■はじめに

『算法求積通考』は和算の集大成といえる算書である．和田寧の円理豁術に関するすべてを網羅した，初学者向けの完成度の高い教科書で，円理豁術の問題は本書に集約されたといってよい．畳数表などの名前の付け方は和田とは異るが，その思想は和田を踏襲している．例えば和田が龍商陽表，龍商陰表と呼んだ円理畳数表 (積分表) は，求積通考ではそれぞれ偶乗甲表，奇乗甲表となっており，この命名法は求積通考の方がわかりやすい．『求積通考』の構成は次のようになっている．

- 巻之一　序文，凡例，畳数表の作り方
- 巻之二　畳数表一覧，算題 1〜35
- 巻之三　算題 36〜66
- 巻之四　算題 67〜87
- 巻之五　算題 88〜105，跋文

以上の五巻はいずれも「長谷川善左衛門弘閲　彦根藩内田半吾久命編」となっており，実質の著者は長谷川弘であろうと言われている．内田久命については明治前 [4] に，近江人物志 (滋賀県教育会編纂) 大正 6 年，P.743 からの引用として，次のようにある．

> 内田久命，通称半吾，岳湖と号す．彦根藩士である．文化 6 年 (1809)5 月七十人歩行に召し出され，24 俵 3 人扶持を受く．天保 6 年 (1835) 小納戸方用向取調役となる．嘉永元年 (1848) 病のため致仕す．致仕後も病間には毎月二三度は小納戸方に出勤すべきを命ぜらる．藩主井伊直弼の未だ埋木舎にあるや，日々久命を招き数学を学習されたという．直弼藩主となりし後，安政 3 年久命を擢んでて弘道館算術指南となす．明治元年 (1868)5 月 21 日没す．享年不詳．

2001 年より始まった自称「求積通考を読む会」は二ヶ月に一回開かれ，最初は会員の輪読という形であったが，いつの間にか筆者・小寺が担当することとなった．多少の出入りはあったが，本会に関わったメンバーを紹介しておきます．(敬称略)
岡山茂彦，直井功，前川太市，田村三郎，島野達雄，矢崎武人，大西正男，小寺 裕
特に，序文，跋文などの漢文訓読については島野達雄が担当した．『求積通考』の算題中に Villarceau の円が表れていることは直井功の発見である．このことについては数理解析研究所講究録 [3] に発表した．その他，いちいち書くことは出来ませんが，本書はこれらの方々の研究成果である．

また『求積通考』の先行研究としては深川 [1]，加藤 [2] がある．本書を書くについてはおおいに参考にさせていただいた．

『求積通考』は級数展開，区分求積法，二重積分などを駆使して解いており，現代の目から見れば不十分なことも多い．しかし，私は和算という限られた中でどのように考えたかを理解したく，現代数学ではなく，出来るだけ当時の考え方に従って解読を進めていった．これまで『求積通考』を全巻解説した書物はないので，この機会に本書のような注釈書を出すことは意味があると思います．

本書が和算，円理を理解する一助になれば幸いです．

■**凡例**

- 本書は『算法求積通考』紀元二千五百三十四年 (1874) 第一月・東京書林版本 (小寺裕蔵) を底本として, 巻之一, 二について注釈, 解説をつけたものである．巻之三, 四, 五は次回の報告集で予定している．
- 原文は影印 (CD にて添付) を見ていただくとわかるので, 翻刻はしなかった．
- 『求積通考』の内容を現代の言葉と数式で書き下したもので逐語訳ではない．その際できるだけ当時の考え方を復元するように努めた．
- 本文中に随時注を付け, さらに詳しく解説を施した．
- 漢字は常用漢字に改めた．

求積通考
天不能盖　地不能載[1]

【訓読】天，盖うことあたわざれば，地，載すことあたわず．

算法求積通考序
夫理者．天地間自然所有．而無象亦無數．凡有物必有象．有象則数理自然備矣．故能究自然之理．而用之．則成千變萬化無究之活用．是非別有一種之理．惟随其所用有異耳．由是觀之．物雖萬殊．理則一途．凡無有一理不實者．然其悟入之．非凡智所及．故自古至今．通一理者或鮮矣．盖理囙象顯．術因理生．其顯數者術也．所謂数術者．究理之学．而人能學而究之．則目前明白而通萬理之要術也．抑数之為術．假設象以為題．々定而術自備．其為觧．亦無少加私意．故應題意而究其理．是筭法之本位也．術家能知諸術一理．則自加減乗除．至方圓求積之薀奥．亦何患乎不得其術也．其得彼術而不得此術者．未知其理也．數有多少二極．而多極與少極反對．故以多極得少極．以少極得多極．又囙多少二極．各得空數．是其理歸一故也．学者不能究此理．則不能知其術之薀奥矣．吾關夫子．以天縱之才．究天地自然之實理．發明諸術．以傳後世．今日筭法之密且精．盖　夫子之有造也．宜乎學数術者．至今無不尸祝尊崇．以仰餘教者矣．先考西磻先生能得夫子之遺意．而發明極形術．以弘于世．其功亦大．先考毎謂曰．
　夫子者算聖也．予雖發明極形術．其理胚胎于　夫子交商法．但以　夫子不著書傳其術．後人或謂別有所發明者．猶未盡於　夫子也．若使　夫子而在今世．今以難題者．一目必知其起源．亦更有許多發明矣．今内田久命著書若干巻．予閲之．其盡方圓究理之薀奥．以示理一．又其觧明而術甚簡捷．是皆原
夫子之餘意．而奉先考之遺教而已．
弘化元年冬　仙臺長谷川善左衛門弘撰

【訓読】算法求積通考に序す．それ理は，天地の間，自然にあるところにして，象なく，また数なし．およそ物あれば必ず象あり．象あればすなわち数理，自然にそなう．ゆえによく自然の理をきわめて，これを用いれば，すなわち千変万化，無究の活用をなす．これ，別に一種の理あるにあらず．ただ，その用いるところに随い，異あるのみ．これによりてこれを観れば，物，萬殊といえども，理すなわち一途．およそ一理を貫かざるもののあることなし．しかればそれ，これを悟入するは，凡智の及ぶところにあらず．ゆえに古より今に至るまで，一理に通ずる者，あるいは鮮し．けだし，理は象によりてあらわれ，術は理によりて生ず．それ，数をあらわすものは術なり．いわゆる数術は究理の学にして，人よく学んでこれを究めれば，すなわち目前明白にして萬理に通ずるの要術なり．そもそも数の術たるや，たとい象をもうけ，もって題をなすとも，題，定まりて，術，おのずからそなう．それ，解をなす．また少しも私意を加うることなし．ゆえに題意に応じてその理を究む．これ算法の本意なり．術家よく諸術の一理たるを知れば，すなわち加減乗除より方円求積の薀奥に至るまで，またなんぞ患うや，その術をえざるを．それ，かの術をえて，この術をえざるは，いまだ，その理を知らざるなり．数に多少の二極あり．しこうして多極[2]は少極[3]と反対す．ゆえに多極をもって少極をえ，少極をもって多極をえる．また多少二極によりて，おのおの空数[4]をえる．これその理，一に帰すゆえなり．学者，この理を究めることあたわざれば，すなわちその術の薀奥を知ることあたわず．わが関夫子，天縦[5]の才をもって，天地自然の実理を究め，諸術を発明し，もって後世に伝う．今日の算法の密かつ精，けだし夫子の有造なり．宜なるかな，数術を学ぶ者，今に至りて尸祝[6]尊崇し，もって餘教[7]を仰がざる者のなきは．先考西磻先生[8]，よく夫子の遺意をえて，極形術を発明し，もって世にひろむ．その功，また大なり．先考，つねに謂いていわく，夫子は算聖なり．予，極形術[9]を発明すといえども，

その理は夫子の交商術[10] に胚胎す．ただ夫子，書を著してその術を伝えざるをもって，後人あるいは別に発明するところあるというは，なおいまだ夫子よりつくさざるなり．もし夫子をして今世にあらしめば，今もって難題たるものは，一目必ずその起源を知り，また更に許多発明あるべし．いま内田久命[11]，書，若干の巻を著す．予，これを閲れば，それ方円究理の薀奥をことごとくし，もって理，一なるを示す．またその解，明らかにして，術はなはだ簡捷．これ皆，夫子の餘意[12] にもとづき，而して先考の遺教を奉じるのみ．弘化元年 (1844) の冬，仙台，長谷川善左衛門弘[13]，撰ぶ．

凡例

一，凡方円窮理の術を学はんと欲するものは先，招差埰術綴術等及極数の理明かならざれば其蘊奥を窮る事難し．故此書始めに極数の題を設けて其解義を詳にし，又図形数件を挙て多少の極を用ふる事を委曲に示す．学者能く此理を窮るときは立表の起源を始め雑題に至るまでおのづから明かなるべし．

一，巻中都て傍書或は図形の書入は字画を省略して記す物あり．是繁を厭ひてなり，又題中数字を以て名義をなすものも解中略して其一字或は二字を用ふる類少からず．其題に随て察すべし．

一，図画は真形に近きを以て要とす．然れども真形を画くときは却て其形に見え難きものあり．是全く常に虚図を画きて真形を視ること稀なる故なり．仍て巻中真形却て解し難き物に至りては虚図を用ふるもの又少からず．此書元来学者解し易からん事を要とすれはなり．今真虚の図形一二を挙て左に示す．

右に擧る所の円壔に円を穿つ真虚の図形に依て真形却て其形に見え難きことを察すべし．又下図は本文に拘はらずといへども，只球の真形をあらはして，是にも又虚図の有る事を示さん為のみ．看る人必ず怪しぶ事勿れ．

注 1) 出典不詳．管子・侈靡第三十五に「天之所覆，地之所載，斯民之良（あるいは養）也（天の覆うところ，地の載すところ，これ民のやしないなり）」とある．

注 2) 無限大

注 3) 無限小

注 4) ゼロ

注 5) うまれつき

注 6) 故人をあがめること

注 7) 故人の教え

注 8) 長谷川寛 (1782〜1838) の号．初め藤次郎といい，後善左衛門と改める．日下誠に学ぶ．弟子を教育することに長け，多くの門弟を得て，長谷川流という関流とは独立した一派を形成した．

注 9) 極形術とは，図形を変形して単純なる場合に導き，その関係式を還源してもとの図形の関係を求めるもの．還源は一意的でないので，一般には正しくない．

注 10) 図形中のある 2 変数 x，y によって得る方程式が x，y に関して対称ならば，この x，y を互いに交商といい，その方程式を交商式という．主に極形術において使われる．

注 11) 長谷川弘の弟子

注 12) 言外にふくむ意味

注 13) 長谷川弘 (1810〜1887) は寛の嗣で，磻溪と号す．寛の後を継いで二代目長谷川善左衛門として長谷川道場の主となり，多くの弟子を育てた．内田久命はその一人である．本書に関連する人物の系譜は以下の通り．日下誠は関流宗家五伝とされる．

関 孝和－…－日下 誠 ┬ 長谷川寛 ── 長谷川弘 ── 内田久命
└ 和田 寧

算法求積通考巻之一
　　　　　長谷川善左衛門弘閲
彦根藩　内田半吾久命編

◯極数

極に多少の二数あり．多極とは多きこと無量にして遂に極に至るを云ふ．譬は円幾何大なりと云ふとも円規を失ふ理は曾てなし．然りといへども多極に至ては其円周遂に一直線をなす．依て多極は形ち在りといへども是を量ること能はず故虚とす．

評曰譬ば地は大なる球にして海陸供に皆球面なり．故地上は其行く所都て円周なりといへども平か (大なるときは山嶽幽谷の高低を論ぜず) にして直線上を行くが如し．此の如く里数に限りある地球すら円周直線に等し． 況(いわんや)多極に至ては何ぞ其円周一直線をなすことを得ざらんや．

少極とは少きこと無量にして遂に極に至るを云ふ．少極に至ては視るに形ち無く取るに像ち無し故少極は空とす．

多極数を以て少極数を求め少極数を以て多極数を求るときは左の如し．
$\dfrac{1}{\text{多極}} = \text{少極}$ 也，即空とす．
$\dfrac{1}{\text{少極}} = \text{多極}$ 也，即虚とす．

右極は無量の極にして有量の極とは等しからず．有量の極は所謂極形或適盡法を用ふる容題等に云所の極なり．必ず混すべからず．今極数を求る雑問一二を挙て左に示す．

(イ) $S = 10 + 10 \cdot 0.6 + 10 \cdot 0.6^2 + 10 \cdot 0.6^3 + \ \cdots\cdots$ 幾何．
答曰　極数 25 個
解曰 $S_n = 10 + 10 \cdot 0.6 + 10 \cdot 0.6^2 + \ \cdots\cdots\ + 10 \cdot 0.6^n$ とおくと

$$0.6S_n = 10 \cdot 0.6 + 10 \cdot 0.6^2 + \ \cdots\cdots\ + 10 \cdot 0.6^n + 10 \cdot 0.6^{n+1}$$

$$(1 - 0.6)S_n = 10 - 10 \cdot 0.6^{n+1}$$

増数累乗多きときは $10 \cdot 0.6^{n+1} \to 0$

$$0.4S = 10 \quad \therefore \quad S = 25$$

術曰　極数 $= \dfrac{\text{原数}}{1 - \text{増数}}$
(ロ) 極数 $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ \cdots\cdots$ 幾何
答曰　極数 2
解曰 $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ \cdots\cdots\ + \dfrac{1}{2^n}$ とおくと

$$2S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ \cdots\cdots\ + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$(2-1)S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

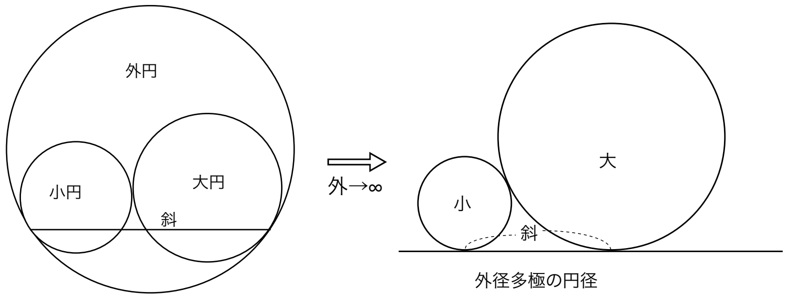
除数累乗多きときは $\dfrac{1}{2^n} \to 0$

$$S = 2$$

術曰　極数 $= \dfrac{原数 \times 除数}{除数 - 1}$

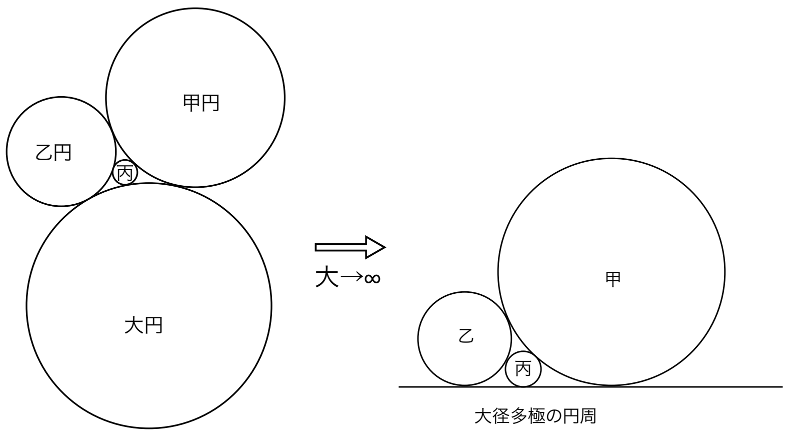
右條の解義に依て極数の理明かなりといへども亦図形数件を挙て多少の極数を用る委曲を示すこと左の如し．

(イ) 図 (a) において 斜$^2 = \dfrac{大小外^2}{(外-大)(外-小)}$ が成り立ち[1]，外 $\to \infty$ とすると 図 (b) のごとく 斜$^2 =$ 大小 となる．



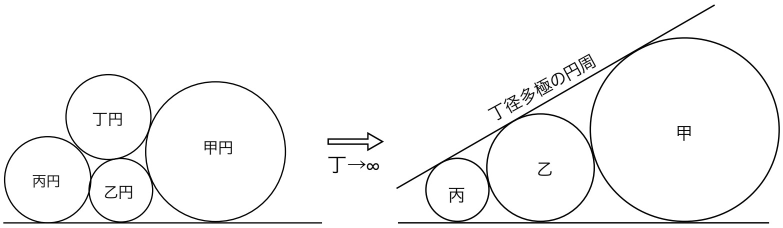
(a)　　　(b)

(ロ) 図 (c) において $\left(\dfrac{1}{甲} + \dfrac{1}{乙} + \dfrac{1}{丙} + \dfrac{1}{大}\right)^2 = 2\left(\dfrac{1}{甲^2} + \dfrac{1}{乙^2} + \dfrac{1}{丙^2} + \dfrac{1}{大^2}\right)$ が成り立ち[2]，大 $\to \infty$ とすると図 (d) のごとく $\dfrac{1}{\sqrt{甲}} + \dfrac{1}{\sqrt{乙}} = \dfrac{1}{\sqrt{丙}}$ となる．



(c)　　　(d)

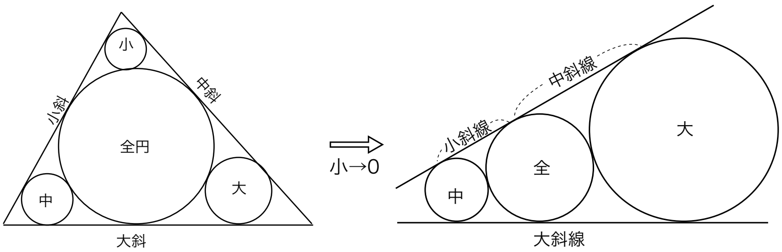
(ハ) 図 (e) において $\left(\sqrt{甲} + \sqrt{丙}\right)^2 乙^2 + 4\sqrt{甲}\sqrt{丙}乙丁 = 4\,甲丙丁$ が成り立ち[3]，両辺 丁 で割って 丁 $\to \infty$ とすると図 (f) のごとく　乙 $= \sqrt{甲丙}$ となる．



(e) (f)

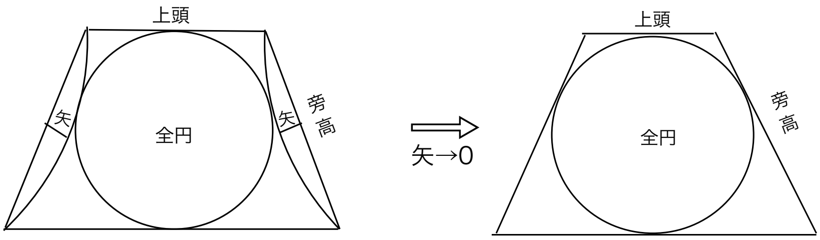
是に依て多極の円周一直線をなすこと明かなり．

(ニ) 図 (g) において $\text{全} = \sqrt{\text{天中}} + \sqrt{\text{中小}} + \sqrt{\text{小天}}$ が成り立ち[4)]，$\text{小} \to 0$ とすると図 (h) のごとく $\text{全} = \sqrt{\text{天中}}$ となる．



(g) (h)

(ホ) 図 (i) において $\text{矢} = \dfrac{(\text{上}+\text{下}-2\,\text{傍高})\,\text{傍高}}{4\,\text{容}}$ が成り立ち[5)]，$\text{矢} \to 0$ とすると図 (j) のごとく $\text{上}+\text{下} = 2\,\text{傍高}$ となる．

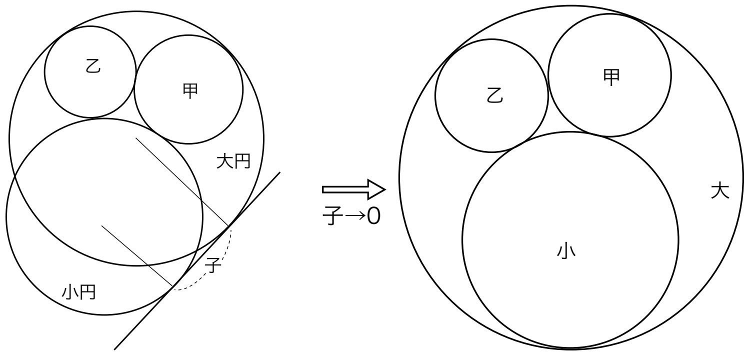


(i) (j)

(ヘ) 図 (k) において

$$(\text{大}+\text{小})^2\text{甲}^2\text{乙}^2 + 2\,\text{子}^2(\text{甲}+\text{乙})(\text{大}-\text{小})\,\text{甲乙} - 2(\text{甲}+\text{乙})(\text{大}-\text{小})\,\text{大小甲乙} + 4\,\text{子}^2\text{大小甲乙}$$
$$-4\,\text{大}^2\text{小}^2\text{甲乙} + (\text{甲}+\text{乙})^2\text{大}^2\text{小}^2 - 2(\text{甲}+\text{乙})^2\text{子}^2\text{大小} + (\text{甲}+\text{乙})^2\text{子}^4 = 0$$

が成り立ち[6)]，$\text{子} \to 0$ とすると図 (l) のごとく
$(\text{大}+\text{小})^2\text{甲}^2\text{乙}^2 - 2(\text{甲}+\text{乙})(\text{大}-\text{小})\,\text{大小甲乙} + (\text{甲}-\text{乙})^2\text{大}^2\text{小}^2 = 0$ となる．



(k) (l)

是に依て少極は常に空なること明かなり．餘は推して知るべし．

注 1) 算法助術 49 番

注 2) 算法助術 55 番

注 3) 算法天生法指南 76 番

注 4) 算法助術 63 番

注 5) 算法助術 68 番

注 6) 算法助術 75 番

○截数[1)]

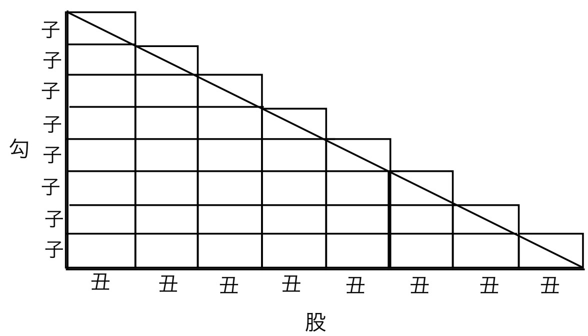
譬は円あり．是を二に截るときは二を截数とし，三に截るときは三を截数とし，四に截るときは四を截数とす．然りといへども極数を得るに至ては截数を多極の数とす．方円截積等の雑形といへども都て截る所の数を截数といふ．其用法雑問解中に詳なり

注 1) 截数とは区分求積法で等分する数のこと．

○雑問

イ 鈎股弦の面積 (直角三角形の面積)

以後，截数 $= n$ とする．



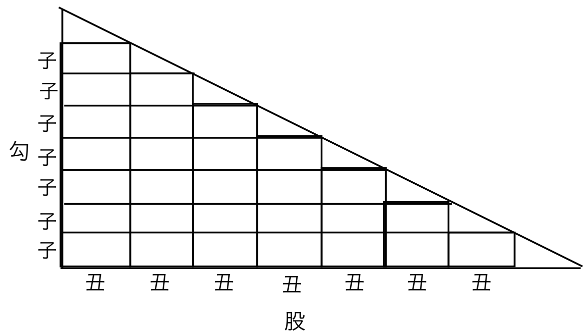
$\dfrac{\text{鈎}}{n}=\text{子}$, $\dfrac{\text{股}}{n}=\text{丑}$ とする．各長方形の面積の和を鈎股汎積とする．

$$\text{鈎股汎積}=\text{子丑}+2\,\text{子丑}+3\,\text{子丑}+\ \cdots\cdots\ +n\,\text{子丑}=\frac{1}{2}n^2\text{子丑}+\frac{n}{2}\text{子丑}^{1)}$$

これに子，丑を代入したものを鈎股定汎積とする．

$$\text{鈎股定汎積}=\frac{1}{2}n^2\cdot\frac{\text{鈎}}{n}\cdot\frac{\text{股}}{n}+\frac{n}{2}\cdot\frac{\text{鈎}}{n}\cdot\frac{\text{股}}{n}=\frac{1}{2}\text{鈎股}+\frac{\text{鈎股}}{2n}\text{㋑}$$

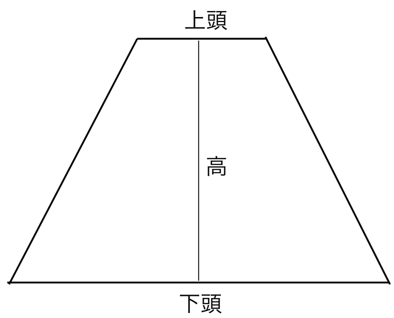
ここで截数を多極，即ち $n\to\infty$ とすると ㋑ が空となり 勾股積 $=\dfrac{1}{2}$鈎股
また下図によって，内側で汎積をつくり，後汎積とする．



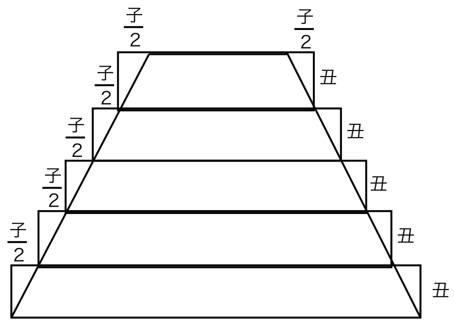
$$\text{後汎積}=\frac{1}{2}\text{鈎股}-\frac{\text{鈎股}}{2n}\text{㋑}$$

前理と同様にして㋑ を捨て 勾股積 $=\dfrac{1}{2}$鈎股[2)]

ロ 梯 (等脚台形) の面積
上頭 12 寸，下頭 18 寸，高さ 23 寸の梯形の面積は幾何．



上頭 = 上, 下頭 = 下 とし， $\dfrac{\text{下}-\text{上}}{n}=\text{子}$, $\dfrac{\text{高}}{n}=\text{丑}$ とする．



各長方形の面積の和を梯汎積とする．

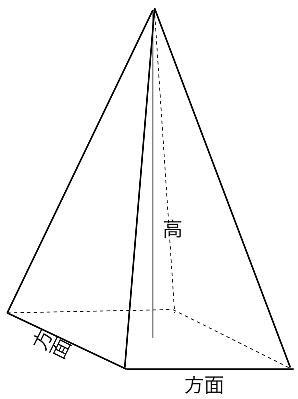
$$
\begin{aligned}
\text{梯汎積} &= n\,\text{上丑} + \text{子丑} + 2\,\text{子丑} + 3\,\text{子丑} + \ \cdots\cdots\ + n\,\text{子丑} \\
&= n\,\text{上丑} + \frac{1}{2}n^2\text{子丑} + \frac{1}{2}n\,\text{子丑} \\
&= n \cdot \text{上} \cdot \frac{\text{高}}{n} + \frac{1}{2}n^2 \cdot \frac{\text{下} - \text{上}}{n} \cdot \frac{\text{高}}{n} + \frac{1}{2}n \cdot \frac{\text{下} - \text{上}}{n} \cdot \frac{\text{高}}{n} \\
&= \text{上高} + \frac{1}{2}(\text{下} - \text{上})\,\text{高} + \frac{\text{下} - \text{上}}{2n}\text{高}
\end{aligned}
$$

ここで $n \to \infty$ とし，梯積とする[3]．

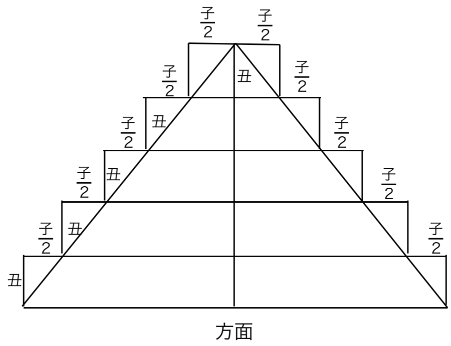
$$
\text{梯積} = \lim_{n\to\infty} \text{梯汎積} = \frac{1}{2}(\text{上} + \text{下})\,\text{高}
$$

$\boxed{\text{ハ}}$ 四角錐の体積

方面 5 寸[4]，高さ 6 寸の方錐[5] の体積は幾何．



方面 $=$ 面 とし，$\dfrac{\text{面}}{n} = \text{子}$, $\dfrac{\text{高}}{n} = \text{丑}$ とする．



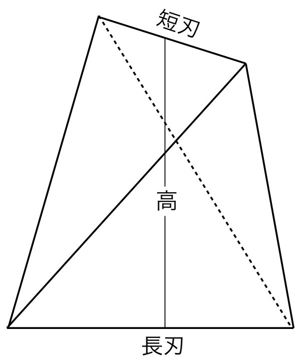
$$
\begin{aligned}
\text{方錐汎積} &= \text{子}^2\text{丑} + 2^2\text{子}^2\text{丑} + 3^2\text{子}^2\text{丑} + \ \cdots\cdots\ + n^2\text{子}^2\text{丑} \\
&= \frac{1}{3}n^3\text{子}^2\text{丑} + \frac{1}{2}n^2\text{子}^2\text{丑} + \frac{1}{6}n\,\text{子}^2\text{丑}^{6)} \\
&= \frac{1}{6}\text{面}^2\text{高} + \frac{\text{面}^2\text{高}}{2n} + \frac{\text{面}^2\text{高}}{6n^2}
\end{aligned}
$$

ここで $n \to \infty$ とし，方錐積とする．

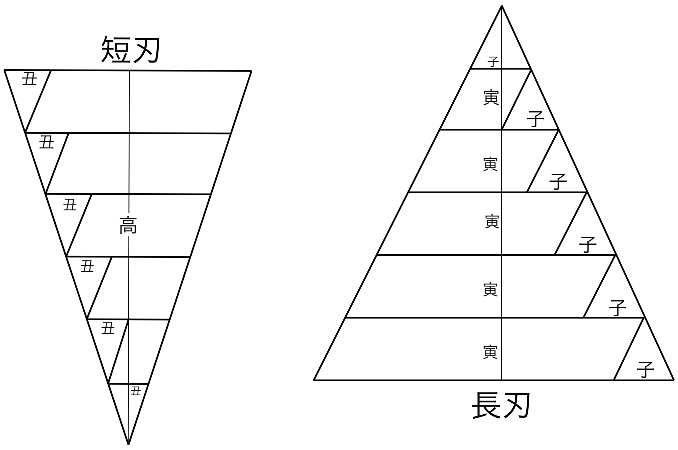
$$
\text{方錐積} = \lim_{n\to\infty} \text{方錐汎積} = \frac{1}{3}\text{面}^2\text{高}
$$

二 両刃形の体積

長刃 12 寸，短刃 9 寸，高 27 寸の両刃[7] の体積は幾何．



$\text{子} = \dfrac{\text{長刃}}{n}$, $\text{丑} = \dfrac{\text{短刃}}{n}$, $\text{寅} = \dfrac{\text{高}}{n}$ とする．



$$
\begin{aligned}
\text{両刃汎積} &= \text{丑}\,(\text{長}-\text{子})\,\text{寅} + 2\,\text{丑}\,(\text{長}-2\,\text{子})\,\text{寅} + 3\,\text{丑}\,(\text{長}-3\,\text{子})\,\text{寅} + \cdots + n\,\text{丑}\,(\text{長}-n\,\text{子})\,\text{寅} \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)\,\text{丑長寅} - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\,\text{丑子寅} \\
&= \frac{1}{2}\text{長短高} - \frac{1}{2n}\text{長短高} - \frac{1}{3}\text{長短高} - \frac{1}{2n}\text{長短高} - \frac{1}{6n^2}\text{長短高}
\end{aligned}
$$

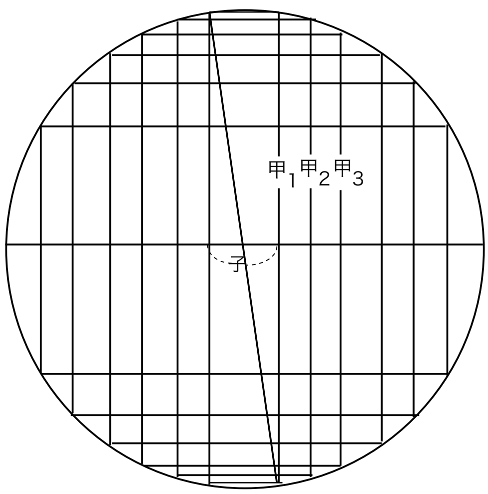
ここで $n \to \infty$ とし，両刃積とする．

$$
\text{両刃積} = \lim_{n\to\infty} \text{両刃汎積} = \frac{1}{6}\text{長短高}
$$

$\boxed{\text{ホ}}$ 円の面積

直径[8]1 寸の円の面積は幾何.

答曰 0.78539816339744830961566084 58 有奇



直径 $= d,\ \dfrac{径}{n} = 子$ とする.

$$甲_1 = \sqrt{d^2 - 子^2} = d\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$甲_2 = \sqrt{d^2 - (2\,子)^2} = d\sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2}$$

$$甲_3 = \sqrt{d^2 - (3\,子)^2} = d\sqrt{1 - \left(\frac{3}{n}\right)^2}$$

$$甲_4 = \sqrt{d^2 - (4\,子)^2} = d\sqrt{1 - \left(\frac{4}{n}\right)^2}$$

$$\vdots$$

それぞれを平方綴術[9] に開く.

$$甲_1 = d - \frac{d}{2n^2} - \frac{d}{8n^4} - \frac{d}{16n^6} - \frac{5d}{128n^8}$$

$$甲_2 = d - \frac{2^2d}{2n^2} - \frac{2^4d}{8n^4} - \frac{2^6d}{16n^6} - \frac{5\cdot 2^8d}{128n^8}$$

$$甲_3 = d - \frac{3^2d}{2n^2} - \frac{3^4d}{8n^4} - \frac{3^6d}{16n^6} - \frac{5\cdot 3^8d}{128n^8}$$

$$甲_4 = d - \frac{4^2d}{2n^2} - \frac{4^4d}{8n^4} - \frac{4^6d}{16n^6} - \frac{5\cdot 4^8d}{128n^8}$$

$$\vdots$$

よって

$$\frac{甲_1子}{d^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{8n^5} - \frac{1}{16n^7} - \frac{5}{128n^9}$$

$$\frac{甲_2子}{d^2} = \frac{1}{n} - \frac{2^2}{2n^3} - \frac{2^4}{8n^5} - \frac{2^6}{16n^7} - \frac{5\cdot 2^8}{128n^9}$$

$$\frac{甲_3子}{d^2} = \frac{1}{n} - \frac{3^2}{2n^3} - \frac{3^4}{8n^5} - \frac{3^6}{16n^7} - \frac{5\cdot 3^8}{128n^9}$$

$$\frac{甲_4子}{d^2} = \frac{1}{n} - \frac{4^2}{2n^3} - \frac{4^4}{8n^5} - \frac{4^6}{16n^7} - \frac{5\cdot 4^8}{128n^9}$$

$$\vdots$$

従って,

$$\begin{aligned}\frac{1}{d^2}円汎積 &= \frac{1}{d^2}(甲_1子 + 甲_2子 + 甲_3子 + 甲_4子 + \cdots + 甲_n子)\\ &= \frac{n}{n} - \frac{\sum k^2}{2n^3} - \frac{\sum k^4}{8n^5} - \frac{\sum k^6}{16n^7} - \frac{\sum k^8}{128n^9}\end{aligned}$$ [10]

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{12n^2}\\
&\quad - \frac{1}{5\cdot 8} - \frac{1}{16n} - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{240n^3}\\
&\quad - \frac{1}{7\cdot 16} - \frac{1}{32n} - \frac{1}{32n^2} + \frac{1}{96n^3} - \frac{1}{672n^6}\\
&\quad - \frac{5}{9\cdot 128} - \frac{5}{256n} - \frac{5}{192n^2} + \frac{7}{384n^3} - \frac{5}{576n^5} + \frac{1}{768n^8}\\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

ここで $n \to \infty$ とし 円汎積 $\to$ 円積 とする.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^2}\text{円汎積} &= \frac{\text{円積}}{d^2}\\
&= 1 - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{5\cdot 8} - \frac{1}{7\cdot 16} - \frac{5}{9\cdot 128}\\
&= 1 - \frac{1}{2\cdot 3}(\text{原数}) - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 5}(\text{一差}) - \frac{3\cdot 5}{6\cdot 7}(\text{二差}) - \frac{5\cdot 7}{8\cdot 9}(\text{三差})
\end{aligned}
$$

注 1) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{1}{2}(n^2+n)$ を圭垜積という.

注 2) この後,“極数を得るに至ては汎積の多少捨算の正負に拘ること勿れ.方円截積覔積等の雑形といへども皆此の如し”と述べている.

注 3) 原文では“截数を以て除く算を捨て,上下差を解き梯積とす”とある.

注 4) 正方形の一辺を方面という.

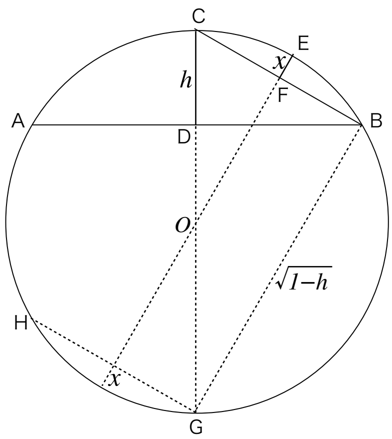
注 5) 正四角錐のこと.

注 6) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{1}{6}n^3 + \dfrac{3}{6}n^2 + \dfrac{1}{6}n$ を平方垜積という.

注 7) 長刃と短刃が直交する図のような四面体をさす.

注 8) 和算では円径は直径をさす.本書でも以後‘径’は直径とするので注意.

注 9) $\sqrt{1-h}$ を級数展開することを“平方綴術に開く”と言う.「乾坤之巻」は作者も年記もない書物であるが,松永良弼の頃の完成で,関流の秘伝とされていたものである.加藤 [?] その中から $\sqrt{1-h}$ を無限級数に展開する方法を示す.直径 1 の円で $CD =$ 矢 $= h$ のとき $EF =$ 甲矢 $= x$ とすると,$CB = \sqrt{h}$ で径矢弦の術より $4x(1-x) = h \quad \therefore \quad x^2 - x + \dfrac{h}{4} = 0$



廉	法	実	商
1	-1	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$
	$\frac{h}{4}$	$\frac{h^2}{16}-\frac{h}{4}$	
1	$-1+\frac{h}{4}$	$\frac{h^2}{16}$	
	$\frac{h}{4}$		
1	$-1+\frac{h}{2}$	$\frac{h^2}{16}$	$\frac{h^2}{16}$
	$\frac{h^2}{16}$	$\frac{h^4}{256}+\frac{h^3}{32}-\frac{h^2}{16}$	
1	$\frac{h^2}{16}+\frac{h}{2}-1$	$\frac{h^4}{256}+\frac{h^3}{32}$	
	$\frac{h^2}{16}$		
1	$\frac{h^2}{8}+\frac{h}{2}-1$	$\frac{h^4}{256}+\frac{h^3}{32}$	$\frac{h^3}{32}$
	$\frac{h^3}{32}$	$\frac{h^6}{1024}+\frac{h^5}{256}+\frac{h^4}{64}-\frac{h^3}{32}$	
1	$\frac{h^3}{32}+\frac{h^2}{8}+\frac{h}{2}-1$	$\frac{h^6}{1024}+\frac{h^5}{256}+\frac{5h^4}{256}$	
	$\frac{h^3}{32}$		
1	$\frac{h^3}{16}+\frac{h^2}{8}+\frac{h}{2}-1$	$\frac{h^6}{1024}+\frac{h^5}{256}+\frac{5h^4}{256}$	$\frac{5h^4}{256}$
	$\frac{5h^4}{256}$	$\frac{25h^8}{65536}+\frac{5h^7}{4096}+\frac{5h^6}{2048}+\frac{5h^5}{512}-\frac{5h^4}{256}$	
1	$\frac{5h^4}{256}+\frac{h^3}{16}+\frac{h^2}{8}+\frac{h}{2}-1$	$\frac{25h^8}{65536}+\frac{5h^7}{4096}+\frac{5h^6}{2048}+\frac{7h^5}{512}$	
	$\frac{5h^4}{256}$		
1	$\frac{5}{128}h^4+\frac{h^3}{16}+\frac{h^2}{8}+\frac{h}{2}-1$	$\frac{25h^8}{65536}+\frac{5h^7}{4096}+\frac{7h^6}{2048}+\frac{7h^5}{512}$	$\frac{7h^5}{512}$

これより

$$x=\frac{1}{4}h+\frac{1}{16}h^2+\frac{1}{32}h^3+\frac{5}{256}h^4+\frac{7}{512}h^5+\cdots$$

従って

$$\sqrt{1-h}=1-2x=1-\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2-\frac{1}{16}h^3-\frac{5}{128}h^4-\frac{7}{256}h^5+\cdots$$

なお求積通考には「綴術は同門千葉雄七胤秀著所の算法新書に詳なり故此餘是を略す」とある．

注 10) $\sum k^4 = \dfrac{1}{30}(6n^5 + 15m^4 + 10n^3 - n)$ を三乗方垜積,

$\sum k^6 = \dfrac{1}{42}(6n^7 + 21m^6 + 21n^5 - 7n^3 + n)$ を五乗方垜積,

$\sum k^8 = \dfrac{1}{90}(10n^9 + 45m^8 + 60n^7 - 42n^5 + 20n^3 - 3n)$ を七乗方垜積という．

○某数[1)]

譬は某段数とは一段なれば一段，二段なれば二段，三段なれば三段，此内何れの段数にてもと云ふとにて一段或二段と限て云はざるを某段数といふ．某弦某積の類皆此の如し．

注 1) 数列 $甲_1$，$甲_2$，$甲_3$，$\cdots$，$甲_k$，$\cdots$，$甲_n$ を考えたときの $甲_k$ を某甲という．以後本書では某数を k で表すことにする．求積通考では，一甲，二甲，三甲，…，のように書くが，本書では $甲_1$，$甲_2$，$甲_3, \cdots$ のように書くことにする．

○畳数[1)]

譬は某弦の畳数とは一弦二弦三弦四弦と次第此の如く際限なき弦各相併て (是を畳むといふ) 得る極数を某弦の畳数といふ．又某積の畳数とは一積二積三積四積と次第此の如く際限なき積各相併て得る極数を某積の畳数といふ．餘は推して知るべし．

注 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 甲_k$ の値を某甲の畳数といい，某甲からその畳数を求めることを“某甲を畳む”という．

○天表起原

天表とは

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \quad (p = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を表にしたものである．和田寧は「畳元表」と呼んでいる．正しくは

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{p+1} \quad (p = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

の値を表にしたものと云うべきである．

まず，0 から 1 までを n 等分し，n を截数とする．$\dfrac{1}{截数}$ を一天，$\dfrac{2}{截数}$ を二天，$\dfrac{3}{截数}$ を三天 $\cdots$ と名付け，各天を加えたものを某天汎畳数という．すなわち，

$$某天汎畳数 = 各天和 = \frac{1}{截数} + \frac{2}{截数} + \cdots + \frac{n}{截数}$$

ここで，$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$(圭垜積) だから 某天汎畳数 $= \dfrac{截数}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}$

$$\frac{某天汎畳数}{截数} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,截数}$$

これは $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$ のことで，截数を多極数とすると ($n\to\infty$ のこと) $\dfrac{\text{某天畳数}}{\text{畳数}}=\dfrac{1}{2}$．ここで汎の字がなくなっている．

$$\text{某天畳数}=\frac{\text{畳数}}{2}$$

これが天表の一段目

二 │ 截数	天

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{2}$ すなわち $\displaystyle\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$ の起原である．截数の使い方に問題が残るが，実用としてこれで不便はなく計算に利用された．

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (平方垜積)

$1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ (立方垜積)

を利用して，同様に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{3}\quad\text{則ち}\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

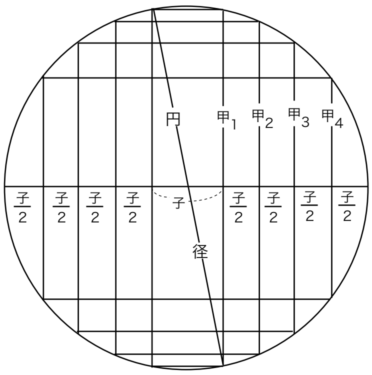
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3=\frac{1}{3}\quad\text{則ち}\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$$

まで計算し，後は類推で，

> 以下某天某の一字を省き，天或天冪とす．右求める所の畳数三件の歩を推して天累乗冪の畳数を求めること左の如し，$\dfrac{\text{截数}}{2}$ は天畳数也，$\dfrac{\text{截数}}{3}$ は天冪畳数也，$\dfrac{\text{截数}}{4}$ は天再冪畳数也，$\dfrac{\text{截数}}{5}$ は天三畳数也，$\dfrac{\text{截数}}{6}$ は天四畳数也，$\cdots\cdots$　遂て此の如し，是を名付けて天表という．

と述べている．

◯甲表起原



直径を n 等分し，$\dfrac{\text{径}}{n}=\text{子}$，$\dfrac{k}{n}=\text{天}$，直径に垂直な弦の長さを図のように 甲$_1$，甲$_2$，$\cdots$ とする．

$$\text{甲}_k=\text{径}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\text{径}\sqrt{1-\text{天}^2}$$ [1)]

これを平方綴術により開き

$$\text{甲}_k=\text{径}\left\{1-\frac{1}{2}\text{天}^2-\frac{1}{2\cdot4}\text{天}^4-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\text{天}^6-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\text{天}^8-\cdots\right\}$$

ここで

$$\text{積}_k=\text{子}\cdot\text{甲}_k=\frac{\text{径}^2}{n}\left\{1-\frac{1}{2}\text{天}^2-\frac{1}{2\cdot4}\text{天}^4-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\text{天}^6-\cdots\right\}$$

とすると

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\text{積}_k=\text{円の面積}=\frac{\pi}{4}\text{径}^2$$

になることから、天表によりこれを畳むと

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot4\cdot5}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot7}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9}-\cdots \qquad ①$$

和算では $\dfrac{\pi}{4}$ を円積率という．

偶乗甲表[2)]

偶乗甲表とは和田寧の「龍商陽表」にあたるもので，定積分

$$A(n,\ m)=\int_0^1 x^{2n}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2m+1}dx$$

の値を表にしたものである．

(1) $A(0,\ 0)=\dfrac{\pi}{4}$

(2) $A(1,\ 0)$ の求め方

$\sqrt{1-x}$ を平方綴術に開き，$x=1$ とおくと

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}-\cdots=0 \qquad ②$$

故に

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}-\cdots-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}+\cdots=0$$

$$1-\left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1}{2\cdot4}\right)+\cdots=0$$

すなわち

$$1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2\cdot4}+\frac{3}{2\cdot4\cdot6}+\frac{3\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{3\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}+\cdots=0 \qquad ③$$

① − ③ より

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} - \cdots$$
$$-1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\cdot 4} - \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \cdots$$

すなわち

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} - \frac{4}{2\cdot 5} - \frac{4}{2\cdot 4\cdot 7} - \frac{4\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9} - \frac{4\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11} - \cdots$$

ところで

$$天^2\sqrt{1-天^2} = 天^2 - \frac{1}{2}天^4 - \frac{1}{2\cdot 4}天^6 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}天^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}天^{10} - \cdots$$

これを天表により畳むと

$$A(1,\ 0) = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 7} - \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11} - \cdots \qquad ④$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$$

この $\dfrac{1}{4}$ が偶乗甲表の二行初級欄に書かれているものである[3)].

(3) $A(2,\ 0)$ の求め方

$$天^4\sqrt{1-天^2} = 天^4 - \frac{1}{2}天^6 - \frac{1}{2\cdot 4}天^8 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}天^{10} - \cdots$$

これを天表により畳むと

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{2\cdot 7} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 9} - \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 13} - \cdots$$

④ × 3 − ③ より

$$3\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 7} - \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11} - \cdots\right)$$
$$-1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\cdot 4} - \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \cdots$$
$$= \frac{6}{5} - \frac{6}{2\cdot 7} - \frac{6}{2\cdot 4\cdot 9} - \frac{6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11} - \cdots$$
$$= 6\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx \qquad ⑤$$

従って

$$A(2,\ 0) = \int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{3}{4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{4}$$

この $\dfrac{3}{4\cdot 6}$ が偶乗甲表の二行二級欄に書かれているものである[4)].

漸化式

$$A(n,\ 0) = \frac{2n-1}{2n+2}A(n-1,\ 0)$$

を利用して二行の各級欄を求めていく．また

$$x^{2n}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2m+1}=x^{2n}(1-x^2)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2m-1}$$

より

$$A(n,\ m)=A(n,\ m-1)-A(n+1,\ m-1)$$

を利用して各行各級欄を求めていくのである[5)]．

奇乗甲表

奇乗甲表とは和田寧の「龍商陰表」にあたるもので．定積分

$$B(n,\ m)=\int_0^1 x^{2n+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2m+1}dx$$

の値を表にしたものである．偶乗甲表と同様にして

$$(2n+3)\int x^{2n+1}\sqrt{1-x^2}dx=2n\int x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}dx-x^{2n}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$$

を利用して

$$B(n,\ 0)=\frac{2n}{2n+3}B(n-1,\ 0)=\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}$$

を求め，

$$B(n,\ m)=B(n,\ m-1)-B(n+1,m-1)$$

を利用して各行各級欄を求めていく．

注 1) 以後，断りなく 甲$_k$ = 径$\sqrt{1-天^2}$, 天 $=\dfrac{k}{n}$ とする．天のことを和田寧は「応」といった．
注 2) 原文の順番では奇乗甲表が先であるが，説明の都合上偶乗甲表を先にした．
注 3) 実際には 《天^{2}甲$_k$ の畳数は $\dfrac{\pi}{4}$径 · 截数》と記されている．
注 4) 実際には 《天^{4}甲$_k$ の畳数は $\dfrac{3}{4\cdot 6}\cdot\dfrac{\pi}{4}$径 · 截数》と記されている．
注 5) 上記の計算を現代的に解釈すると次のようになる．

$$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 4}x^4-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6-\cdots\cdots-\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^{2k}-\cdots$$

$$x\sqrt{1-x^2}=x-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2\cdot 4}x^5-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^7-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^9-\cdots$$

$$x^3\sqrt{1-x^3}=x^3-\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{2\cdot 4}x^7-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^9-\cdots$$

だから

$$(x-x^3)\sqrt{1-x^2}=x-\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2\cdot 4}x^5+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}x^7+\frac{9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^9+\cdots\cdots$$

これに $x=1$ を代入したものが ③ である．また

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

であから④ は不定積分

$$4\int x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-x^2}dx - x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$$

で $x=1$ とした係数のみを表示したことになる．さらに⑤ は

$$6\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx = 3\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx - \Big[x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1$$

を利用し，一般に

$$(2n+2)\int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}dx = (2n-1)\int_0^1 x^{2n-2}\sqrt{1-x^2}dx - \Big[x^{2n-1}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1$$

を利用している．

◯甲除表起原

甲除表は

$$\frac{径}{甲_k} = \frac{1}{\sqrt{1-天^2}} = 1 + \frac{1}{2}天^2 + \cdots + \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}天^{2k} + \cdots$$

を利用したものである [1)]．

甲除奇乗表 [2)]

甲除奇乗表とは和田寧の「龍商除陰表」にあたるもので，定積分

$$C(n) = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

の値を表にしたものである．

$$\begin{aligned} C(0) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}x^3 + \cdots + \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^{2k+1} + \cdots\right)dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} + \cdots \\ &= 1^{\,3)} \end{aligned}$$

これは不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}$ を利用したことと同じである．

一般に

$$(2n+1)\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2n\int \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx - x^{2n}\sqrt{1-x^2}$$

を利用して $C(n) = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ を求めている．

甲除偶乗表

甲除偶乗表とは和田寧の「龍商除陽表」にあたるもので，定積分

$$D(n) = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

の値を表にしたものである．

②を利用して

$$
\begin{aligned}
D(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= 1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \cdots \\
&\quad - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \cdots\right) \\
&= 2 - \frac{2}{2\cdot 3} - \frac{2}{1\cdot 4\cdot 5} - \frac{2\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{2\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \cdots \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{4}\ {}^{2)}
\end{aligned}
$$

これは不定積分

$$
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int \sqrt{1-x^2}dx - x\sqrt{1-x^2}
$$

を利用したことと同じである．

一般に

$$
2n\int \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx = (2n-1)\int \frac{x^{2n-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx - x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}
$$

を利用して $D(n) = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \dfrac{\pi}{2}$ を求めている．

注 1) 帰除綴術による．分数式の級数展開を“帰除綴術に除く”という．原文には「某甲を実とし某甲冪を法として帰除綴術に是を除き某甲を以て一個を除く数を得る」とあり，これは次のように計算することである．

$$
\frac{\text{径}}{\text{甲}_k} = \frac{\text{径}\cdot\text{甲}_k}{\text{甲}_k^2} = \frac{\sqrt{1-\text{天}^2}}{1-\text{天}^2}
$$

地 $=\sqrt{1-\text{天}^2}$ とおく． $\dfrac{1}{1-\text{天}^2} = 1 + \dfrac{\text{天}^2}{1-\text{天}^2}$ だから

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{地}}{1-\text{天}^2} &= \text{地}\left(1 + \frac{\text{天}^2}{1-\text{天}^2}\right) \\
&= \text{地} + \text{地天}^2\frac{1}{1-\text{天}^2} \\
&= \text{地} + \text{地天}^2\left(1 + \frac{\text{天}^2}{1-\text{天}^2}\right) \\
&= \text{地} + \text{地天}^2 + \text{地天}^4\frac{1}{1-\text{天}^2} \\
&= \text{地} + \text{地天}^2 + \text{地天}^4\left(1 + \frac{\text{天}^2}{1-\text{天}^2}\right) \\
&= \text{地} + \text{地天}^2 + \text{地天}^4 + \text{地天}^6\frac{1}{1-\text{天}^2} \\
&= \text{地} + \text{地天}^2 + \text{地天}^4 + \text{地天}^6\left(1 + \frac{\text{天}^2}{1-\text{天}^2}\right) \\
&= \text{地} + \text{地天}^2 + \text{地天}^4 + \text{地天}^6 + \text{地天}^8\frac{1}{1-\text{天}^2}
\end{aligned}
$$

$$= 地 + 地天^2 + 地天^4 + 地天^6 + 地天^8 + 地天^{10}\frac{1}{1-天^2}$$
$$= \cdots\cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}天^2 + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1\right)天^4 + \left(-\frac{3}{48} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1\right)天^6 + \cdots\cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}天^2 + \frac{3}{8}天^4 + \frac{15}{48}天^6 + \cdots\cdots$$

注 2) 実際には《$\frac{天}{甲_k}$ の畳数は $\frac{截数}{径}$》と記されている．

注 3) 実際には《$\frac{1}{甲_k}$ の畳数は $\frac{2}{径}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot$截数》と記されている．

◯乙表起原

差表

差 $= 1 -$ 天 とおく [1]．

$$差^2 = 1 - 2\,天 + 天^2$$

$$差^3 = 1 - 3\,天 + 3\,天^2 - 天^3$$

$$差^4 = 1 - 4\,天 + 6\,天^2 - 4\,天^3 + 天^4$$

これらを天表により畳むと

$$\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 dx = 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 dx = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 dx = 1 - \frac{4}{2} + \frac{6}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

このようにして，差表一には $\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{8}$ まで書かれている．

次に，和田寧の「見真表」にあたる，定積分

$$E(p) = \int_0^1 (1-x)^p \sqrt{x}dx$$

の求め方を示している．

$$\sqrt{天}\,^{2)} = \sqrt{1-差} = 1 - \frac{1}{2}差 - \frac{1}{8}差^2 - \frac{3}{48}差^3 - \frac{15}{384}差^4$$

これを畳むと

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = 1 - \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 8} - \frac{3}{4\cdot 48} - \frac{15}{5\cdot 384} \qquad ⑥$$

ところで

$$\frac{天甲_k}{径} = 天 - \frac{1}{2}天^3 - \frac{1}{8}天^5 - \frac{3}{48}天^7 - \frac{15}{384}天^9$$

これを畳むと，奇乗甲表より $\dfrac{天甲_k}{径}$ の畳数は $\dfrac{1}{3}$ で，右辺は $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4\cdot 2} - \dfrac{1}{6\cdot 8} - \dfrac{3}{8\cdot 48} - \dfrac{15}{10\cdot 384}$ となり，これの 2 倍が⑥の右辺である．故に

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$$

$$差\sqrt{天} = 差 - \frac{1}{2}差^2 - \frac{1}{8}差^3 - \frac{3}{48}差^4 - \frac{15}{384}差^5$$

$$差^2\sqrt{天} = 差^2 - \frac{1}{2}差^3 - \frac{1}{8}差^4 - \frac{3}{48}差^5 - \frac{15}{384}差^6$$

$$差^3\sqrt{天} = 差^3 - \frac{1}{2}差^4 - \frac{1}{8}差^5 - \frac{3}{48}差^6 - \frac{15}{384}差^7$$

$$差^4\sqrt{天} = 差^4 - \frac{1}{2}差^5 - \frac{1}{8}差^6 - \frac{3}{48}差^7 - \frac{15}{384}差^8$$

これらの畳数と $天^3甲_k$，$天^5甲_k$，$天^7甲_k$，$天^9甲_k$ を展開した係数を較べ，奇乗甲表により

$$E(1) = \int_0^1 (1-x)\sqrt{x}dx = \frac{4}{5\cdot 3}$$

$$E(2) = \int_0^1 (1-x)^2\sqrt{x}dx = \frac{4\cdot 4}{7\cdot 5\cdot 3}$$

$$E(3) = \int_0^1 (1-x)^3\sqrt{x}dx = \frac{4\cdot 4\cdot 6}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}$$

$$E(4) = \int_0^1 (1-x)^4\sqrt{x}dx = \frac{4\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}$$

この値が差表三㊧に書かれているものである[3]．

注 1) 差にあたるものを，和田は「健」と名付けている．
注 2) 和算では $\sqrt{天}$ のことを天商と書く．
注 3) 一般に

$$\int_0^1 (1-x)^k\sqrt{x}dx = 2\int_0^1 x^{2k+1}\sqrt{1-x^2}dx$$

の関係を利用して

$$E(p) = \frac{2(2p)!!}{(2p+3)!!}$$

を求めている．

天商表

天商表とは

$$\int_0^1 x^p \sqrt{x} dx = \frac{2}{2p+3} \qquad (p = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を表にしたもので，和田寧の「畳元真表」にあたるもの．帰除綴術に除き，

$$\frac{1}{\sqrt{天}} = \frac{\sqrt{天}}{天} = \frac{\sqrt{1-差}}{1-差} = 1 + \frac{1}{2}差 + \frac{3}{8}差^2 + \frac{3\cdot5}{48}差^3 + \frac{15\cdot7}{384}差^4$$

これを畳んで $\frac{1}{\sqrt{天}}$ の畳数は $1 + \frac{1}{2\cdot2} + \frac{3}{3\cdot8} + \frac{15}{4\cdot48} + \frac{105}{5\cdot384}$ となる．これに $2 \times ②$ を加えると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 1 + \frac{1}{2\cdot2} + \frac{3}{3\cdot8} + \frac{15}{4\cdot48} + \frac{105}{5\cdot384} + 2\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot4} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

$$天\sqrt{天} = \sqrt{天} - 差\sqrt{天}$$

これを畳むと

$$\int_0^1 x\sqrt{x}dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$$

同様にして

$$天^2\sqrt{天} = \sqrt{天} - 2\,差\sqrt{天} + 差^2\sqrt{天}$$

$$天^3\sqrt{天} = \sqrt{天} - 3\,差\sqrt{天} + 3\,差^2\sqrt{天} - 差^3\sqrt{天}$$

$$天^4\sqrt{天} = \sqrt{天} - 4\,差\sqrt{天} + 6\,差^2\sqrt{天} - 4\,差^3\sqrt{天} + 差^4\sqrt{天}$$

これらを畳むと

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x}dx = \frac{2}{7}$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{x}dx = \frac{2}{9}$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{x}dx = \frac{2}{11}$$

これが天商表である．

$$差 = 1 - 天$$

$$差\sqrt{天} = \sqrt{天} - 天\sqrt{天}$$

$$差天\sqrt{天} = 天\sqrt{天} - 天^2\sqrt{天}$$

$$差天^2\sqrt{天} = 天^2\sqrt{天} - 天^3\sqrt{天}$$

$$差天^3\sqrt{天}=天^3\sqrt{天}-天^4\sqrt{天}$$

これらを畳んで

$$\int_0^1(1-x)\sqrt{x}dx=\frac{4}{5\cdot 3}$$

$$\int_0^1(1-x)x\sqrt{x}dx=\frac{4}{7\cdot 5}$$

$$\int_0^1(1-x)x^2\sqrt{x}dx=\frac{4}{9\cdot 7}$$

$$\int_0^1(1-x)x^3\sqrt{x}dx=\frac{4}{11\cdot 9}$$

これが差表四㊧に書かれているものである[1)].

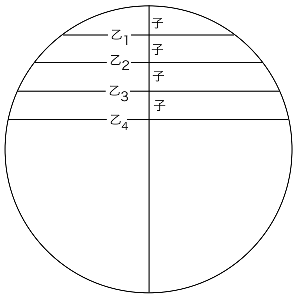
$$\sqrt{差}=\sqrt{1-天}=1-\frac{1}{2}天-\frac{1}{8}天^2-\frac{3}{48}天^3-\frac{15}{384}天^4$$

これを畳むと $\sqrt{差}$ の畳数は $1-\dfrac{1}{3\cdot 2}-\dfrac{1}{3\cdot 8}-\dfrac{3}{4\cdot 48}-\dfrac{15}{5\cdot 384}$ となり，これは $\sqrt{天}$ の畳数と同じだから $\dfrac{3}{2}$ である.

$$\int_0^1\sqrt{1-x}dx=\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=2$$

注 1) 例えば，$差天^3\sqrt{天}=天^3\sqrt{天}-天^4\sqrt{天}$ と天商表により $差天^3\sqrt{天}$ の畳数は $\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{11}=\dfrac{4}{11\cdot 9}$ となる．差表四㊧の $差天^3\sqrt{天}$ 欄には $\dfrac{4}{11\cdot 9}$截数 とある.



直径を n 等分し，$\dfrac{径}{n}=子$，直径に垂直な弦の長さを図のように $乙_1$，$乙_2$，$\cdots$ とする.

$$乙_k^2=4\,径^2(天-天^2)$$ [1)]

だからこれを平方綴術に開いて

$$乙_k=2\,径\sqrt{天}\sqrt{1-天}=2\,径\left(\sqrt{天}-\frac{1}{2}天\sqrt{天}-\frac{1}{8}天^2\sqrt{天}-\frac{3}{48}天^3\sqrt{天}-\frac{15}{384}天^4\sqrt{天}\right)$$

これを畳み，$乙_k$ の畳数は

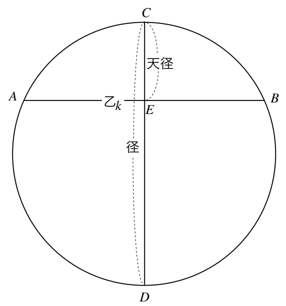
$$径\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{5\cdot 2}-\frac{4}{7\cdot 8}-\frac{3\cdot 4}{9\cdot 48}-\frac{15\cdot 4}{11\cdot 384}\right)$$

$$\sum^{\infty} 乙_k\cdot 子 = 円の面積 = 円積率 \times 径^2$$

だから

$$\int_0^1 2\sqrt{x-x^2}dx=\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}-\frac{4}{5\cdot 2}-\frac{4}{7\cdot 8}-\frac{3\cdot 4}{9\cdot 48}-\frac{15\cdot 4}{11\cdot 384}$$

注 1) $CE = k$ 子 $=$ 天径 を某矢といい，$AB^2 = 4CE\cdot ED$ の関係を使っている．これを径矢弦の術という．また，以後断りなく $乙_k = 2\,径\sqrt{天\,(1-天)}$ とする．



奇乗乙表

$$\sqrt{天}乙_k = 2\,径\left(天-\frac{1}{2}天^2-\frac{1}{4\cdot 2}天^3-\frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}天^4-\cdots\right)$$

これを畳むと

$$\int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{x-x^2}dx = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 2\cdot 4}-\frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 5}-\cdots\right)$$

ところで奇乗甲表を作ったときの計算で

$$\begin{aligned}\frac{2}{5\cdot 3} = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 6}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 8}-\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 10}-\cdots \\ &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}-\frac{2}{4\cdot 2\cdot 4}-\frac{2\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 4\cdot 2\cdot 5}-\cdots\right)\end{aligned}$$

だから

$$\int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{x-x^2}dx = 4\times\frac{2}{5\cdot 3}$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=\frac{4}{5\cdot 3}$$

一般に

$$\int_0^1 x^p\left(\sqrt{1-x}\right)^q dx = 2\int_0^1 x^{2p+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^q dx (= 奇乗甲表)$$

を利用して求めている．

偶乗乙表

偶乗乙表は和田寧の「見商真表」にあたるもので，定積分

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^{2p}\left(\sqrt{x-x^2}\right)^{2q+1} dx$$

の値を表にしたものである．

$$乙_k天 = 2\sqrt{天-天^2}天 = 2\left(天\sqrt{天} - \frac{1}{2}天^2\sqrt{天} - \frac{1}{4\cdot 2}天^3\sqrt{天} - \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}天^4\sqrt{天} - \cdots\right)$$

これを畳むと

$$\int_0^1 \left(2\sqrt{x-x^2}\right) xdx = 2\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{2\cdot 7} - \frac{2}{4\cdot 2\cdot 9} - \frac{3\cdot 1\cdot 2}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 11} - \cdots\right)$$

ところで，偶乗甲表を作ったときの計算で

$$\frac{3}{6\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{4} = \int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{2\cdot 7} - \frac{1}{8\cdot 9} - \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 11} - \cdots$$

であったから

$$\int_0^1 \left(2\sqrt{x-x^2}\right) xdx = 4\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx = 4\cdot\frac{3}{6\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\cdot 4}$$

一般に

$$\int_0^1 x^p\left(\sqrt{x-x^2}\right)^q dx = 2\int_0^1 x^{2p+q+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^q dx (= 偶乗甲表)$$

を利用して求める．

◯乙除表起原

乙除表は

$$\frac{径}{乙_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{天}} + \frac{1}{2}\sqrt{天} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}天\sqrt{天} + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}天^2\sqrt{天} + \cdots\right)$$

を利用したもの[1)]．

乙除奇乗表

乙除奇乗表は和田寧の「健商除表」にあたるもので，定積分

$$F(p) = \int_0^1 \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2p+1}}{\sqrt{x-x^2}} dx$$

の値を表にしたものである．

$$\frac{径天\sqrt{天}}{乙_k} = \frac{1}{2}\left(天 + \frac{1}{2}天^2 + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}天^3 + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}天^4 + \cdots\right)$$

これを畳むと

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x-x^2}} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 6} + \frac{3\cdot 1}{8\cdot 8} + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 10} + \cdots$$

ところで甲除奇乗表を作ったときの計算で

$$\frac{2}{3}=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{3\cdot 1}{8\cdot 8}+\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 10}+\cdots$$

よって

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{3}$$ [2)]

一般に

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{2p+1}}{\sqrt{x-x^2}}dx=2\int_0^1 \frac{x^{2p+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx (=\text{甲除奇乗表})$$

を利用して $F(p)$ を求めている．

乙除偶乗表

乙除偶乗表は和田寧の「見商除真表」にあたるもので，定積分

$$G(p)=\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{2p}}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

の値を表にしたものである．乙除奇乗表と同様にして

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{2p}}{\sqrt{x-x^2}}dx=2\int_0^1 \frac{x^{2p}}{\sqrt{1-x^2}}dx (=\text{甲除偶乗表})$$

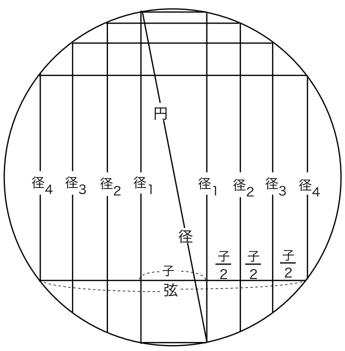
を利用して $G(p)$ を求めている．

注 1) 帰除綴術に除く．

注 2) 実際には《$\dfrac{\text{天}\sqrt{\text{天}}}{\text{乙}_k}$ の畳数は $\dfrac{2}{3\,\text{径}}$ 截数》と記されている．

◯径除表起原

ここからは積分表ではなく，級数展開表である．



弦を n 等分し，子 $=\dfrac{\text{弦}}{n}$，弦に垂直な線の長さを図のように 径$_1$，径$_2$，$\cdots$ とする．

$$\text{径}_k^2=\text{径}^2-\text{天}^2\text{弦}^2$$

これを平方綴術に開いて

$$径_k = 径\sqrt{1-率天^2} = 径\left(1-\frac{1}{2}率天^2-\frac{1}{8}率^2天^4-\frac{3}{48}率^3天^6-\frac{15}{384}率^4天^8\right)$$

ここで $\boxed{率=\dfrac{弦^2}{径^2}}$ と名付ける[1)].

奇除表

$$地 = 1-\frac{1}{2}率天^2-\frac{1}{8}率^2天^4-\frac{3}{48}率^3天^6-\frac{15}{384}率^4天^8$$

と名付ける．即ち $径_k = 地\cdot径$，また $地^2 = 1-率天^2$ だから $\dfrac{1}{地} = \dfrac{地}{地^2}$ として帰除綴術に除くと

$$\frac{1}{地} = \frac{径}{径_k} = 1+\frac{1}{2}率天^2+\frac{3}{8}率^2天^4+\frac{15}{48}率^3天^6+\frac{105}{384}率^4天^8$$

$\dfrac{1}{地^3} = \dfrac{\frac{1}{地}}{地^2}$ として帰除綴術に除くと

$$\frac{1}{地^3} = \frac{径^3}{径_k^3} = 1+\frac{3}{2}率天^2+\frac{15}{8}率^2天^4+\frac{105}{48}率^3天^6+\frac{945}{384}率^4天^8$$

以下同様にして

$$\frac{1}{地^5} = \frac{径^5}{径_k^5} = 1+\frac{5}{2}率天^2+\frac{35}{8}率^2天^4+\frac{315}{48}率^3天^6+\frac{11\cdot 315}{384}率^4天^8$$

$$\frac{1}{地^7} = \frac{径^7}{径_k^7} = 1+\frac{7}{2}率天^2+\frac{63}{8}率^2天^4+\frac{11\cdot 63}{48}率^3天^6+\frac{13\cdot 693}{384}率^4天^8$$

これが径除奇除表に書かれているものである．

注 1) 以後，断りなく $径_k = 径\sqrt{1-率天^2}$ とする．

偶除表

$$\frac{1}{地^2} = \frac{径^2}{径_k^2} = 1+率天^2+率^2天^4+率^3天^6+率^4天^8$$

$$\frac{1}{地^4} = \frac{径^4}{径_k^4} = 1+2\,率天^2+3\,率^2天^4+4\,率^3天^6+5\,率^4天^8$$

$$\frac{1}{地^6} = \frac{径^6}{径_k^6} = 1+3\,率天^2+6\,率^2天^4+10\,率^3天^6+15\,率^4天^8$$

$$\frac{1}{地^8} = \frac{径^8}{径_k^8} = 1+4\,率天^2+10\,率^2天^4+20\,率^3天^6+35\,率^4天^8$$

$$\frac{1}{地^{10}} = \frac{径^{10}}{径_k^{10}} = 1+5\,率天^2+15\,率^2天^4+35\,率^3天^6+70\,率^4天^8$$

◯日月表起原

日除表

日 $=1+$ 率天 と名付ける．

$$\frac{1}{日}=1-率天+率^2天^2-率^3天^3+率^4天^4$$

$$\frac{1}{日^2}=1-2\,率天+3\,率^2天^2-4\,率^3天^3+5\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{日^3}=1-3\,率天+6\,率^2天^2-10\,率^3天^3+15\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{日^4}=1-4\,率天+10\,率^2天^2-20\,率^3天^3+35\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{日^5}=1-5\,率天+15\,率^2天^2-35\,率^3天^3+70\,率^4天^4$$

月除表

月 $=1-$ 率天 と名付ける．

$$\frac{1}{月}=1+率天+率^2天^2+率^3天^3+率^4天^4$$

$$\frac{1}{月^2}=1+2\,率天+3\,率^2天^2+4\,率^3天^3+5\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{月^3}=1+3\,率天+6\,率^2天^2+10\,率^3天^3+15\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{月^4}=1+4\,率天+10\,率^2天^2+20\,率^3天^3+35\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{月^5}=1+5\,率天+15\,率^2天^2+35\,率^3天^3+70\,率^4天^4$$

和表

$$\frac{1}{日}+\frac{1}{月}=2+2\,率天+2\,率^2天^2+2\,率^3天^3+2\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{日^2}+\frac{1}{月^2}=2+2\cdot 3\,率天+2\cdot 5\,率^2天^2+2\cdot 7\,率^3天^3+2\cdot 9\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{日^3}+\frac{1}{月^3}=2+2\cdot 6\,率天+2\cdot 15\,率^2天^2+2\cdot 28\,率^3天^3+2\cdot 45\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{日^4}+\frac{1}{月^4}=2+2\cdot 10\,率天+2\cdot 35\,率^2天^2+2\cdot 84\,率^3天^3+2\cdot 165\,率^4天^4$$

$$\frac{1}{日^5}+\frac{1}{月^5}=2+2\cdot 15\,率天+2\cdot 70\,率^2天^2+2\cdot 210\,率^3天^3+2\cdot 495\,率^4天^4$$

算法求積通考巻之一終

算法求積通考巻之二

　　　　長谷川善左衛門弘閲

彦根藩　内田半吾久命編

〇立表第一

天表

天商表

〇第二

奇乗甲表

偶乗甲表

〇第三

奇乗乙表

偶乗乙表

〇第四

甲除奇乗表

乙除奇乗表

甲除偶乗表

乙除偶乗表

〇第五

差表

〇第六

径除奇除表

径除偶除表

〇第七

日表

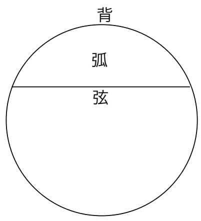
月表

〇第八

和表

◯第九

弧背



$$弧背 = 弦\left(1 + \frac{率}{3\cdot 2} + \frac{3\,率^2}{5\cdot 8} + \frac{15\,率^3}{7\cdot 48} + \frac{105\,率^4}{9\cdot 384} + \frac{945\,率^5}{11\cdot 3840}\right) \qquad \boxed{率 = \frac{弦^2}{径^2}}$$

$$弧背 = \sqrt{径矢}\left(2 + \frac{2\,率}{3\cdot 2} + \frac{3\cdot 2\,率^2}{5\cdot 8} + \frac{15\cdot 2\,率^3}{7\cdot 48} + \frac{105\cdot 2\,率^4}{9\cdot 384} + \frac{945\cdot 2\,率^5}{11\cdot 3840}\right) \qquad \boxed{率 = \frac{矢}{径}}$$

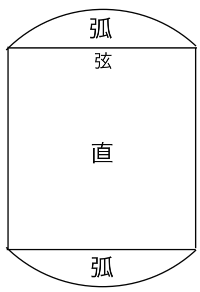
$$弧背 = 弦\left(1 + \frac{2\,率}{3} + \frac{8\,率^2}{15} + \frac{48\,率^3}{105} + \frac{384\,率^4}{945} + \frac{3840\,率^5}{10395}\right) \qquad \boxed{率 = \frac{矢}{径}}$$

弧積

$$弧積 = 径^2\left(\frac{率}{3\cdot 2} + \frac{率^2}{5\cdot 4} + \frac{3\,率^3}{7\cdot 16} + \frac{15\,率^4}{9\cdot 96} + \frac{105\,率^5}{11\cdot 768} + \frac{945\,率^6}{13\cdot 7680}\right) \qquad \boxed{率 = \frac{弦^2}{径^2}}$$

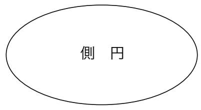
$$弧積 = 矢\sqrt{矢径}\left(\frac{4}{3} - \frac{4\,率}{5\cdot 2} - \frac{4\,率^2}{7\cdot 8} - \frac{3\cdot 4\,率^3}{9\cdot 48} - \frac{15\,率^4}{11\cdot 384} - \frac{105\cdot 4\,率^5}{13\cdot 3840}\right) \qquad \boxed{率 = \frac{矢}{径}}$$

帯直弧積



$$帯直弧積 = 弦径\left(1 - \frac{率}{3\cdot 2} - \frac{率^2}{5\cdot 8} - \frac{3\,率^3}{7\cdot 48} - \frac{15\,率^4}{9\cdot 384} - \frac{105\,率^5}{11\cdot 3840}\right) \qquad \boxed{率 = \frac{弦^2}{径^2}}$$

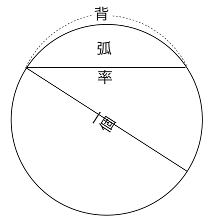
$\boxed{\boxed{\text{側円周}}}$



$$\text{周} = \frac{\pi}{4}\text{長} - \frac{\text{率}}{2^2}\text{原数} - \frac{1 \cdot 3\,\text{率}}{4^2}\text{一差} - \frac{3 \cdot 5\,\text{率}}{6^2}\text{二差} - \frac{5 \cdot 7\,\text{率}}{8^2}\text{三差} - \frac{7 \cdot 9\,\text{率}}{10^2}\text{四差} \qquad \boxed{\text{率} = 1 - \frac{\text{短}^2}{\text{長}^2}}$$

$$\text{周} = \frac{\pi}{4}\text{短} - \frac{\text{率}}{2^2}\text{原数} - \frac{1 \cdot 3\,\text{率}}{4^2}\text{一差} - \frac{3 \cdot 5\,\text{率}}{6^2}\text{二差} - \frac{5 \cdot 7\,\text{率}}{8^2}\text{三差} - \frac{7 \cdot 9\,\text{率}}{10^2}\text{四差} \qquad \boxed{\text{率} = \frac{\text{長}^2}{\text{短}^2} - 1}$$

$\boxed{\boxed{\text{弧背率}}}$

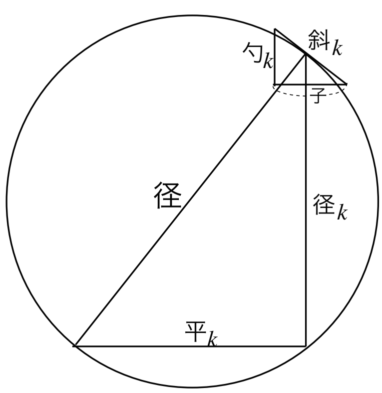


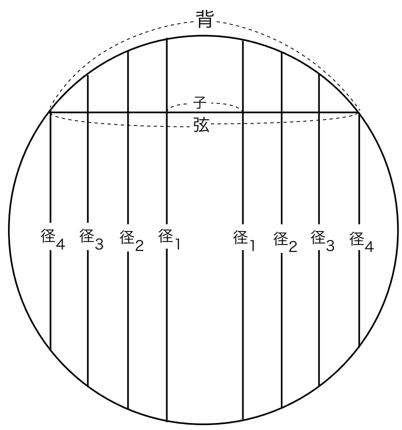
$$\text{乾} = \text{径}_k^2 = 1 - \text{率}^2\text{天}^2,\ \text{坤} = \text{斜}_k = \frac{\text{率}}{n\sqrt{\text{乾}}},\ \boxed{\text{弧背} = \text{坤畳数}}$$

$$\text{弧背} = \text{率}\left(1 + \frac{\text{率}}{3 \cdot 2} + \frac{3\,\text{率}^2}{5 \cdot 8} + \frac{15\,\text{率}^3}{7 \cdot 48} + \frac{105\,\text{率}^4}{9 \cdot 384} + \frac{945\,\text{率}^5}{11 \cdot 3840}\right) \qquad \boxed{\text{一個} = \text{径},\ \text{率} = \text{弦}}$$

◯圓類求積雑問

$\boxed{1}$ 直径 $= d$ と 弦 $= c$ を与えて 弧背 $= s$ を求めよ．





子 $= \dfrac{c}{n}$, 天 $= \dfrac{k}{n}$, 率 $= \dfrac{c^2}{d^2}$ とする.

$$\text{某斜} = \text{斜}_k = \frac{\text{子}\cdot\text{径}}{\text{某径}} = \frac{d\cdot\dfrac{c}{n}}{\sqrt{d^2-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2c^2}} = \frac{\dfrac{c}{n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\dfrac{c^2}{d^2}}} = \frac{\text{子}}{\sqrt{1-\text{天}^2\text{率}}}$$

これを立表第六奇除表 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n\right)$ で級数展開すると

$$\begin{aligned}
\text{斜}_k &= \text{子} + \frac{\text{子}\cdot\text{率}}{2}\text{天}^2 + \frac{3\cdot\text{子}\cdot\text{率}^2}{8}\text{天}^4 + \frac{15\cdot\text{子}\cdot\text{率}^3}{48}\text{天}^6 + \frac{105\cdot\text{子}\cdot\text{率}^4}{384}\text{天}^8 + \cdots\cdots \\
&= \frac{c}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{n}\right)\left(\frac{c^2}{d^2}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{c}{n}\right)\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^2\left(\frac{k}{n}\right)^4 \\
&\quad + \frac{15}{48}\left(\frac{c}{n}\right)\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^3\left(\frac{k}{n}\right)^6 + \frac{105}{384}\left(\frac{c}{n}\right)\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^4\left(\frac{k}{n}\right)^8 + \cdots
\end{aligned}$$

これを畳んで

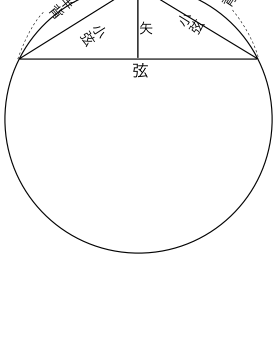
$$\begin{aligned}
s &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\text{斜}_k \\
&= c + \frac{c}{2\cdot 3}\cdot\frac{c^2}{d^2} + \frac{3c}{5\cdot 8}\cdot\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^2 + \frac{15c}{7\cdot 48}\cdot\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^3 + \frac{105c}{9\cdot 384}\cdot\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^4 + \cdots \\
&= c + \frac{1^2\text{率}}{2\cdot 3}(\text{原数}) + \frac{3^2\text{率}}{5\cdot 4}(\text{一差}) + \frac{5^2\text{率}}{6\cdot 7}(\text{二差}) + \frac{7^2\text{率}}{8\cdot 9}(\text{三差}) + \frac{9^2\text{率}}{10\cdot 11}(\text{四差}) + \cdots
\end{aligned}$$

これは $\sin^{-1}x = \displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx$ より

$$\begin{aligned}
s &= d\sin^{-1}\frac{c}{d} \\
&= d\left\{\frac{c}{d} + \frac{1}{6}\left(\frac{c}{d}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{c}{d}\right)^5 + \frac{5}{112}\left(\frac{c}{d}\right)^7 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\left(\frac{c}{d}\right)^{2n+1} + \cdots\right\} \\
&= c + \frac{c}{6}\left(\frac{c^2}{d^2}\right) + \frac{3c}{40}\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^2 + \frac{15c}{336}\cdot\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

と一致する.

$\boxed{2}$ 直径 $= d$ と 矢 $= h$ を与えて 弧背 $= s$ を求めよ.



小弦 $= c_1 = \sqrt{dh}$ で $\boxed{1}$より

$$半背 = \frac{背}{2} = c_1 + \frac{c_1}{2\cdot 3}率 + \frac{3c_1}{5\cdot 8}率^2 + \frac{15c_1}{7\cdot 48}率^3 + \frac{105c_1}{9\cdot 384}率^4 + \cdots$$

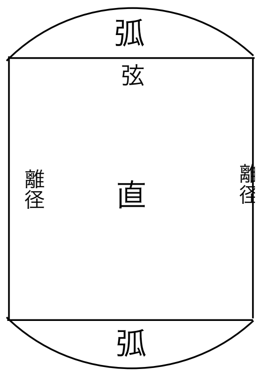
これを倍して全背とす.

$$s = 2\sqrt{dh} + \frac{1^2}{2\cdot 3}(原数)\cdot率 + \frac{3^2}{5\cdot 4}(一差)\cdot率 + \frac{5^2}{6\cdot 7}(二差)\cdot率 + \frac{7^2}{8\cdot 9}(三差)\cdot率 + \frac{9^2}{10\cdot 11}(四差)\cdot率 + \cdots$$

また径矢弦の術 $4dh - 4h^2 = c^2$ より $4\dfrac{h}{d} - 4\left(\dfrac{h}{d}\right)^2 = \dfrac{c^2}{d^2} = 率$ これを $\boxed{1}$に代入して

$$s = c + \frac{2}{3}c\left(\frac{h}{d}\right) + \frac{8}{15}c\left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{48}{105}c\left(\frac{h}{d}\right)^3 + \frac{384}{945}c\left(\frac{h}{d}\right)^4 + \cdots$$

$\boxed{3}$ 直径 $= d$ と 弦 $= c$ を与えて 弧積 $= S$ を求めよ[1)].



帯直弧積の図

$$某積 = 積_k = 子\cdot某径 = \frac{c}{n}\sqrt{d^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 c^2} = \frac{cd}{n}\sqrt{1 - 天^2率}$$

$$= \frac{cd}{n}\left(1 - \frac{1}{2}率天^2 - \frac{1}{8}率^2天^4 - \frac{3}{48}率^3天^6 - \frac{15}{384}率^4天^8 + \cdots\right)$$

$$= \frac{cd}{n}\left\{1 - \frac{1}{2}率\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \frac{1}{8}率^2\left(\frac{k}{n}\right)^4 - \frac{3}{48}率^3\left(\frac{k}{n}\right)^6 - \frac{15}{384}率^4\left(\frac{k}{n}\right)^8 + \cdots\right\}$$

$$帯直弧積 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 積_k = cd\left(1 - \frac{率}{2\cdot 3} - \frac{率^2}{5\cdot 8} - \frac{3\,率^3}{7\cdot 48} - \frac{15\,率^4}{9\cdot 384} - \cdots\right)$$

$$直積 = c\sqrt{d^2 - c^2} = cd\sqrt{1 - 率} = cd\left(1 - \frac{率}{2} - \frac{率^2}{8} - \frac{3\,率^3}{48} - \frac{15\,率^4}{384} - \cdots\right)$$

$$S = \frac{帯直弧積 - 直積}{2} = cd\left(\frac{率}{2\cdot 3} + \frac{率^2}{4\cdot 5} + \frac{3\,率^3}{7\cdot 16} + \frac{15\,率^4}{9\cdot 96} + \cdots\right)$$

これは

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2\sin\theta \\
&= \frac{d^2}{8}\left(2\sin^{-1}\frac{c}{d} - 2\frac{c}{d}\sqrt{1-\left(\frac{c}{d}\right)^2}\right) \\
&= \frac{d^2}{4}\left\{\frac{c}{d} + \frac{1}{6}\left(\frac{c}{d}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{c}{d}\right)^5 + \frac{5}{112}\left(\frac{c}{d}\right)^7 + \cdots\right. \\
&\qquad \left. -\frac{c}{d}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{d^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^2 - \frac{3}{48}\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^3 - \frac{15}{384}\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^4 - \cdots\right)\right\} \\
&= cd\left\{\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{c^2}{d^2}\right) + \frac{1}{4\cdot 5}\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^2 + \frac{3}{7\cdot 16}\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^3 + \frac{15}{9\cdot 96}\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^4 + \cdots\right\}
\end{aligned}
$$

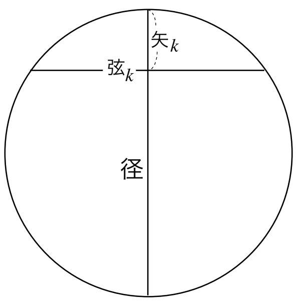
と一致する．また

$$
S = 2\int_{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{c^2}{4}}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx = \frac{c^3}{6} + \frac{c^5}{20} + \frac{3c^7}{112} + \frac{5c^9}{288} + \cdots
$$

とも一致する．

注 1) このように弦を等分する方法は安島直円が開発したもので，『弧背術解』に述べられている．それまでは，円弧を等分し，弧長を求めることが中心であったが，安島のこのような新術により，応用範囲が広がり，円理発展の礎を築いたのである．

$\boxed{4}$ 直径 $= d$ と 矢 $= h$ を与えて 弧積 $= S$ を求めよ．



子 $= \dfrac{h}{n}$，率 $= \dfrac{h}{d}$，某矢 $=$ 矢$_k =$ 矢天 $= \dfrac{hk}{n}$ とする．径矢弦の術より 弦$_k{}^2 = 4d$ 矢$_k - 4$ 矢$_k{}^2$

$$
\begin{aligned}
\text{弦}_k &= 2\sqrt{dh\,\text{天} - \text{率}\,dh\,\text{天}^2} = 2\sqrt{dh}\sqrt{\text{天}}\sqrt{1-\text{率天}} \\
&= 2\sqrt{dh}\sqrt{\text{天}}\left(1 - \frac{1}{2}\text{率天} - \frac{1}{8}\text{率}^2\text{天}^2 - \frac{3}{48}\text{率}^3\text{天}^3 - \frac{15}{384}\text{率}^4\text{天}^4 - \cdots\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{某積} &= \text{積}_k = \text{子}\cdot\text{弦}_k \\
&= 2h\sqrt{dh}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\text{天}} - \frac{1}{2}\text{率天}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\text{率}^2\text{天}^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{48}\text{率}^3\text{天}^{\frac{7}{2}} - \frac{15}{384}\text{率}^4\text{天}^{\frac{9}{2}} - \cdots\right)
\end{aligned}
$$

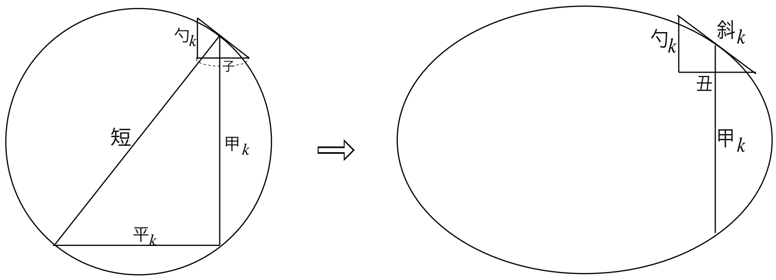
$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 積_k \\
&= 2h\sqrt{dh}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}率-\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}率^2-\frac{3}{48}\cdot\frac{2}{9}率^3-\frac{15}{384}\cdot\frac{2}{11}率^4-\cdots\right) \\
&= 4h\sqrt{dh}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{h}{d}\right)-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{h}{d}\right)^2-\frac{3}{48}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{h}{d}\right)^3-\frac{15}{384}\cdot\frac{1}{11}\left(\frac{h}{d}\right)^4-\cdots\right)
\end{aligned}
$$

これは

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_{\frac{1}{4}-h}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx \\
&= \frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{14}h^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{36}h^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{352}h^{\frac{11}{2}}-\cdots
\end{aligned}
$$

と一致する．

$\boxed{5}$ 長径 $=a$ と 短径 $=b$ の楕円の 周長 $=L$ を求めよ．



$\dfrac{b}{n}=$ 子, $\dfrac{a}{n}=$ 丑, 某平 $=k$ 子 $=\dfrac{k}{n}b$ とする．短径を直径とする円を x 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍したものが楕円と考える．直径 b の円において

$$
某勾 = 勾_k = \frac{子\times 某平}{某甲} = \frac{b\,天}{n\sqrt{1-天^2}}
$$

$$
\begin{aligned}
某斜^2 = 斜_k^2 = 勾_k^2 + 丑^2 &= \frac{b^2天^2}{n^2(1-天^2)}+\left(\frac{a}{n}\right)^2 = \frac{a^2+(b^2-a^2)\,天^2}{n^2(1-天^2)} \\
&= \frac{a^2\left(1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}天^2\right)}{n^2(1-天^2)} = \frac{a^2(1-率天^2)}{n^2(1-天^2)} \qquad \left(率=\frac{a^2-b^2}{a^2}=離心率^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
斜_k &= \frac{a}{\sqrt{1-天^2}}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{1-率天^2} \\
&= \frac{a}{\sqrt{1-天^2}}\cdot\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}率天^2-\frac{1}{8}率^2天^4-\frac{3}{48}率^3天^6-\cdots\right)
\end{aligned}
$$

これを立表第四條甲除偶乗表にて畳む．

$$
L = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 斜_k
$$

$$= 2a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\text{率}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\text{率}^2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{6}{8} - \frac{3}{48}\text{率}^3\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{30}{48} - \cdots\right)$$
$$= a\pi\left(1 - \frac{1}{2^2}\text{率} - \frac{3}{8^2}\text{率}^2 - \frac{3\cdot 15}{48^2}\text{率}^4 - \frac{15\cdot 105}{384^2}\text{率}^4 - \cdots\right)$$

これは楕円 $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ において $e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$ として

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2a\pi\left[1 - \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right\}^2\frac{e^{2k}}{2k-1}\right] \tag{1}$$

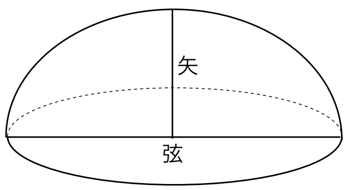
と一致している．

$t = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ の変換 で

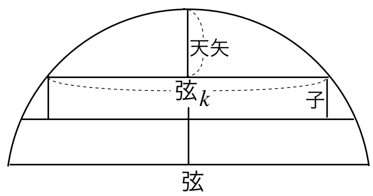
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$$
$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}e^{2k}\sin^{2k}t\right)dt$$

これに $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}t\,dt = \frac{\pi}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$ を代入して項別積分して (1) が得られる．

$\boxed{6}$ 球径と矢を与えて球缺の体積を求めよ．



球缺



子 $= \dfrac{\text{矢}}{n}$ とし，矢に直交する弦を 弦$_k$ とする．径矢弦の術より

$$\text{弦}_k{}^2 = 4\,\text{矢径天} - 4\,\text{矢}^2\text{天}^2$$

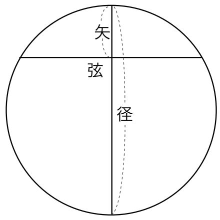
$$\text{某積} = V_k = \frac{\pi}{4}\text{弦}_k{}^2\text{子} = \frac{\pi}{4}(4\,\text{矢径天} - 4\,\text{矢}^2\text{天}^2)\,\text{子}$$

これを畳んで

$$V = \frac{\pi}{4}\left(4\,\text{矢}^2\text{径}\frac{1}{2} - 4\,\text{矢}^3\frac{1}{3}\right) = \pi\text{矢}^2\left(\frac{\text{径}}{2} - \frac{\text{矢}}{3}\right)$$

ここで 矢 $=$ 径 とすると 球の体積 $= \dfrac{\pi}{6}$径^3 $=$ 玉積率 $\cdot$ 径^3 となる．

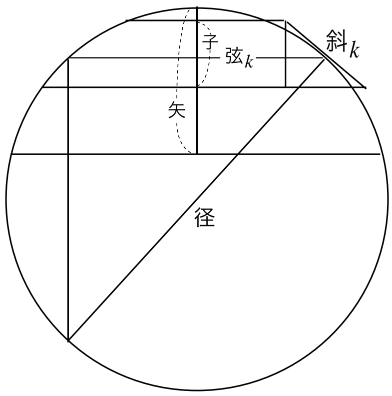
弦と矢を与えて球缺の体積を求めるには以下の如し．



径矢弦の術より 径 $= \dfrac{弦^2}{4\,矢} + 矢$ とし，これを代入すると

$$V = \frac{\pi}{8}矢弦^2 + \frac{\pi}{6}矢^3 = \frac{\pi}{6}矢\left(\frac{3}{4}弦^2 + 矢^2\right) = 玉積率 \cdot 矢\left(0.75\,弦^2 + 矢^2\right)$$

$\boxed{7}$ 弦と矢を与えて球缺の筧積 (表面積) を求める．

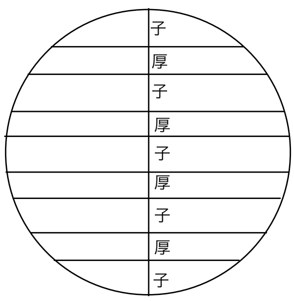


$斜_k = \dfrac{子径}{弦_k}$,　$周_k = 弦_k\pi$

$$筧_k = 斜_k周_k = \frac{子径}{弦_k}弦_k\pi = 子矢\pi$$

これを畳んで 筧積 $=$ 矢径π，ここで 矢 $=$ 径 とすると 球筧積 $=$ 径$^2\pi$

$\boxed{8}$ 球を N 個の等筧積と $N-1$ 個の厚に切断するとき等筧積を求めよ．(図は $N=5$)

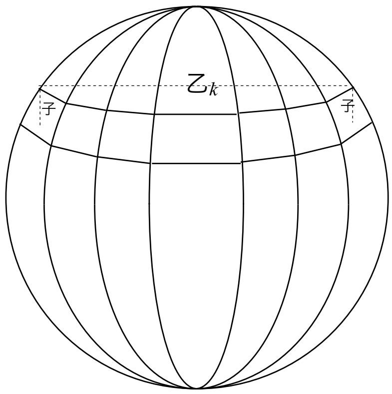


等覚積の高さを子とすると 径 $= n$ 子 $+ (n-1)$ 厚 だから 子 $= \dfrac{\text{径}+\text{厚}}{n} -$ 厚，この子を$\boxed{7}$の矢とみて

$$\text{覚積} = \text{径子}\pi = \text{径}\left(\frac{\text{径}+\text{厚}}{n} - \text{厚}\right)\pi$$

$\boxed{9}$ 図 (影印参照) のような，曲線部分は楕円で切り口は 12 角形のカボチャ形[1] の体積を求めよ．楕円の長径と短径が与えられているとする．

まず長径を直径とする球で同じような立体を考え，その体積を V とするとき，$\dfrac{\text{短}}{\text{長}}V$ が求める体積である．



径矢弦の術で $\text{乙}_k{}^2 = 4\,\text{長天} - 4\,\text{長}^2\text{天}^2$，直径が 乙_k の円に内接する正 12 角形の面積は $\dfrac{3}{4}\text{乙}_k{}^2$

$$\text{某積} = V_k = \frac{3}{4}\text{乙}_k{}^2\text{子} = 3(\text{長}^2\text{天} - \text{長}^2\text{天}^2)\ \text{子}$$

これを畳んで $V = 3\,\text{長}\left(\dfrac{1}{2}\text{長}^2 - \dfrac{1}{3}\text{長}^2\right) = \dfrac{1}{2}\text{長}^3$

よって，求める体積 $= \dfrac{\text{短}}{\text{長}}V = \dfrac{1}{2}\text{短長}^2$

注 1) 原文では矮立円と記す．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$ を y 軸の回りに回転した立体の皮を剥いたような形．原点から高さ t のところでの切り口は直径 $2a\sqrt{1 - \dfrac{t^2}{b^2}}$ の円に内接する正 12 角形だから

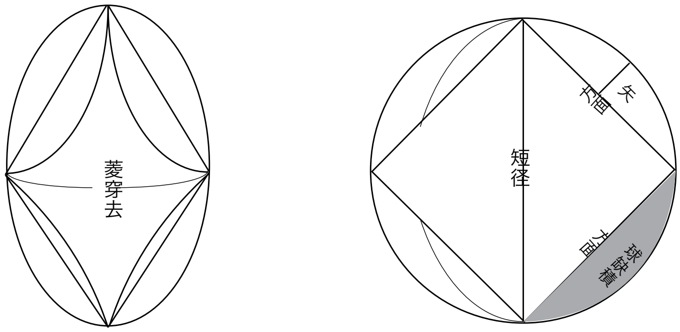
$$\text{求める体積} = 2\int_0^b \frac{3}{4}\cdot 4a^2\left(1 - \frac{t^2}{b^2}\right)dt = 4a^2b = \frac{1}{2}\text{長}^2\text{短}$$

で現代解と一致する．

$\boxed{10}$ 回転楕円体 (ラグビーボール) から菱形柱を穿去した立体の体積を求めよ．

まず短径を直径とする球から正四角柱を穿去した体積 W を求める．

$$\text{方面} = \frac{\text{短}}{\sqrt{2}},\quad \text{矢} = \frac{\text{短}}{2} - \frac{\text{短}}{2\sqrt{2}}$$



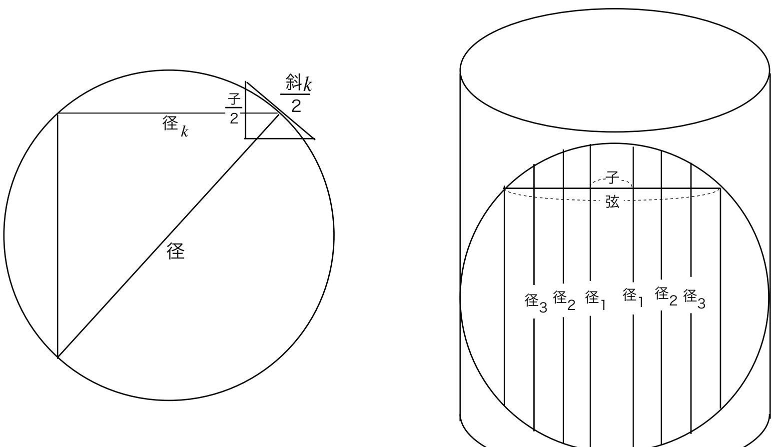
$\boxed{6}$ より

$$
\begin{aligned}
U = \text{球缺積} &= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{6}\text{方}^2\text{矢} + \frac{\pi}{6}\text{矢}^2 \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\text{短}^2}{2}\left(\frac{\text{短}}{2} - \frac{\text{短}}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{6}\left(\frac{\text{短}}{2} - \frac{\text{短}}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\text{短}^3 - \frac{5}{8\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{6}\text{短}^3 \\
&= \frac{1}{2}\text{球積} - \frac{5}{8\sqrt{2}}\text{球積}
\end{aligned}
$$

$$
W = \text{球積} - 4U = \frac{5}{2\sqrt{2}}\text{求積} - \text{求積}
$$

$$
V = \frac{\text{長}}{\text{短}}W = \frac{\text{長}}{\text{短}}\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{6}\text{短}^3 - \frac{\pi}{6}\text{短}^3\right) = \frac{\pi}{6}\text{短}^2\text{長}\,(\sqrt{3.125} - 1)
$$

$\boxed{11}$ 円柱から帯直弧を穿去した立体の体積と覓積[1] を求めよ．帯直弧の径と円柱の径は等しく，円柱径と弦の長さが与えられているとする．



$\text{子} = \dfrac{\text{弦}}{n}$ とする．$\text{径}_k{}^2 = \text{径}^2 - \text{弦}^2\text{天}^2$，　$\text{斜}_k = \dfrac{\text{径}}{\text{径}_k}\text{子}$

$$
\text{積}_k = \text{径}_k{}^2\text{子} = \frac{\text{径}^2\text{弦}}{n} - \frac{\text{弦}^3}{n}\text{天}^2
$$

これを畳み

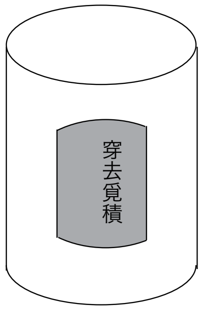
$$穿去積^{2)} = 径^2弦 - \frac{1}{3}弦^3$$

$$覓_k = 斜_k径_k = \frac{径弦}{n}$$

これを畳み

$$覓積 = 径弦$$

注 1) 本問の覓積は円柱の側面にあたる部分の面積のみをさす．以後覓積はこのような場合が多い．



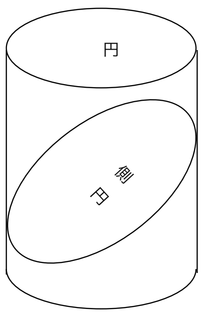
注 2) 術文には 穿去積 $= 覓積 \cdot 径 - \dfrac{1}{3}弦^3$ とある．

$\boxed{12}$ 円柱から円柱を穿去した立体の体積と覓積を求めよ．2 つの円柱の径は等しいとする．
$\boxed{11}$で弦を径とした場合と考えて

$$穿去積 = 径^3 - \frac{1}{3}径^3 = \frac{2}{3}径^3$$

$$覓積 = 径^2$$

$\boxed{13}$ 円柱から斜めの楕円柱をを穿去した立体の体積を求めよ．円柱径と楕円の長径，短径が与えられているとする．

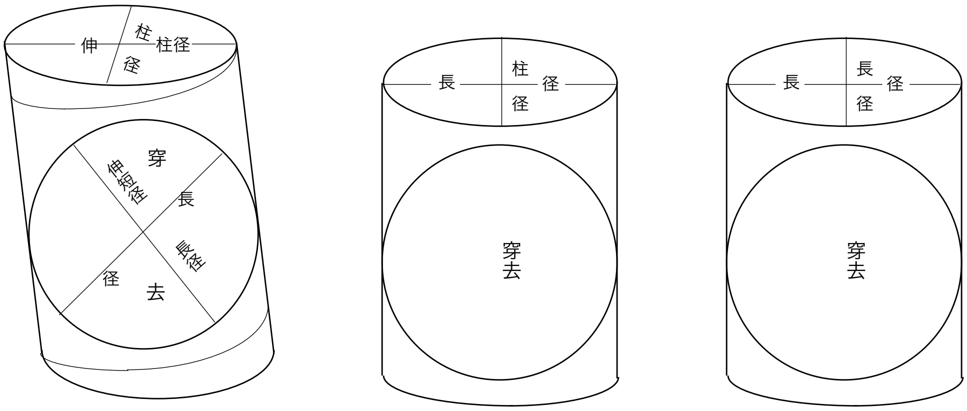


穿去する楕円が円になるように還原すると，円柱は斜めに伸びて第一図のようになる．この楕円柱の上下を切り捨てると第二図のようになる．この楕円柱を円柱に還原すると第三図のようになり，$\boxed{12}$に帰着する．

$$第三穿去積 = \frac{2}{3}長^3$$

$$第二穿去積 = \frac{径}{長}第三穿去積 = \frac{2}{3}径長^2$$

$$穿去積 = \frac{短}{長}第二穿去積 = \frac{2}{3}長短径$$ [1)]



第一　　第二　　第三

注 1) 円柱径 $= 2d$, 長径 $= 2a$, 短径 $= 2b$ として，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を原点の回りに θ だけ回転した式をつくると，

$$b^2(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + a^2(-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = a^2b^2$$

$$(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)y^2 + 2(b^2 - a^2)xy\sin\theta\cos\theta + (b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)x^2 - a^2b^2 = 0 \cdots\cdots ①$$

これを y の二次式とみて，判別式 $\geqq 0$ より

$$a^2\,\mathrm{b}^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) - a^2b^2x^2 \geqq 0$$

$$-\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \leqq x \leqq \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

よって $\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = d$ より $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{d^2 - b^2}{a^2 - b^2}}$, $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{a^2 - d^2}{a^2 - b^2}}$

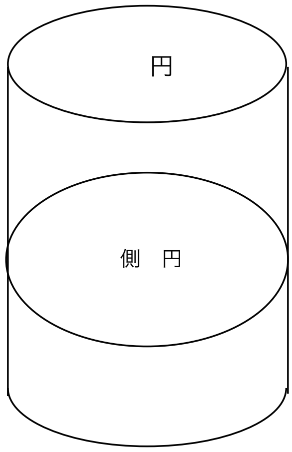
①を y について解くと

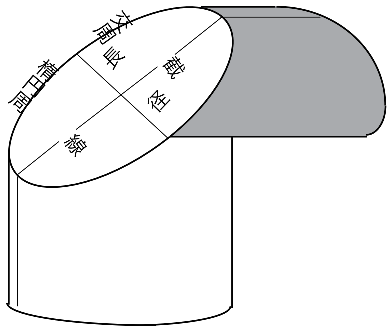
$$y = \frac{\sqrt{(a^2 - d^2)(d^2 - b^2)} \pm ab\sqrt{d^2 - x^2}}{d^2}$$

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2ab}{d^2}\iint_D \sqrt{d^2 - x^2}\,dxdy \qquad D: x^2 + z^2 \leqq d^2 \\
&= \frac{8ab}{d^2}\int_0^d\int_0^{\sqrt{d^2 - x^2}} \sqrt{d^2 - x^2}\,dzdx \\
&= \frac{8ab}{d^2}\int_0^d (d^2 - x^2)dx \\
&= \frac{16abd}{3} = \frac{2}{3}長短径
\end{aligned}$$

となり，現代解と一致する．

$\boxed{14}$ 円柱から楕円柱を穿去したときの交線の長さを求めよ．円柱径 (= 長径) と短径の長さが与えられ，楕円柱は傾いていないとする．



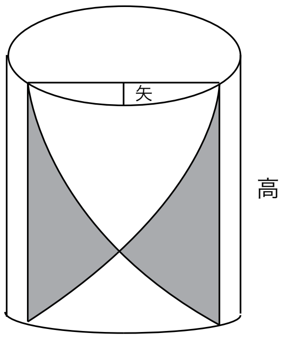


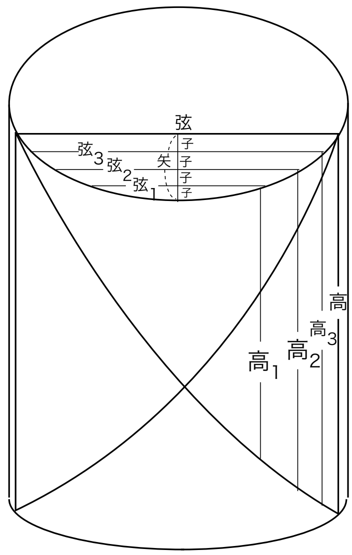
截斜 (= 交線でできる楕円の長径) $= \sqrt{長^2 + 短^2}$，交線でできる楕円の短径はもとの楕円柱の長径に等しいから，$\boxed{5}$により交線の楕円周長 L が求まる．

$$L = 長\pi \left(1 - \frac{1}{2^2}率 - \frac{3}{8^2}率^2 - \frac{3 \cdot 15}{48^2}率^3 - \frac{15 \cdot 105}{384^2}率^4 - \cdots\right)$$

$$率 = \frac{長^2 - 短^2}{長^2}$$

$\boxed{15}$ 円柱を垂直に切り，また左右斜めに切った立体 (図の黒部分) の体積と覓積を求めよ．円柱径と矢と高が与えられているとする．





子 $= \dfrac{矢}{n}$ とする．径矢弦の術より 弦$_k{}^2 = 4$ 径矢天 $- 4$ 矢^{2}天^2

$\boxed{7}$でやったように 斜$_k = \dfrac{径}{弦_k}$子，　また 弦 : 高 $=$ 弦$_k$: 高$_k$ より 高$_k = \dfrac{弦_k高}{弦}$

$$
\begin{aligned}
積_k &= \frac{1}{2}高_k \cdot \frac{弦_k}{2}子 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{高\,(4\,径矢天 - 4\,矢^2天^2)}{弦}子 \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{高矢^2}{弦}径天 - \frac{1}{n} \cdot \frac{高矢^3}{弦}天^2
\end{aligned}
$$

これを 2 倍して畳むと

$$
截黒積 = 2\left(\frac{高矢^2}{弦}径 \cdot \frac{1}{2} - \frac{高矢^3}{弦} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{(3\,径 - 2\,矢)\,高矢^2}{3\,弦}
$$

ここで 極 $= \sqrt{\dfrac{径}{矢} - 1}$ とおくと，径矢弦の術より 弦 $= 2$ 矢極 よって

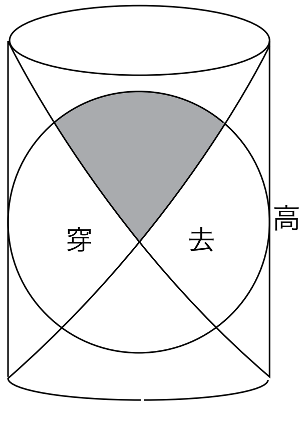
$$
截黒積 = \frac{(3\,径 - 2\,矢)\,高矢}{6\,極}
$$

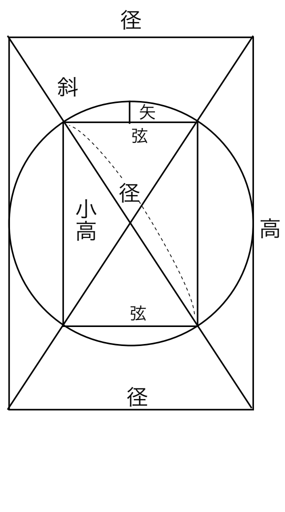
$$
冪_k = 高_k斜_k = \frac{高矢径}{n\,弦}
$$

これを 2 倍して畳むと

$$
冪積 = 2\frac{高矢径}{弦} = \frac{高径}{極}
$$

$\boxed{16}$ 円柱から円柱を穿去したものを左右斜めに切った立体 (図の黒部分) の冪積を求めよ．二つの等しい円柱径と高が与えられているとする．





$$
斜 = \sqrt{径^2 + 高^2}
$$

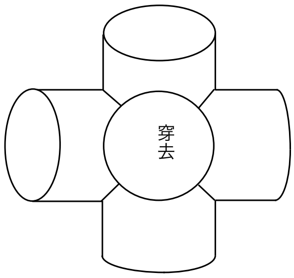
弦 : 径 $=$ 径 : 斜 より 弦 $= \dfrac{径^2}{斜}$，小高 : 径 $=$ 高 : 斜 より 小高 $= \dfrac{径高}{斜}$

$$
矢 = \frac{径}{2} - \frac{小高}{2} = \frac{径}{2} - \frac{径高}{2\,斜}
$$

$\boxed{11}$により 帯直弧覓積 $=$ 径弦，$\boxed{15}$により 左右覓積 $= \dfrac{2\,小高\cdot矢\cdot径}{弦}$ よって

$$黒覓積 = \frac{1}{2}(帯直弧覓積 - 左右覓積) = \frac{1}{2}径\left(\sqrt{径^2+高^2} - 高\right)$$

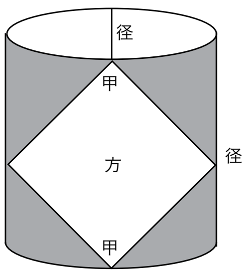
$\boxed{17}$ 互いに垂直に交わる 3 本の円柱によって穿去される立体の覓積を求めよ．



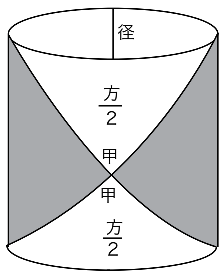
$\boxed{16}$で 高 $=$ 径 とし，斜 $= \sqrt{2}$径 とすればよい．

$$覓積 = 4\times\frac{1}{2}(径\cdot\sqrt{2}径 - 径^2) = (\sqrt{8}-2)\,径^2$$

$\boxed{18}$ 円柱から図のように正四角柱を穿去するとき，穿去積と覓積を求めよ．円柱径が与えられているとする．



第一図



第二図

円柱から正方形を穿去するときは第一図のようになる．これを上下入れ替えて第二図とする．これは$\boxed{15}$で弦 $=$ 径，矢 $= \dfrac{径}{2}$，高 $=$ 径 としたものであるから

$$黒積 = \frac{径^3}{6}\times 2 = \frac{径^3}{3} \quad (反対側も入れて)$$

$$黒覓積 = 径^2$$

依りて

$$求める穿去積^{1)} = 円柱の体積 - 黒積 = \frac{\pi}{4}径^3 - \frac{1}{3}径^3$$

$$求める覓積^{2)} = \frac{1}{2}円柱の側面積 - 黒覓積 = \frac{1}{2}径^2\pi - 径^2$$

注 1) 術文には 穿去積 $= \dfrac{径^3}{2\cdot 3} + \dfrac{穿去覓積}{2}径$ とある．
円柱を $x^2+y^2=R^2$ とすると，

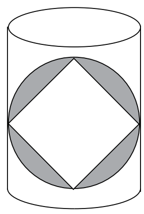
$$穿去積 = 8\int_0^R \int_0^{R-y} \sqrt{R^2-y^2}dxdy = 8\int_0^R (R-y)\sqrt{R^2-y^2}dy = 2\pi R^3 - \frac{8}{3}R^3 = \frac{\pi}{4}径^3 - \frac{1}{3}径^3$$

となり，現代解と一致する．
注 2) 穿去覓積は前面のみである．

$$穿去覓積 = 4\int_0^R \int_0^{R-y} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}dzdy = 4R\int_0^R \int_0^{R-y} \frac{dzdy}{\sqrt{R^2-y^2}} = 2\pi R^2 - 4R^2 = \frac{1}{2}径^2\pi - 径^2$$

となり，現代解と一致する．

$\boxed{19}$ 円柱から図のように正四角柱と円柱を穿去する．黒い部分の穿去積が与えられたとき，黒覓積を求めよ．



円柱で穿去したものは⑫より，円穿去積 $= \dfrac{2}{3}径^3$， 円覓積 $=$ 径^2
正方形で穿去したものは⑱より，方穿去積 $= \dfrac{\pi}{4}径^3 - \dfrac{径^3}{3}$， 方覓積 $= \dfrac{1}{2}径^2\pi - 径^2$
それぞれの差をとって，

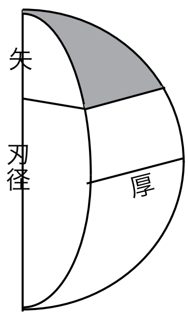
$$黒覓積 = 円覓積 - 方覓積 = 2\,径^2 - \frac{1}{2}径^2\pi$$

$$黒積 = 円穿去積 - 方穿去積 = 径^3 - \frac{\pi}{4}径^3$$

よって 黒積 $= \dfrac{径}{2} \times$ 黒覓積，これより径を求めて 径 $= \dfrac{2\,黒積}{黒覓積}$

$$黒覓積 = 2\sqrt[3]{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)黒積^2}$$

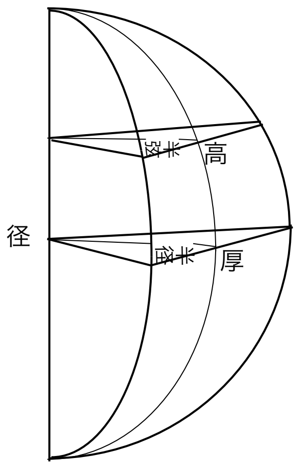
$\boxed{20}$ 図のような半円櫛形を作る [1)]．脊から刃に向かってまっすぐに切るとき，図の黒覓積と矢までの上缺積を求めよ．円径，脊厚，矢が与えられているとする．



$\boxed{15}$の截積，覓積の半分が本問の上缺積，黒覓積であるから，

$$上缺積 = \frac{矢^2径高}{2\,弦} - \frac{矢^3高}{3\,弦}$$

$$黒覓積 = \frac{径高矢}{弦}$$



径 : 厚 = 弦 : 高 より 高 $= \dfrac{厚弦}{径}$，よって

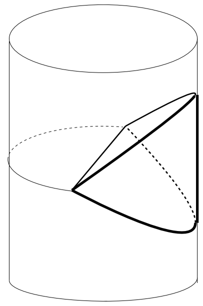
$$上缺積 = \frac{矢^2厚}{2} - \frac{矢^3厚}{3\,径}$$

$$黒覓積 = 厚矢$$

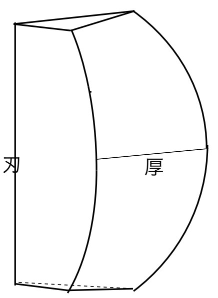
矢を径にして，櫛形全積，櫛形脊覓積とする．

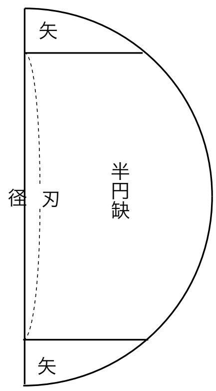
$$全積 = \frac{径^2厚}{6}, \quad 脊覓積 = 径厚$$

注 1) 球の一部ではないので注意．脊の部分は直線になっており，円柱を下図のように切断したの太線部分とみればよい．



$\boxed{21}$ 図のように櫛形から上下を同じ長さで切り落とした半円缺櫛形の体積と脊覓積を求めよ．円径，刃，脊厚が与えられているとする．





矢 $=\dfrac{径-刃}{2}$，$\boxed{20}$より 半円形櫛形 $=\dfrac{径^2厚}{6}$，　半円形脊覓積 $=$ 径厚

$$上缺積=\frac{矢^2厚}{2}-\frac{矢^3厚}{3\,径}$$

$$黒覓積=厚矢$$

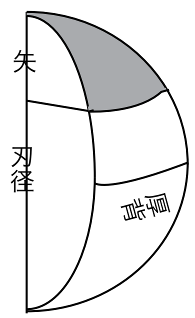
ゆえに

$$半円缺形櫛積^{1)}=半円形櫛積-2\,上缺積=\frac{径刃厚}{4}-\frac{刃^3厚}{12\,径}$$

$$半円缺形脊覓積=半円形脊覓積-2\,黒覓積=刃厚$$

注 1) 術文には 半円缺形櫛積 $=\dfrac{1}{4}\left(径-\dfrac{刃^2}{3\,径}\right)\times$ 脊覓積 とある．

$\boxed{22}$ 図のような丸脊半円櫛形[1)] で上缺積と黒覓積を求めよ．径，厚背[2)]，矢が与えられているとする．



十分大きな n に対して 子 $=\dfrac{厚背}{n}$ とする[3)]．この子を$\boxed{20}$の厚として

$$等積=\frac{矢^2子}{2}-\frac{矢^3子}{3\,径}$$

$$等覓積=矢子$$

これらの和をとって[4)]

$$上缺積=\frac{矢^2厚背}{2}-\frac{矢^3厚背}{3\,径},\quad 黒覓積=矢\cdot厚背$$

矢を径に換えて

$$\text{全積} = \frac{\text{径}^2\text{厚背}}{6},\quad \text{背覓積} = \text{径}\cdot\text{厚背}$$

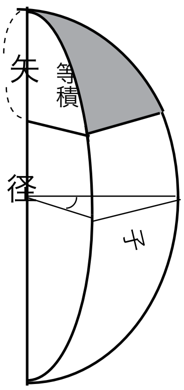
注 1) こんどは球の一部で，背厚は円弧をなす．

注 2) 本算題では「脊」と「背」を使い分けている．$\boxed{20}$のように直線の場合が「脊」で，本問のように円弧の場合が「背」である．

注 3) 原文では「$\dfrac{\text{厚背}}{\text{截数}}$ 少極の子とす」とある．截数が十分大きい場合，子を直線と見なして$\boxed{20}$の厚とするのである．

注 4) 厚背に対する中心角を θ とすると $\theta = \dfrac{2\,\text{厚背}}{\text{径}}$，また 子 $= \text{径}\sin\dfrac{\theta}{2n}$ として

$$\text{等積} = \left(\frac{\text{矢}^2}{2} - \frac{\text{矢}^3}{3\,\text{径}}\right)\text{径}\sin\frac{\theta}{2n}$$



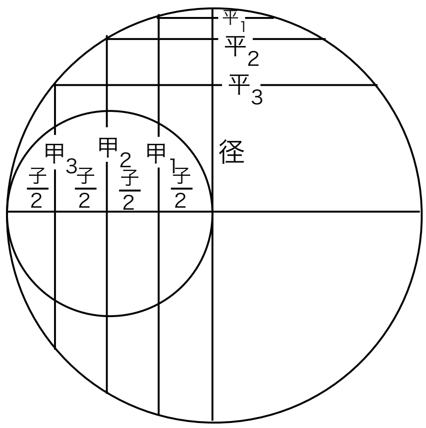
$$\begin{aligned}
\sum\text{等積} &= \text{径}\left(\frac{\text{矢}^2}{2} - \frac{\text{矢}^3}{3\,\text{径}}\right) n\sin\frac{\theta}{2n} \\
&= \text{径}\left(\frac{\text{矢}^2}{2} - \frac{\text{矢}^3}{3\,\text{径}}\right) \frac{\sin\dfrac{\theta}{2n}}{\dfrac{\theta}{2n}}\frac{\theta}{2} \\
&\longrightarrow \text{径}\left(\frac{\text{矢}^2}{2} - \frac{\text{矢}^3}{3\,\text{径}}\right)\frac{\theta}{2} \\
&= \text{径}\left(\frac{\text{矢}^2}{2} - \frac{\text{矢}^3}{3\,\text{径}}\right)\frac{\text{厚背}}{\text{径}} \\
&= \frac{\text{矢}^2\text{厚背}}{2} - \frac{\text{矢}^3\text{厚背}}{3\,\text{径}}
\end{aligned}$$

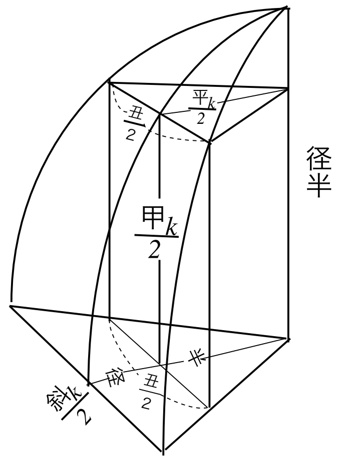
$\boxed{23}$ 球から，球の半径を直径とする円柱 2 個を穿去したとき，球の残部の体積と覓積を求めよ[1]．球径が与えられているとする．

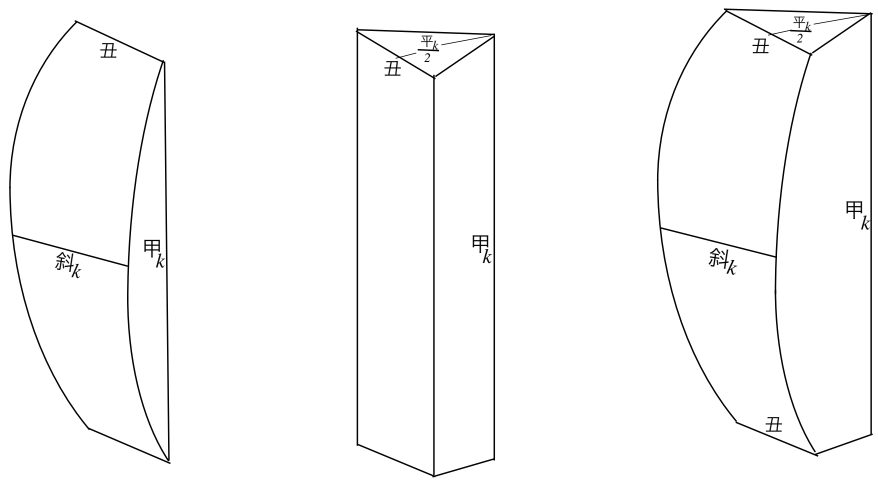
子 $= \dfrac{\text{径}}{n}$ とする．平$_k$ = 径天，甲$_k$ = 径$\sqrt{1-x^2}$，斜$_k = \dfrac{\text{径子}}{\text{甲}_k}$，丑 $= \dfrac{\text{平}_k\text{斜}_k}{\text{径}}$，圭堡壔積 $= \dfrac{\text{甲}_k\text{平}_k\text{丑}}{4}$

$\boxed{21}$により

$$\text{櫛形積} = \frac{\text{甲}_k\text{斜}_k\text{径}}{4} - \frac{\text{斜}_k\text{甲}_k^3}{12\,\text{径}}$$



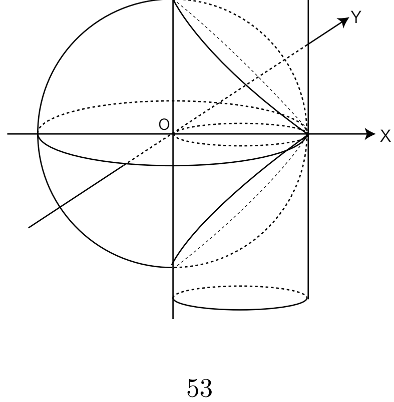




$V_k = \text{櫛形積} - \text{圭堡壔積} = \dfrac{\text{径}^2\text{子}}{6} - \dfrac{\text{径}^2\text{天}^2\text{子}}{6} \qquad \therefore \quad V = 2\sum^{\infty} V_k = \dfrac{2}{9}\text{径}^3$

㉑により $S_k = \text{甲}_k\text{斜}_k = \text{径子} \qquad \therefore \quad S = 2\sum^{\infty} S_k = 2\,\text{径}^2$

注 1) Viviani の穹面という．球面を $x^2+y^2+z^2=a^2$，円柱を $x^2+y^2=ax$ とし，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおけば



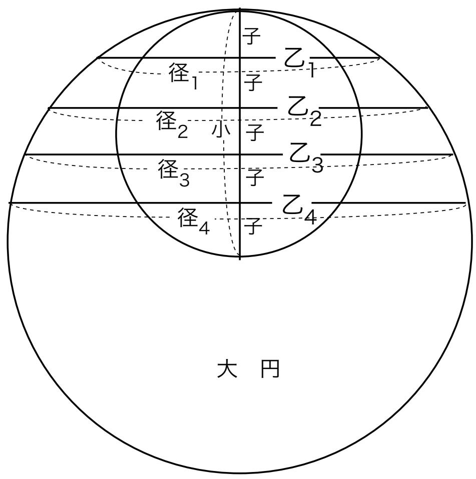
$$V=\frac{4}{3}\pi a^3-4\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\frac{4}{3}\pi a^3-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}rdr=\frac{16}{9}a^2=\frac{2}{9}\text{径}^3$$

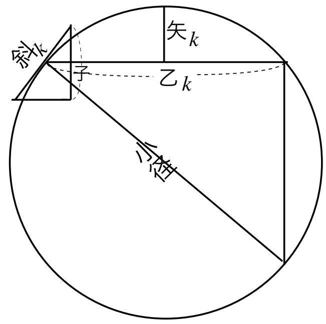
$$S=8\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{a}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=8a^2=2\,\text{径}^2$$

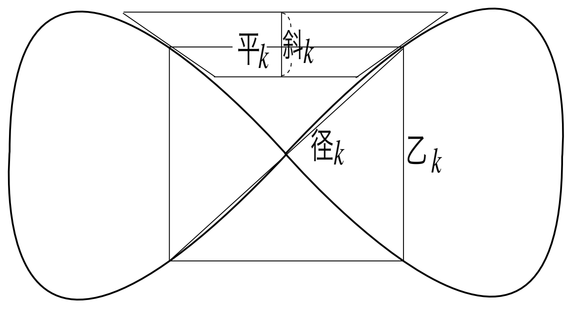
で現代解と一致する．

$\boxed{24}$ 球から円柱を穿去するとき，内面積の最大値を求めよ．球径が与えられているとする．

球径を大，円径を小とし，$\text{子}=\dfrac{\text{小}}{n}$ とする．







$\text{矢}_k=\text{小天}$，$\text{乙}_k{}^2=4\,\text{矢}_k(\text{小}-\text{矢}_k)$，$\text{径}_k{}^2=4\,\text{矢}_k(\text{大}-\text{矢}_k)$，$\text{平}_k=2\sqrt{(\text{大}-\text{小})\,\text{小天}}$，$\text{斜}_k=\dfrac{\text{小子}}{\text{乙}_k}$

$$S_k=\text{某覓積}^{1)}=2\,\text{平}_k\text{斜}_k=\frac{2\,\text{小}^2\sqrt{(\text{大}-\text{小})\,\text{小天}}}{n\,\text{乙}_k}$$

これを乙除奇乗表 [2] にて畳むと内面積 S は

$$S=4\,\text{小}\sqrt{\text{小}\,(\text{大}-\text{小})}\cdots\cdots①$$

$$S^2=16\,\text{小}^3(\text{大}-\text{小})$$

$$-S^2+16\,\text{大}\text{小}^3-16\,\text{小}^4=0\cdots\cdots②$$

適尽法[3] によりて

$$3\,\text{大}-4\,\text{小}=0$$

$$\text{小}=\frac{3}{4}\text{大}$$

①に代入して

$$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{大}^2$$

注 1) 某覓積は梯形の面積

注 2) 乙除奇乗表によると $\dfrac{\sqrt{\text{天}}}{\text{乙}_k}$ の畳数は $\dfrac{1}{\text{小}}$

注 3) 適尽法とは現代の微分法にあたるもの．内面積 $S=4\,\text{小}\sqrt{\text{小}\,(\text{大}-\text{小})}$ を小で微分するのであるが，無理関数の微分が出来ないので，2 乗して小の 4 次関数にして微分する．$S'=0$ を解いて答とする．増減などは調べていない．これが適尽法の術である．

S を小で微分すると $S'=\dfrac{2\,\text{小}\,(3\,\text{大}-4\,\text{小})}{\sqrt{\text{小}\,(\text{大}-\text{小})}}$，増減を調べると

小	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$大	$\cdots$	大
S'		+	0	−	
S		↗	最大	↘	

となり，現代解と一致している．三次式で適尽法をみてみよう．

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0\cdots①$$

において $X=x-\alpha$ とおくと，

$$\varphi(X)=aX^3+(3a\alpha+b)X^2+(3a\alpha^2+2b\alpha+c)X+f(\alpha)=0\cdots②$$

とかけ，これを変式という．①の解を α とし，変式の解を β とすれば $\alpha+\beta$ も①の解である．そこで変式の実も方も 0，即ち

$$f(\alpha)=0,\quad 3a\alpha^2+2b\alpha+c=0$$

となれば $\beta=0$ となり，$\alpha+\beta$ と α は等しくなり重解となる．このときの α を①の解の極数という．$f(x)=k$ とおくとき，$f(x)-k=0$ の解が極数となるときの k の値を $f(x)$ の極値とするのである．$f(x)$ の変式の方級は $f'(\alpha)$ だから，方級が 0 となるように係数を決めることが適尽方級法 (適尽法) である．

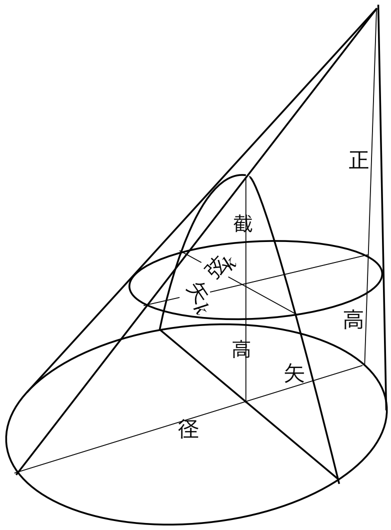
$\boxed{25}$ 底面に垂直な母線をもつ円錐を底面に垂直な平面で截るとき，切断面の最大値とそのときの矢の長さを求めよ．円径と高がが与えられているとする．

$$\text{子}=\frac{\text{径}-\text{矢}}{n},\quad \text{矢}_k=(\text{径}-\text{矢})\,\text{天}$$

$$\text{弦}_k=2\sqrt{(\text{径}-\text{矢})\,\text{矢}\text{天}}$$

$$\text{截高}=\frac{(\text{径}-\text{矢})\,\text{高}}{\text{径}}$$

$$\text{丑}=\frac{(\text{径}-\text{矢})\,\text{高}}{n\,\text{径}}$$



$$S_k = \text{弦}_k\text{丑} = \frac{2(\text{径}-\text{矢})\,\text{高}\sqrt{(\text{径}-\text{矢})\,\text{矢天}}}{n\,\text{径}}$$

これを畳んで

$$S = \text{截面積} = \sum^{\infty} S_k = \frac{4(\text{径}-\text{矢})\,\text{高}\sqrt{(\text{径}-\text{矢})\,\text{矢}}}{3\,\text{径}}$$

$$9\,\text{径}^2 S^2 = 16\,\text{高}^2(\text{径}^3\text{矢} - 3\,\text{径}^2\text{矢}^2 + 3\,\text{径矢}^3 - \text{矢}^4)$$

これを矢の式と見て，適尽法により (矢で微分して)

$$\text{径}^3 - 6\,\text{径}^2\text{矢} + 9\,\text{径矢}^2 - 4\,\text{矢}^3 = 0$$

$\text{径}^2 - 2\,\text{径矢} + \text{矢}^2$ で割って[1]，$\text{径} - 4\,\text{矢} = 0$，よって，$\text{矢} = \dfrac{\text{矢}}{4}$，このとき $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{径高}$

注 1) ここで，$\text{径}^3 - 6\,\text{径}^2\text{矢} + 9\,\text{径矢}^2 - 4\,\text{矢}^3 = (\text{径}-\text{矢})^2(\text{径} - 4\,\text{矢})$ と因数分解できることを使っている．和算で因数分解はあまり前面に表れないが，このような形でしばしば使われている．

$\boxed{26}$ 円楔起源

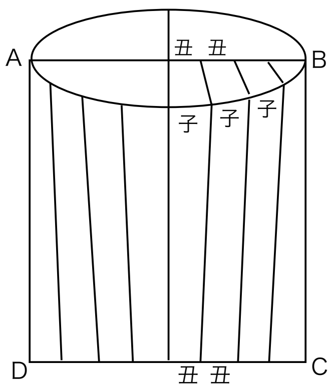


図1

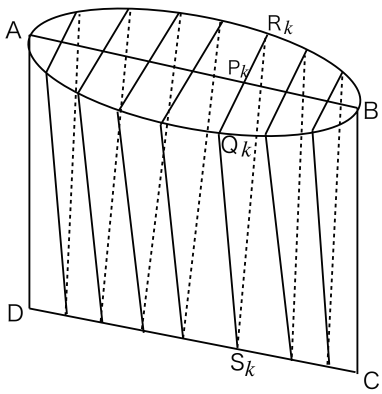


図2

正形

直径 AB の円と AB を一辺とする長方形 ABCD が円に垂直に立っているとする．弧 AB の n 等分点と DC の n 等分点を結ぶ．(図 1) ここで $n \to \infty$ としたときの形を正形の円楔といい，DC を円楔の刃という．

作形

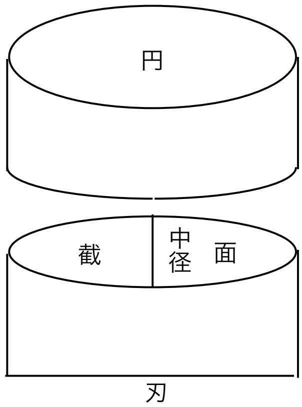
直径 AB の各 n 等分点を通り，AB に直交する弦 Q_kR_k をひき，DC の n 等分点 S_k と結ぶ．$\triangle Q_kR_kS_k$ は二等辺三角形になる．(図 2) ここで $n \to \infty$ としたときの形を作形の円楔という．

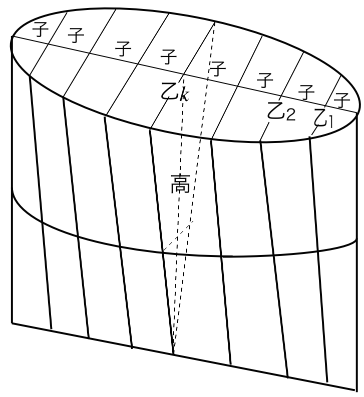
正形と作形はその形は等しくない．単に円楔と言うときは正形をさすので，この類の問題は文中に必ず正・作の文字を入れるべきである．

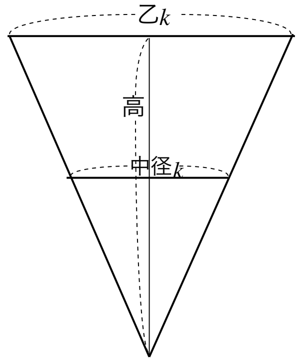
(この後原文では，円楔の数々の截断面を図示しているが，ここでは省略する．影印を参照されたい)

◯作形円楔類　　この編の問題はすべて作形であるので作形の文字は入れてない．正形は巻之三に載せる．

$\boxed{27}$ 作形円楔を底面に平行に截ったときの断面積と下の体積を求めよ．円径，高，中径があたえられえているとする．







子 $= \dfrac{\text{径}}{n}$ とし，中径$_k = \dfrac{\text{中径} \cdot \text{乙}_k}{\text{径}}$ とする．

$$S_k = \text{中径}_k \cdot \text{子} = \frac{\text{中径} \cdot \text{乙}_k}{n}$$

偶乗乙表にて畳んで断面積 S とする

$$S = \frac{\pi}{4} 中径 \cdot 径^{1)}$$

$$V_k = \frac{中径_k \cdot 小高 \cdot 子}{2} = \frac{中径^2 \cdot 高 \cdot 乙_k}{2n\,径} \qquad ここで\ 小高 = \frac{中径 \cdot 高}{径}$$

これを畳んで下積 V とする．

$$V = \frac{\pi}{4} \frac{中径^2 高}{2}$$

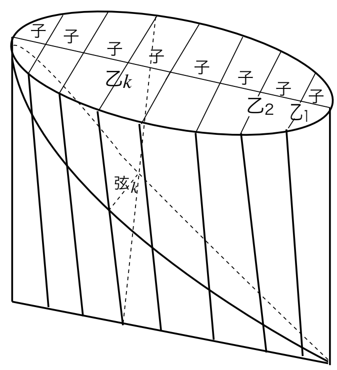
中径を円径に換えて楔全体積 W とする．

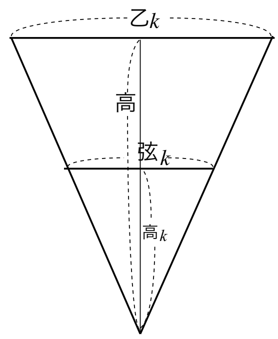
$$W = \frac{\pi}{4} \frac{径^2 高}{2}$$

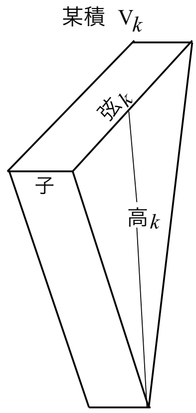
注 1) これは楕円の面積と同じなので切り口は楕円であるとしている．求積通考の他の箇所でもこのような論法がみられる．

$\boxed{28}$ 円楔を図のように径の端から刃の端まで斜めに切断するときの下の体積を求めよ．円径と高があたえられているとする．

$子 = \frac{径}{n}$, $丑 = \frac{高}{n}$, $高_k = 高天$, $弦_k = 乙_k天$ とする．





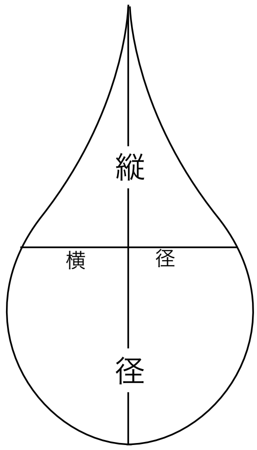


$$V_k = \frac{弦_k 高_k 子}{2} = \frac{高 \cdot 径 乙_k 天^2}{2n}$$

これを偶乗乙表にて畳んで下積 V とする．

$$V = \frac{\pi}{4}\frac{5\,径^2高}{32}$$

$\boxed{29}$ 図のような宝珠円[1] の面積を求めよ．縦径と横径があたえられているとする．



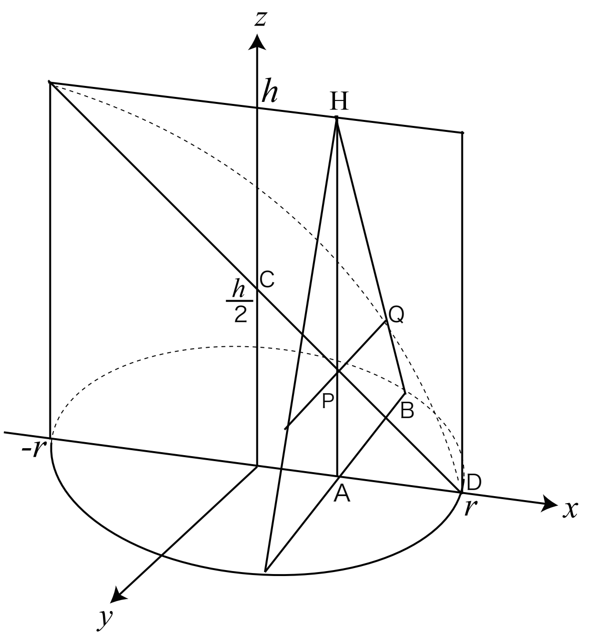
$子 = \dfrac{縦}{n}$ として㉘の 弦$_k$ をつかう．

$$S_k = 弦_k子 = \frac{縦乙_k天}{n}$$

偶乗乙表にてこれを畳んで求める面積 S とする．

$$S = \frac{\pi}{4}\frac{縦\cdot径}{2} = \frac{\pi}{4}縦横$$

注 1) 宝珠円とは㉘の切断面の形をいう．縦径は高に等しく，横径は円径の半分に等しい．



現代数学で確認しておく．円を $x^2+y^2=r^2$ とし，円周上の点を $B(x,\ y)$ とする．高さを h とすると，切断面の方程式は $Z=-\dfrac{h}{2r}X+\dfrac{h}{2}$ だから

$$PQ=\left(\frac{1}{2r}x+\frac{1}{2}\right)y=\left(\frac{1}{2r}x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{r^2-x^2}$$

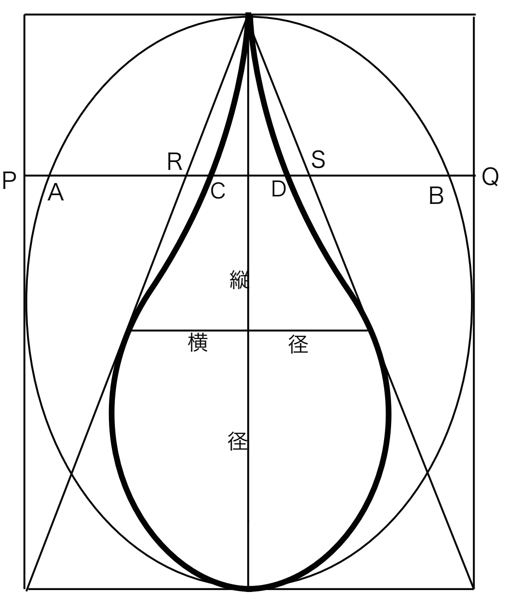
$CP=t$ とすると $t=\dfrac{\sqrt{4r^2+h^2}}{2r}x$ だから

$$PQ=\left(\frac{1}{\sqrt{4r^2+h^2}}t+\frac{1}{2}\right)\sqrt{r^2-\frac{4r^2}{4r^2+h^2}t^2}$$

$$CD=\sqrt{\frac{h^2}{4}+r^2}$$

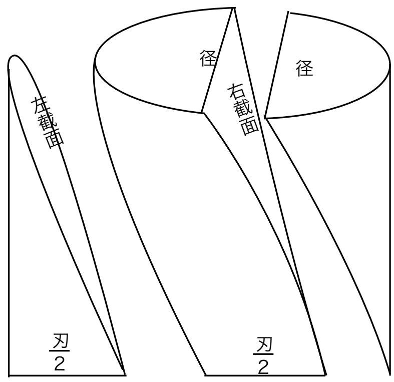
$$\begin{aligned}
\therefore\quad S&=2\int_{-\sqrt{\frac{h^2}{4}+r^2}}^{\sqrt{\frac{h^2}{4}+r^2}}PQdt\\
&=2\int_{-\sqrt{\frac{h^2}{4}+r^2}}^{\sqrt{\frac{h^2}{4}+r^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{4r^2+h^2}}t+\frac{1}{2}\right)\sqrt{r^2-\frac{4r^2}{4r^2+h^2}t^2}dt\\
&=\int_{-\sqrt{\frac{h^2}{4}+r^2}}^{\sqrt{\frac{h^2}{4}+r^2}}\sqrt{r^2-\frac{4r^2}{4r^2+h^2}t^2}dt\\
&=\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{h^2}{4}+r^2}\pi=\frac{横}{2}\frac{縦}{2}\pi=\frac{\pi}{4}縦横
\end{aligned}$$

なお，宝珠円はいろいろな呼び名があり，和田寧『創製異円算法』(1825) では燈円，桑本正明『尖円豁通』(1855) では尖円と言われている．和田は楕円を二等辺三角形内に縮小したものと定義し燈円と名付けている．楕円の弦 AB を $\dfrac{RS}{PQ}$ に縮小して CD を作る．即ち $CD=AB\times\dfrac{RS}{PQ}$．このようにして得られる C，D の軌跡 (図の太線) が宝珠円である．

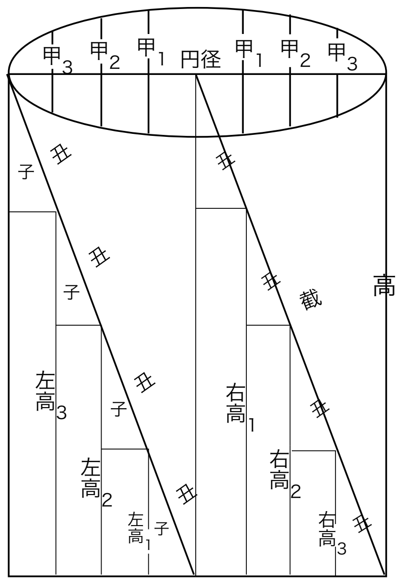


$\boxed{30}$ 前の宝珠円と等積で異形なるものを数件挙げておく．
(多くの図を示しているが，ここでは省略する．影印を参照されたい)
刃をかえても 乙$_k$ は不変であるので，Cavalieri の原理より面積は等しいとしている．

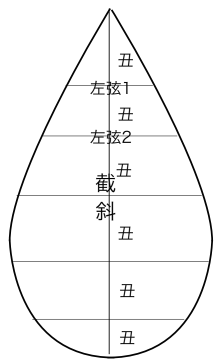
$\boxed{31}$ 円楔を図のように截断する．左截面積が与えられたとき，右截面積を求めよ．



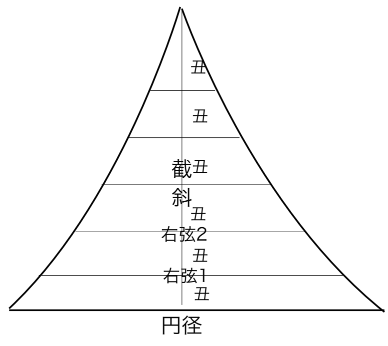
子 $= \dfrac{高}{n}$，左高$_k$ $=$ 高天，右高$_k$ $=$ 高 $-$ 左高$_k$ $=$ 高 $-$ 高天 とする．



左截面



右截面



$$\text{左弦}_k = \frac{\text{左高}_k\text{甲}_k}{\text{高}} = \text{甲}_k\text{天}，\ \text{丑} = \frac{\text{截斜}}{n}\ \text{とする．}$$

$$\text{左積}_k = \text{左弦}_k\text{丑} = \frac{\text{截斜}\cdot\text{甲}_k\text{天}}{n}$$

これを奇乗甲表にて畳んで左積 S とする．

$$S = \frac{\text{截斜}\cdot\text{径}}{3}$$

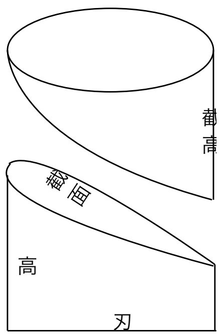
$$\text{右弦}_k = \frac{\text{右高}_k\text{甲}_k}{\text{高}} = \text{甲}_k - \text{甲}_k\text{天}$$

$$\text{右積}_k = \text{右弦}_k\text{丑} = \frac{\text{截斜}\cdot\text{甲}_k}{n} - \frac{\text{截斜}\cdot\text{甲}_k\text{天}}{n}$$

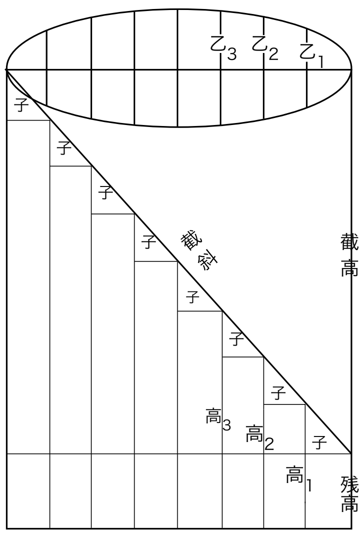
これを奇乗甲表で畳んで右積 T とする．

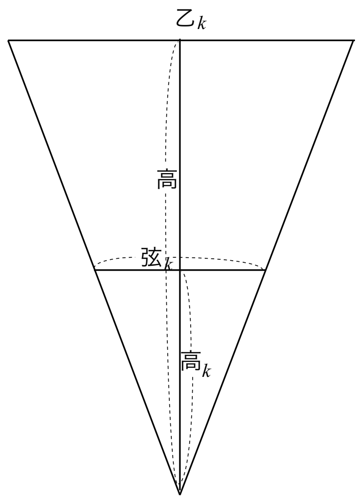
$$T = \frac{\pi}{4}\text{截斜}\cdot\text{径} - \frac{\text{截斜}\cdot\text{径}}{3} = \frac{\pi}{4}3S - S$$

$\boxed{32}$ 円楔を図のように径の端から截高まで斜めに切断したときの断面積を求めよ．円径，高，截高が与えられているとする．



$$\text{子} = \frac{\text{截高}}{n},\quad \text{残高} = \text{高} - \text{截高},\quad \text{高}_k = \text{残高} + \text{截高}\cdot\text{天}\ \text{とする．}$$





$$弦_k = \frac{高_k 乙_k}{高} = \frac{残高 \cdot 乙_k}{高} + \frac{截高 \cdot 乙_k 天}{高}$$

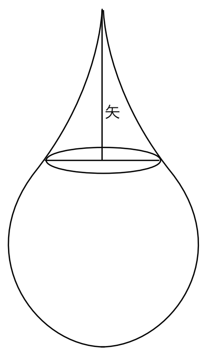
$丑 = \dfrac{截斜}{n}$ とする．ここで，截斜 $= \sqrt{截高^2 + 径^2}$

$$S_k = 弦_k 丑 = \frac{残高 \cdot 截斜 \cdot 乙_k}{n\,高} + \frac{截高 \cdot 截斜 \cdot 乙_k 天}{n\,高}$$

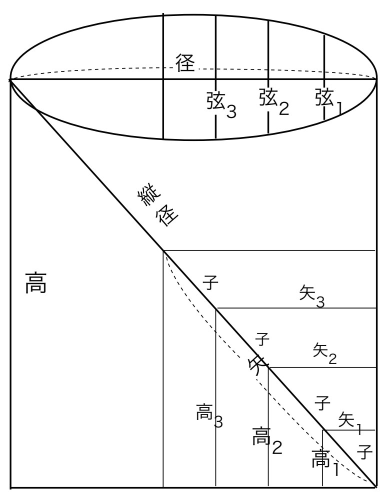
これを偶乗乙表にて畳んで断面積 S とする．

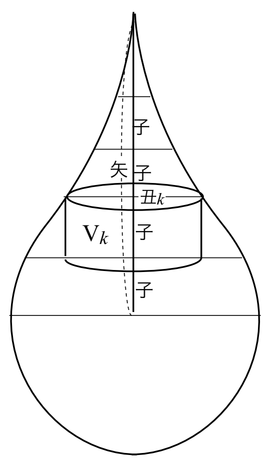
$$S = \frac{\pi}{4}\frac{残高 \cdot 截斜 \cdot 径}{高} + \frac{\pi}{4}\frac{截高 \cdot 截斜 \cdot 径}{2\,高} = \frac{\pi}{4}截斜 \cdot 径 - \frac{\pi}{4}\frac{截高 \cdot 截斜 \cdot 径}{2\,高}$$

$\boxed{33}$ 図のような宝珠[1)] がある．縦径，横径，矢が与えられたとき，上缺積及び全体積を求めよ．



$子 = \dfrac{矢}{n}$，$矢_k = \dfrac{矢 \cdot 径 \cdot 天}{縦}$ とする．





$$弦_k{}^2 = 4\,矢_k(径 - 矢_k) = \frac{4\,径^2矢天}{縦} - \frac{4\,径^2矢^2天^2}{縦^2}$$

$丑_k = \dfrac{弦_k 矢天}{縦}$ とする．

$$V_k = \frac{\pi}{4}丑_k{}^2子 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{4\,径^2矢^4天^3}{n\,縦^3} - \frac{4\,径^2矢^5天^4}{n\,縦^4}\right)$$

これを畳んで上缺積 V とすると，$径^2 = 4\,横^2$ だから

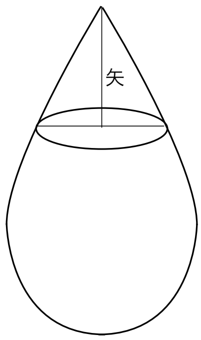
$$V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{径^2矢^4}{縦^3} - \frac{4\,径^2矢^5}{5\,縦^4}\right) = \pi\left(\frac{矢^4横^2}{縦^3} - \frac{4\,矢^5横^2}{5\,縦^4}\right)$$

矢を縦に換えて

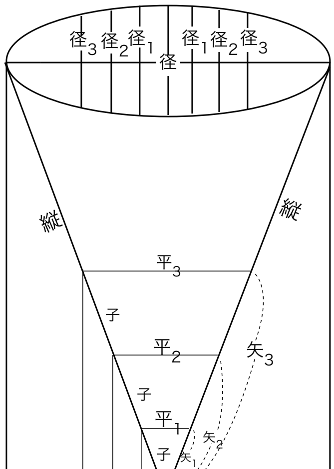
$$全積 = \frac{1}{5}横^2縦\pi$$

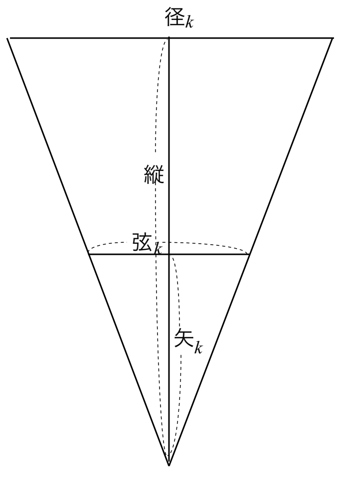
注 1) 宝珠円を縦径の回りに一回転してできる立体のこと．

$\boxed{34}$ 図のような椎実形[1] がある．縦径，横径，矢が与えられたとき，上缺積及び全体積を求めよ．



$子 = \dfrac{矢}{n}$，$矢_k = 矢天$，$平_k = \dfrac{矢_k径}{縦}$ とする．





$${径_k}^2 = 径^2 - {平_k}^2 = 径^2 - \frac{{矢_k}^2径^2}{縦^2}, \quad {弦_k}^2 = \frac{{矢_k}^2{径_k}^2}{縦^2}$$

$$V_k = \frac{\pi}{4}{弦_k}^2子 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{矢^3径^2天^2}{n\,縦^2} - \frac{矢^5径^2天^3}{n\,縦^4}\right)$$

これを畳んで上缺積 V とすると，$径^2 = \dfrac{16}{3}横^2$ だから

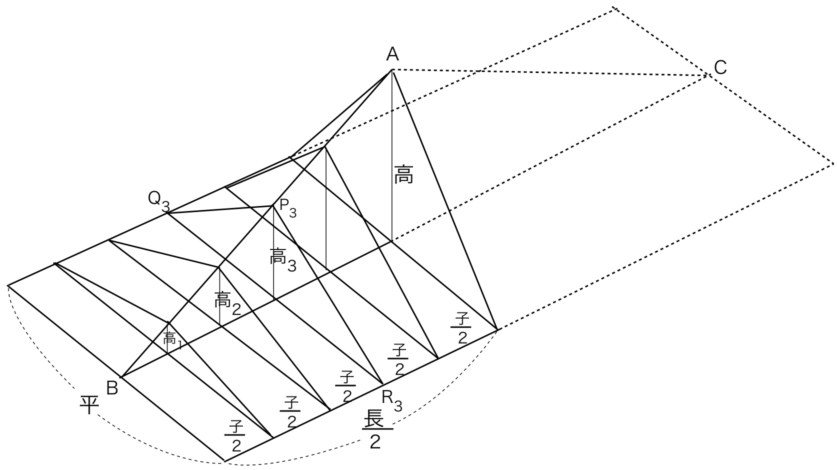
$$V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{矢^3径^2}{3\,縦^2} - \frac{矢^5径^2}{5\,縦^4}\right) = \frac{横^2矢^3\pi}{縦^2}\left(\frac{4}{9} - \frac{4\,矢^2}{15\,縦^2}\right)$$

矢を縦に換えて

$$全積 = \frac{8\,横^2縦\pi}{45}$$

注 1) 円楔を径の端から $\dfrac{刃}{2}$ の位置まで斜めに切断した図形，すなわち31の左截面を椎実円といい，椎実円の縦径を軸とする回転体を椎実形という．

$\boxed{35}$ 図のような作形直錐[1] がある．長，平，高が与えられたときその体積を求めよ．



$子 = \dfrac{長}{n}$，$丑 = \dfrac{高}{n}$，$高_k = 高天$ とする．

$$V_k = \frac{高_k平子}{2} = \frac{高長平天}{2n}$$

これを畳んで求める体積 V とする．

$$V = \frac{長平高}{4}$$

注 1) 底面が長方形で，三角形 ABC は二等辺三角形で，底面に垂直な平面による切り口である各 $\triangle P_kQ_kR_k$ が二等辺三角形になっているような立体．

算法求積通考巻之二終

参考文献

[1] 和算における積分 (その 1〜4)，深川英俊，『数学史研究』通巻 77,79,88,95 号，日本数学史学会，1978〜1982

[2] 和算ノ研究 行列式及び円理，加藤平左エ門，開成館，1934

[3] 和算に現れた Villarceau circles，直井功，小寺 裕，数理解析研究所講究録 1444『数学史の研究』，2005

[4] 明治前日本数学史，日本学士院編，1979