-\text{短}^2=0$$

だから

$$\text{短}^2\text{面}^2+2\,\text{長}^2\text{面}^2-\text{長}^2\text{短}^2=0$$

$$\therefore\quad \text{面}^2=\frac{\text{長}^2\text{短}^2}{2\,\text{長}^2+\text{短}^2}$$

$$\therefore\quad \text{短}^2-\text{面}^2=\frac{\text{短}^2(\text{長}^2+\text{短}^2)}{2\,\text{長}^2+\text{短}^2}$$

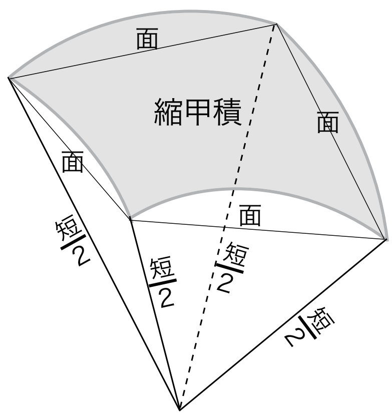
$\boxed{62}$ で長弦，平弦を面に換えて，径を短に換えて率を求める．

$$率^2 \equiv \frac{面^4}{(短^2 - 面^2)^2} = \frac{長^4}{(長^2 + 短^2)^2}$$

$$\therefore \quad 率 = \frac{長^2}{長^2 + 短^2}$$

この率に対して，$\boxed{62}$より求まる方象面積を S とする．

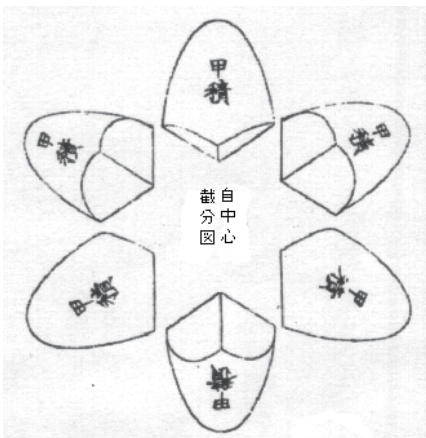
$$縮甲責 = \frac{短 \times S}{6}$$

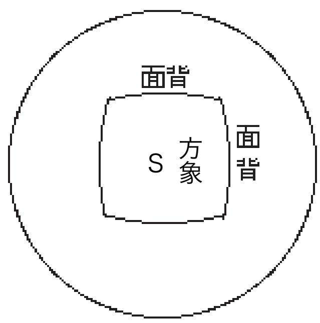


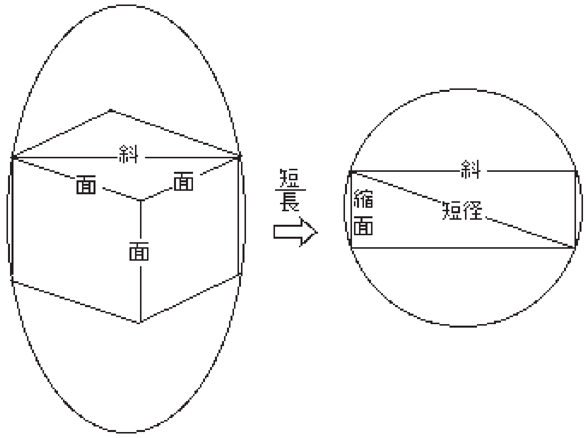
$$甲責 = \frac{長}{短} \times 縮甲責$$

だから求める体積 V は

$$V = 6\,甲責 = 長 \times S$$

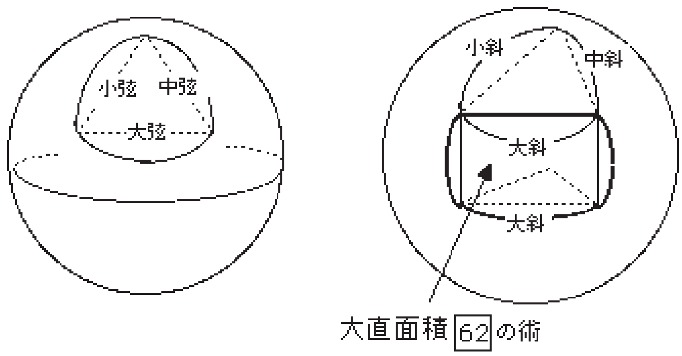






$\boxed{65}$ 球面三角形 (三斜象) の面積を求めよ．大弦，中弦，小弦と直径が与えられているとする．
球面上で反対側にも同じ三斜をつくる．

$$球の表面積 - 大直面積 - 中直面積 - 小直面積 = 2 \times 三斜面積$$



> 62によって大直面積を求める．
>
> $$甲弦^2 = \frac{大^2高^2}{(径^2 - 高^2)(径^2 - 大^2)} = \frac{大^2高^2}{仮^2 \cdot 東} \quad (径^2 - 高^2 = 仮径^2,\ 径^2 - 大^2 = 東とおく)$$
>
> $$甲弦 = \frac{大 \cdot 高}{仮\sqrt{東}}$$
>
> $$大直面積 = 甲背 \times 径^2$$

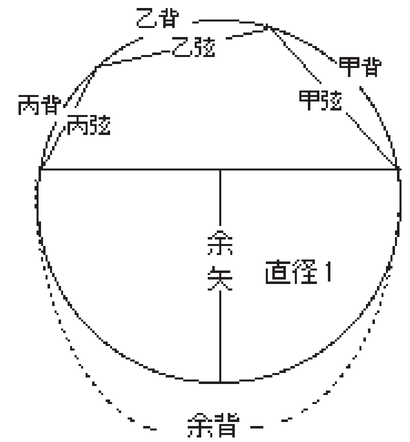
$$乙弦 = \frac{中 \cdot 高}{仮\sqrt{西}}$$

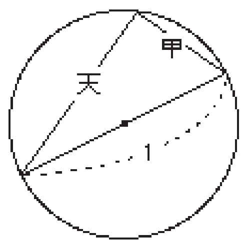
$$丙弦 = \frac{小 \cdot 高}{仮\sqrt{南}}$$

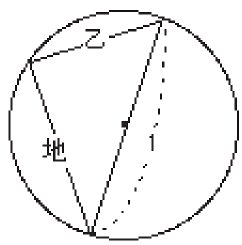
同じようにして 中直面積 $=$ 乙背 $\times$ 径^2, 小直面積 $=$ 丙背 $\times$ 径^2

$$三斜面積 = \frac{1}{2}\left\{\pi 径^2 - (甲背 + 乙背 + 丙背)\ 径^2\right\} = \frac{1}{2}(余背) \cdot 径^2$$

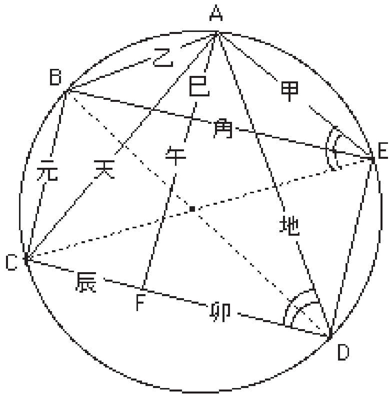
下図で余矢を求める．(余矢がわかると2より余背が求まる)



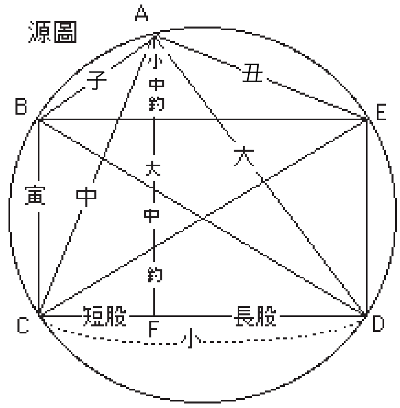




$$
\begin{aligned}
天^2 = 1 - 甲^2 = 1 - \frac{大^2高^2}{仮^2 \cdot 東} \\
&= \frac{仮^2 \cdot 東 - 大^2高^2}{仮^2 \cdot 東} \\
&= \frac{仮^2(径^2 - 大^2) - 大^2(径^2 - 仮^2)}{仮^2 \cdot 東} \\
&= \frac{(仮^2 - 大^2)\,径^2}{仮^2 \cdot 東} \\
&= \frac{子^2径^2}{仮^2 \cdot 東}
\end{aligned}
$$



直径1



仮径

大弦・中弦・小弦を通る
平面で球を切った切り口

$寅^2 = 仮^2 - 小^2$

$$\therefore\quad 天 = \frac{子 \cdot 径}{仮\sqrt{東}}$$

同じく $地 = \dfrac{丑 \cdot 径}{仮\sqrt{西}}$, $人 = \dfrac{寅 \cdot 径}{仮\sqrt{南}}$

直径 1 の円 (上左図) において $甲 : 1 = 卯 : 地$ より $卯 = 甲 \cdot 地$

同じく $辰 = 乙 \cdot 天$

$$\begin{aligned}
角 = 卯 + 辰 &= 甲 \cdot 地 + 乙 \cdot 天 \\
&= \frac{大 \cdot 高}{仮\sqrt{東}} \cdot \frac{丑 \cdot 径}{仮\sqrt{西}} + \frac{中 \cdot 高}{仮\sqrt{西}} \cdot \frac{子 \cdot 径}{仮\sqrt{東}} \\
&= \frac{高 \cdot 径 \cdot \underline{大 \cdot 丑}}{\sqrt{東西} \cdot 仮 \cdot \underline{仮}} + \frac{高 \cdot 径 \cdot \underline{中 \cdot 子}}{\sqrt{東西} \cdot 仮 \cdot \underline{仮}} \\
&= \frac{高 \cdot 径 \cdot 小}{仮\sqrt{東西}}
\end{aligned}$$

________ の計算

源図 (上右図) において $丑 : 仮 = 長股 : 大$ より $\dfrac{大 \cdot 丑}{仮} = 長股$

同じく $\dfrac{中 \cdot 子}{仮} = 短股$

$$\therefore\quad \frac{大 \cdot 丑}{仮} + \frac{中 \cdot 子}{仮} = 長股 + 短股 = 小$$

$巳 = 甲 \cdot 乙$, $午 = 天 \cdot 地$　(三原適等)

$$\begin{aligned}
元 = 午 - 巳 &= 天 \cdot 地 - 甲 \cdot 乙 \\
&= \frac{子 \cdot 径}{仮\sqrt{東}} \cdot \frac{丑 \cdot 径}{仮\sqrt{西}} - \frac{大 \cdot 高}{仮\sqrt{東}} \cdot \frac{中 \cdot 高}{仮\sqrt{西}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{子\cdot丑\cdot径^2}{仮^2\cdot\sqrt{東西}} - \frac{大\cdot中\cdot高^2}{仮^2\sqrt{東西}} \\
&= \frac{子\cdot丑\cdot径^2}{仮^2\cdot\sqrt{東西}} - \frac{大\cdot中\cdot(径^2-仮^2)}{仮^2\sqrt{東西}} \\
&= \frac{子\cdot丑\cdot径^2}{仮\cdot仮\sqrt{東西}} - \frac{大\cdot中\cdot径^2}{仮\cdot仮\sqrt{東西}} + \frac{大\cdot中}{\sqrt{東西}}
\end{aligned}
$$

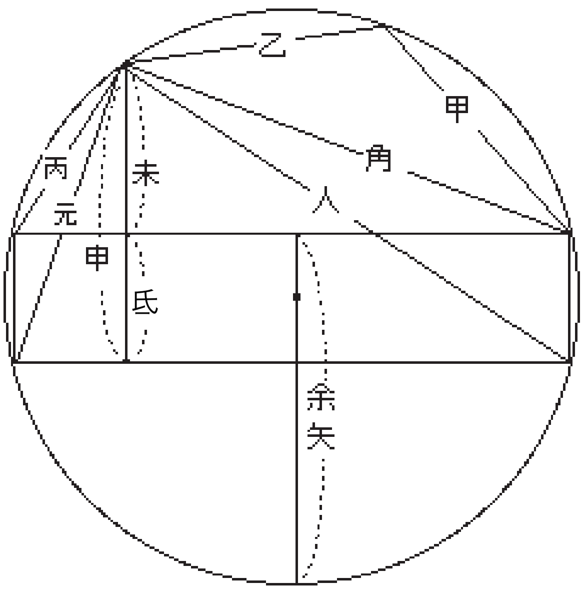
源図で $\dfrac{子\cdot丑}{仮} = 小中釣$, $\dfrac{大\cdot中}{仮} = 大中釣$ だから　(三原適等)

$$\frac{子\cdot丑}{仮} - \frac{大\cdot中}{仮} = 小中釣 - 大中釣 = -寅$$

$$\therefore\quad 元 = -\frac{寅\cdot径^2}{仮\sqrt{東西}} + \frac{大\cdot中}{\sqrt{東西}}$$

次に未と申を求める.

$$未 = 角\cdot丙,\ 申 = 人\cdot元 \quad (三原適等)$$



直径1

$$
\begin{aligned}
氏 &= 申 - 未 = 人\cdot元 - 角\cdot丙 \\
&= \frac{寅\cdot径}{仮\sqrt{南}}\cdot\left(-\frac{寅\cdot径^2}{仮\sqrt{東西}} + \frac{大\cdot中}{\sqrt{東西}}\right) - \frac{高\cdot径\cdot小}{仮\sqrt{東西}}\cdot\frac{小\cdot高}{仮\sqrt{南}} \\
&= \frac{寅\cdot大\cdot中\cdot径}{仮\cdot北} - \frac{寅^2径^3}{仮^2北} - \frac{高^2小^2径}{仮^2北} \qquad (北 = \sqrt{東西南}) \\
&= \frac{\underline{\underline{寅\cdot大\cdot中}}\cdot径}{\underline{仮}\cdot北} - \frac{(仮^2-小^2)\,径^3}{仮^2北} - \frac{(径^2-仮^2)\,小^2径}{仮^2北} \\
&= \frac{\underline{\underline{寅\cdot大\cdot中}}\cdot径}{\underline{仮}\cdot北} - \frac{径^3}{北} + \frac{小^2径}{北}
\end{aligned}
$$

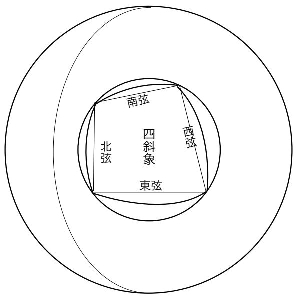
$\underline{\qquad\qquad\quad}$ の部分の計算

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{寅}^2\text{大}^2\text{中}^2}{\text{仮}^2} &= \frac{(\text{仮}^2-\text{小}^2)\,\text{大}^2\text{中}^2}{\text{仮}^2}\\
&= \text{大}^2\text{中}^2 - \frac{\text{大}^2\text{中}^2\text{小}^2}{\text{仮}^2}\\
&= \text{大}^2\text{中}^2 - \text{酉}^2\text{大}^2 \quad (\text{三原適等})\\
&= \text{大}^2(\text{中}^2-\text{酉}^2)\\
&= \text{大}^2\text{戌}^2
\end{aligned}
$$

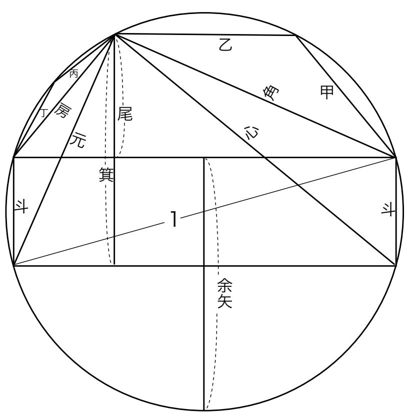
$$
\therefore\quad \frac{\text{寅}\cdot\text{大}\cdot\text{中}}{\text{仮}} = \text{大}\cdot\text{戌} = \frac{\text{大}^2+\text{中}^2-\text{小}^2}{2} \quad (\text{双股弦の術})
$$

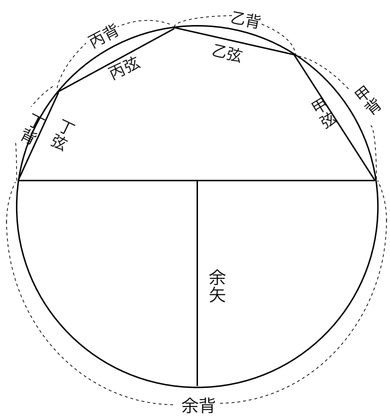
従って，$\text{氐} = \dfrac{(\text{大}^2+\text{中}^2-\text{小}^2)\,\text{径}}{2\,\text{北}} - \dfrac{\text{径}^3}{\text{北}} + \dfrac{\text{小}^2\text{径}}{\text{北}} = \dfrac{(\text{大}^2+\text{中}^2+\text{小}^2)\,\text{径}}{2\,\text{北}} - \dfrac{\text{径}^3}{\text{北}}$ となり，この氐に対して $\text{余矢} = \dfrac{1}{2}(1+\text{氐})$ となる．

$\boxed{66}$ 図のように，球面上で同一平面上にある 4 点によってできる四角形 (四斜象) の面積を求めよ．東弦，西弦，南弦，北弦と直径が与えられているとする．



$\boxed{65}$と同様にする．



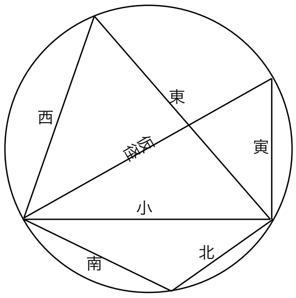


直径1

四斜面積 $= \dfrac{1}{2}$(余背) $\cdot$ 径^2

上図で余矢を求める．(余矢がわかると$\boxed{2}$より余背が求まる) 前問で大中弦を東西弦に換えて，

仁 $=$ 径^2 $-$ 東^2，　義 $=$ 径^2 $-$ 西^2，　礼 $=$ 径^2 $-$ 南^2，　智 $=$ 径^2 $-$ 北^2 とする．



$$角 = \frac{高 \cdot 径 \cdot 小}{仮\sqrt{仁義}}$$

$$元 = -\frac{寅 \cdot 径^2}{仮\sqrt{仁義}} + \frac{東 \cdot 西}{\sqrt{仁義}}$$

角，元の東西を南北に換えて房心とする．

$$房 = \frac{高 \cdot 径 \cdot 小}{仮\sqrt{礼智}}$$

$$心 = \frac{寅 \cdot 径^2}{仮\sqrt{礼智}} + \frac{南 \cdot 北}{\sqrt{礼智}}$$

尾 $=$ 角 $\cdot$ 房，　箕 $=$ 元 $\cdot$ 心　　(三原適等)

斗 $=$ 箕 $-$ 尾 で求めた斗に対して 余矢 $= \dfrac{1}{2}(1 +$ 斗$)$ である．

算法求積通考巻之三終

ページ数の都合により，巻四・五は付属 CD-ROM に集録しました．ご了承ください．