■はじめに

坂部廣胖『算法点竄指南録』15 巻 (文化 12 年/1815) は，当時の数学全般にかかわる教科書である．初学者でも読みやすいようにほとんど和文で書き，振り仮名も施されている．一，二，三巻では 197 問の算題とその術文を述べ，第四巻で算木による算法から点竄術の説明を詳らかにし，第五巻以降で全算題の解義を述べている．また随所に【番外】と題して，必要な説明を加えている．例えば【平方式を帰除式にする定法】【地方諸算法諸名目根元】【両式維乗定則】【招差法解】等々．

本書を読めば，師匠がいなくても，当時の数学の全貌を会得できたであろう．名著である．私は〈和算の五大名著〉の一つに選んでいる．因に五大名著は

- 塵劫記 (吉田光由) 1627 年
- 算法闕疑抄 (礒村吉徳) 1659 年
- 算法天元指南 (佐藤茂春) 1698 年
- 算法点竄指南録 (坂部廣胖) 1815 年
- 算法求積通考 (内田久命) 1844 年

坂部廣胖 (1759〜1824) は通称勇左衛門，字は子顕，中嶽または潤水と号す．晩成堂ともいう．一時期戸田姓を名乗る．初め本田利明に学び，後安島直円に従う．もと幕府の火消与力で，後浪人して弟子を育成する．弟子に川井久徳がいる．第 196 問では川井久徳の『開式新法』を紹介し，他でも川井の新しい研究を収めている．本書を最も有名にしているのは，第 32 問の鶴亀算であろう．従来は『孫子算経』の雉兎算として伝わっていたが，それを鶴と亀にしたのは本書が最初であるとされている．

本書を読み始めた時期ははっきりしないが，2009 年に近畿和算ゼミナール報告集［14］［15］で『算法求積通考』をまとめ，その後『算法点竄指南録』を読み始めたように思う．メンバーに多少の出入りはあったが，田村三郎，島野達雄，小寺裕の 3 人で読み続けた．田村三郎氏が鬼籍に入られてからは近畿和算ゼミで発表する形をとり，全 197 問が解読できました．本書を田村三郎先生に捧げます．

■凡例

- 小寺蔵『算法点竄指南録』片野東四郎蔵版 (明治 8 年) を底本とした．
- 『点竄指南録』の内容を現代の言葉と数式で書き下したもので，逐語訳ではない．その際できるだけ当時の考え方を復元するように努めた．
- なにせ大部なので，第四巻の点竄術解説，算木計算の一部は省略した．
- 第一・二・三巻の影印をつけたので，すべての問題と術文は原文が参照できます．なお全文の影印は下記サイトからダウンロードできます．
  `http://www.wasan.jp/archive/tenzansinanroku/tenzansinanroku.html`
- 序文などの漢文解読については島野達雄氏によるものです．感謝の意を表します．

于時平成戊戌歳葉月吉日　南都住人二代目福田理軒謹識

阪部中嶽先生著
馬場貢湖先生訂
点竄指南録
尾陽　東壁堂蔵

> 點竄指南録序[1)]
>
> 夫理與數合符而不離得其數則理不外焉蓋天地之大也七政之錯行也宿離交食千載之日至坐而可致者數也況人世日用貨賄泉穀之會計而理亦豈外此哉我
>
> 邦倡數學者以關孝和爲冠私淑於其道者阪部廣胖天資頴敏執志精鋭夙入其室探其奥秘聲譽大興所著數觧一十五巻名曰點竄指南録囙川越州請序於予予閲之歎曰凡世之所稱讃大抵莫不過其實廣胖子之於数也其實乃過其名宜哉越州師事而又得其道予蒙越州知遇其請不可辞嗚呼算學之範則不假佗求而盡在此書矣其真數一建而物理自可見語云心相不昧豈妄也乎
>
> 時
>
> 文化十二年乙亥秋七月
>
> 吉田源秀賢選

【訓読】

點竄指南録序

夫理と数は合符して離れず．その数を得れば則理に外ならず．蓋し天地の大たるや七政 (＝日月と五惑星) の錯行 (＝巡行) たるや，宿離 (＝宿り止まる) 交食，千載の日至 (＝冬至と夏至)，坐して致すべき (＝座ったままでできる) は，数なり．況や人世・日用・貨賄(＝宝物．貨は金玉，賄は布帛)・泉穀 (＝銭穀．貨幣と穀物) の會計にして，理，また豈これに外ならんや．我が［平出］邦，数学を倡 (＝唱) えるもの，関孝和をもって冠とす．その道に私淑(＝ひそかに学徳を慕い，手本として見習う) する者，阪部廣胖 (＝坂部広胖) は，天資 (天から与えられた資質)頴敏，執志(＝志を固く守る) 精鋭，その室に夙入(＝つとに入る，早くから入る) し，その奥秘を探り，聲譽(＝ほまれ) 大いに興る．著すところの数解一十五巻，名づけて曰く點竄指南録と．囙 (＝因)川越州[2)]，序を予 (＝私) に請う．予，これを閲し，歎じて曰く，「凡世の称賛するところは大抵 (＝大概) その実 (＝実質) を過ぎざること莫し．広胖子[3)] の数におけるやその実のその名を過ぐ．宜かな．」越州 (＝川井久徳)，(広胖に＝) 師事して又，その道を得る．予，越州の知遇を蒙り，その請を辞すべからず．嗚呼算学の範則 (＝法則)，佗(＝落ち着くさま) を假(＝借) ず求めて尽くこの書に在り．その真数，一建(＝指) して物理，自ら見つべし．語 (＝ことわざ) に云う，心相 (＝心の形相)不昧(＝物欲にくらませられない，明らか) なるは，豈妄ならんや．

時に，

文化十二年乙亥 (1815) 秋七月

吉田源 (みなもとの) 秀賢[4)] 選

【注】

1) 白文

2) 川井久徳 (ひさよし)．幕臣．越前守従五位下．川は川井の略．

3) 子は尊称．

4) 吉田秀賢は，篠原善富の『御製暦象考成上編国字解』を校訂している．

點竄指南序[5]

維嶽鍾神秀爰降我關夫子我　東方之數學以興焉實先哲未發之真理也爾来俊傑接武今也数業可謂集大成矣誠之同盟之士阪部廣胖號中岳性磊落不羈以脱錐之才拳々孶々苟且傾仆不敢惜斯道之嗜三十有餘年于茲自關夫子五傳而遂入又玄之域其生平所志常在於斯曾不冤[6] 聞達於當世有為官禄不折腰之風故有時至無儋石之貯晏如不問家之有亡襟懐洒落不改其樂矣方 (後進之領袖我黨之倚頼也一日齎所著點竄指南一十五巻来示曰此業也以須便于初学請敘於其由誠一閲三歎曰噫是初學之益乎信筭家之典則也吾子發其枕中公之復　國家之鴻寶也誠雖不敏辱在于道統之裔孤深欣愉斯流之波及于方隅窃惟数理之周備密率如斯盛寰宇之際五大州所未嘗聞也嗚乎後進之士篤信之審辨之随此轍以進必有窺玄門夫有如斯名區有如斯人關夫子之謂歟人能弘道々非弘人廣胖子之謂歟誠陋識得無僻黨於所好乎庶幾同好士其徵之誠之於阪部氏也唇歯之友以故述鄙衷弁巻首云

維時文化十一歳在甲戌黄鍾今吉之辰

關流宗統五傳日下誠謹撰

【訓読】

點竄指南序

維(＝発語)嶽鍾神秀(＝神秀は気高く秀でる．山岳の神秀．鍾は集まる)，爰に我が関夫子(＝関孝和のこと)に降り，我が［闕字］東方の数学，もって興る．実に先哲，未発の真理なり．爾来(＝以来) 俊傑，接武(＝武(足跡) を接する) し，今や数業，謂いつべし集大成すと．誠 (＝日下誠) の同盟の士，阪部廣胖，号，中岳は，性 (＝性格)磊落不羈(束縛されない)，脱錐[7] の才をもって拳々(＝努める)孶々(＝励む)，苟且(＝かりそめに)傾仆(傾倒) し，敢えてこの道の嗜を惜しまざること三十有余年，茲に関夫子より五伝して遂に又玄 (＝奥深いところ) の域に入る．その生平 (＝平生 (へいぜい)) 志すところ常にここに在り．曾当世において聞達(＝出世) を冤まず．官禄(＝官の給料) のために腰を折らざるの風あり．故に有時(＝時には)儋石(＝わずかな量) の貯なきに至れども，晏如(＝安らかなさま) として[8] 家の有亡 (＝有無) を問わず，襟懐(＝胸のうち)洒落(さっぱりしている)，その楽しみを改めず．方後進の領袖，我が党の倚頼(＝頼み) なり．一日(＝ある日) 著すところの點竄指南一十五巻を齎し，来示して曰く，「此の業たるや以って須く初学の便とすべし．その由を敘 (＝叙) せんことを請う」と．誠，一閲し三歎して曰く，「噫是初学の益か．算家の典則 (＝典章法則) と信ず．吾子(ここでは坂部広胖を指す) その枕中(＝秘蔵のもの) を発し，これを公にす．また［闕字］国家の鴻宝(＝大きな宝) なり」と．誠，不敏(＝賢くない)辱在(＝汚れた所に居る) と雖も，道統の裔に在り，孤深くこの流の方隅 (＝四方の隅) に波及することを欣愉(＝よろこぶ) す．窃惟に数理の密率を周備(＝あまねく備わる) し，かくの如く寰宇(＝世界) の際(はて)，五大州に盛んなること，未だ嘗て聞かざるところなり．嗚乎後進の士，これを篤信(＝あつく信じる) し，これを審辨(＝明らかに知りわける) し，この轍(わだち) に随て以て進めば，必ず玄門(＝深遠な道) を窺うことあらん．夫斯くの如く名區(＝すぐれた土地) あれば，斯くの如く人あるとは，関夫子の謂か．人，能く道を弘む，道の人を弘むにあらず[9] とは，広胖子の謂か．誠，陋識(＝いやしい見識)，得に好むところに僻党(＝かたより) なし．庶幾 (こいねがわくば) 同好の士，其これを徴 (しるす) せよ．誠の阪部氏におけるや唇歯の友 (＝ごく近い友人) たり．もって故に鄙衷(＝自分の思いを謙遜した語．衷はまごころ) を述べ，巻首に弁 (かんむらん，べんず) と云う．

維時(これとき) 文化十一 (1814)，歳甲戌に在る，黄鍾(＝ 11 月) 今吉之辰[10]

関流宗統五傳日下誠謹撰 (きんせん，つつしんでえらぶ)．

【注】

5) 白文．日下誠の名は，山田治助，大原利明の『算法点竄指南』の北山老人序にも登場する．

6) 明治前Ⅳ 391 頁は「兑 (よろこぶ，あつめる)」と読んでおり，校訂もされていない．

7)『史記』平原君伝に「錐処嚢中 (錐，嚢中におる)」とある．袋の中のきりは必ず先が外に出る，すぐれた人物は必ず才能をあらわすことのたとえ．嚢中の錐．

8)『漢書』揚雄伝に「乏無?石之儲，晏如也」

9)『論語』衛霊公に「人能弘道，非道弘人也」

10)「いま吉 (きち) の辰 (たつ)」と読むか．吉辰 (きっしん) は吉日の意．

算法點竄指南録序

貢湖氏曰，我數學之始祖關自由亭先生，四傳而以至本多北夷齊先生，及安嶋南山先生，粤阪部中嶽氏者，従北南二先生，遂受其傳統，蓋我

本邦數学，至于精密者，自關先生一源妙術之杼柚始矣，今諸家學者各效之，改名換趣，雖競巧於四方，此皆改頭換面之法，未能得其微旨，故有志于數學者，不計盡秒忽亦不少矣，於是中嶽氏點竄彼紕謬，凡自農民貢税商賈賣買貸借之類，以至於諸約翦管及方圓孤背等，盡設諸筭題，著其法術之起源，名曰算法點竄指南録，其書之導人也，猶幅路之有指南車，而不迷，然北轅適越，則不啻失帰路其害及夫軀，算法亦複然矣，妄從法術則不能無千里之差，學者豈所不審乎，夫數者雖有六藝之末，上自

官府下及閭巷，不可以一日廃者也，實海内日用之有功，亦豈不偉哉，此書既成也，我以同門之好，俾之校訂，顧智者千慮有一失愚者千慮有一得，故予亦少加意論已定，遂鋟諸梨棗，悉皆含關先生之源意，奇法玅術，無出其右者也，冀覧者尹意，而熟讀学焉，則自卑至高之妙，棄此書其何以哉．曲綴贅言弁斯編，

文化十一年甲戌十月上澣

貢湖　馬場正督薫郷撰

【訓読】

算法點竄指南録序 11)

貢湖氏曰 12)，我が数学の始祖は関自由亭 (＝関孝和．自由亭は関の号) 先生，四伝して以て本多北夷齊 (＝本多利明) 先生及び安嶋南山 (＝安島直円) 先生に至る．粤に阪部中嶽 (＝坂部広胖．中嶽 (岳) は号) 氏という者，北南二先生に従い，遂にその伝統を受く．蓋し，我が〔平出〕本邦の數学，精密に至るは，関先生の一源 (＝ひとつの源) 妙術の杼柚(＝文章を組み立てること) より始まる．今，諸家学者，各これに效い，改名換趣 (名を改め，趣 (おもむき) を換え)，巧を四方に競うと雖も，これ皆，改頭換面 (＝表面だけを改めて実の変わらない) の法，未だ能くその微旨(＝微妙な意味) を得ず．故に数学に志あるもの，不計秒忽 (＝極めて微小) を尽くすこと少なからず．ここに於いて中嶽 (＝坂部広胖) 氏，彼の紕謬(＝あやまり，錯誤) を點竄 13) (＝文章を改め変える) し，凡そ農民・貢税・商賈(＝商人)・賣買・貸借の類より，以て諸約・翦管及び方圓・孤背等に至るまで，盡く諸算題を設け，その法術の起源を著し，名づけて曰く，算法點竄指南録と．その書の人を導くや，猶幅路 (＝幅広い道) の指南車ありて迷わざるがごとし．然ども北轅(＝轅 (くるまのながえ) を北に向ける．北行)適越(＝南の越に向かう．適は行) すれば則啻に帰路を失うのみならず，その害は夫の軀に及ぶ．算法また複然り．妄に法術に従えば則千里の差なきこと能わず．学者，豈審にせざるところか．夫数は六芸(＝礼楽射御書数) の末にありと雖も，上［平出］官府より下閭巷(＝村里，民間) に及ぶまで，一日として廃すべからざるものなり．実に海内(＝世界) 日用の有功 (＝有効)，亦豈偉とせずや．此の書，既に成り，我れ同門の好を以て，之を校訂せ俾む．顧うに智者の千慮に一失あり，愚者の千慮に一得あり．故に予，また少しく加意(＝注意する)，論已定(＝すでにさだまる) し，遂に諸梨棗 (＝梨やなつめ等の版木) に鋟む．悉皆(ことごとくみな) 関先生の源意を含み，奇法玅 (＝妙) 術，その右に出るものなし．冀覧者，意を尹して熟読，焉を学べば則，卑より高の妙に至るまで，此の書を棄てて其何を以ってせん 14)．曲て

贅言(＝無駄な言葉) を綴り，この編に 弁．
文化十一年 (1814) 甲戌十月上 澣(＝上旬)
貢湖　馬場正督薫郷撰

【注】

11) 白抜きの批点だけがある白文．

12) 貢湖は，この序文を書いている馬場正督の号．ここでの「曰」は「ものもうす」と読むのかもしれない．

13) 點竄の語は，『魏志』武帝紀，『冊府元亀』に見える．文章などの字句を改変すること．

14)『論語』為政に「其何以行之哉 (それ何をもってこれをやらん)」

點竄指南録自序[15]

算 乃 人之根本　知書不知算法如臨暗室爲之 (＝書を知り算法を知らざるは暗室に臨んでこれをなすが如し) との先賢の格言　人として誰か是を學すして可ならんや　　予(＝自己の謙称) 此学に志す事　今に三十年　其 初 筭學智恵の海と云小冊を市に得て是を 翫 ひてより以来　和漢算法・古今算法・天元録等の書を熟読して粗天元の大意を得るといへとも　未 心に 快 からす　別に一理貫通の法あらんと常に是を思ふ事　年あり　ある時關夫子 (＝関孝和) の門流北夷先生 (＝本多利明) に遇ふて是を尋るに點竄法なるもの克其理を 明 にすと聞て　手のむ足の踏事をしらす[16]直に従侍してこれを學ふ　先生の弟子を教る濶達大量にして　束脩以上[17] あへて拒ます　秘術奥旨といへとも隠す事なく其両端を叩て[18] つくす　故に期ならすして其壷奥(＝奥深いところ) を得るに似たり (＝得ることができたようだ)　亦其道統南山 (＝安島直円) 先生篤実の君子にして能関夫子の道を守り其術精密詳審　 最 古今未發の妙術を得る事多し　予是に従遊して其足らさるを補ふ　 苟 も此両先生に遇ふもあらすんは (あらずんば) いつくんそ (いずくんぞ) 此道を得る事あらんや　夫近世算法の書　日月に競出　奇題妙術挙て筭ふへからす　 各 其奇巧を尽す　然りといへとも　皆其術の渕原 (＝淵源) を秘してあらはさす　其師を求て學ぶにあらされは容易に術原を極る事あたわす　都會の人は師を求るに易しといへとも　邉鄙 (＝辺境，田舎) の徒　 或 公務定省(＝朝夕，親に孝養をつくすこと) 暇日なく　なを求て面のあたり其傳を受る事　能はさる者あらん　予爰に於て關夫子の遺訓にもとつひて其題を得てこまかく術をほとこし　術原を求るの法を 詳 かにす　所謂點竄是なり　帰除・開方の浅技より天元・演段・諸約・翦管・招差・角術・圓理等の深術にいたるまで此點竄に因さる事なし　実に関夫子［平出］吾朝開闢の妙技　算家の良法なり　此に於て貿買・貰貸・耕歛[19] の類より超て方圓・無極の題に至るまで南北両先生新考の妙旨且予か憶見發明の新法を加へ集て十五巻とす　號して點竄指南録といふ　初學の士　此書に因て道に至るの一助とならん事をこひねかふ而已
文化七年 (1810) 庚午冬　関流五傳算學　坂部廣胖自序
中嶽　俗称　坂部勇左衛門

【注】

15) 漢字かなまじり文

16) 金品を持参して依頼することをせず，の意か．

17)『論語』述而．自行束脩以上，吾未嘗無誨焉．束脩は入門時に納める金銭．

18)『論語』子罕．有鄙夫，問於我，空空如也，我叩其両端而竭焉．物事の両極端をきわめつくし余すところのないこと．「両端を叩く」の用例は，伊藤仁斎の『童子問』，夏目漱石の『吾輩は猫である』に見える．

19) 歛 (カン) は，のぞむ，あたえる，戯れに物を乞う，などの意味．おそらく斂 (レン，おさめる，おさまる) の誤用．

凡例

一 點竄の法は元祖関先生發明する所にして初め皈源整法といふ　後松永良弼に至り其主君岩城侯の命を受て名を點竄と改む　但傍書の筆算を用ひ乗除加減は勿論都て矩合的當の解義を明かにする良法にして実に数学の要用なり

一 此書初編には問題を設け　其答数及び本術を記し　二編に至ては初に點竄の定則を載夫より以下并に三編四編ともに都て初編に著す　算題の答術を點竄法の傍書筆算を以ことごとく起原を述る　但本題と起原と打混じては事繁く　且丁数多くして　却て見るもの煩しきゆへ題術と起原とは別巻にしるす

一 往々算書印行ありて世に流布するといへども術の起原をしるさず　たまたま是をしるすものは己が奇巧を人にしらさん事を先とするゆへ実に初学の人ちからを尽して見るといへども一を聞て一を知るにたらざる事多し　故に今著所は解義をなすに迂遠をいとはず　本術も算當りの仕安を要とし　文のいやしきを顧ず　しるすに國字を用ひ　又草書の傍に平仮名あるひは片仮名を交へしるす　犬を擲く童，簀(＝網代簀（あじろす））を荷ふ男といふとも数学に志ある者　讀易く一を聞て十百にも通ぜん事を思ふ故なり　迂遠と捷径とのごときは　點竄を會得して後　其人の器量にしたがつて是を撰み用ゆべし

一 此書前にいふ如く本術の解義を教導せん事を主とす　故に古書に出る所の題術を其侭本題にもちゆるあり　見る人あやしむ事なかれ

一 題を設る事二百に足らず　是を以題の品数術の変化尽る事あらんや　故に解義にいたつて其題のみにて會得しがたきは　或は別数をもふけて変化をしるし　或は類を以　別に問を設け委細にこれをしるす　見る人よくよく味ふべし

点竄指南録巻之一

武江　阪部勇左衛門廣胖　著

馬場金之丞正督　訂

$\boxed{1}$ 金一両に付一石二斗替の米三十六石あり，此代金何ほどと問．

答曰代金三十両

術曰米三十六石を置，相場一石二斗にて割三〇ヶとなる．代金とす．

第一術解

比例を見て 一両 $\times$ 有米 $=$ 一石二斗 $\times$ 代金 此者といふより也といふまでは上にある算木の訳也．有米三十六石と金一両と懸合せは米相場一石二斗と代金と懸合せたるとおなじ物となると云義なり．いづれも者といふより也といふ迄の訳皆同じ．以下是にならへ．

$$代金 = \frac{一両 \times 有米}{一石二斗}$$

本術有米に一両をかけべき理なれども一両は一の位にて一あるゆへ懸たるも懸ざること同じ事ゆへ一両を省きて懸ぬなり．若又同じ一の位にても二両三両ともいふときは必かけべし．一両にかぎらず一石一俵一文一匁一箇など皆一の位にて一あるものかくるに及ばす．以下是にならへ．

〇又云おなじ一にても位違ひて一分か一厘か一毛か又は十か百か千ともいふときは位違ふゆへ必かけべし．割ものも是にならへ．

〇此比例を唐人は異乗同除といふ．和俗は相場割といひ亦矩割ともいふ

〇比例式か図解か一方あれば術意は明かなりといへども学者会得しかねることもあるべきかと煩しきをいとわず両法をしるす．

是故本術有米三十六石を置，相場一石二斗にて割三〇ヶとなる．代金とす．

$\boxed{2}$ 銀二匁にて米三升六合買ときは米二斗七升の代銀は何ほどと問．

答曰代銀十五匁

術曰 $\dfrac{2 \times 27}{3.6} = 15$

$\boxed{3}$ 米一石に付銀六十二匁にては米三斗四升の代銀何ほどと問．

答曰銀二十一匁〇八厘

術曰 $0.34 \times 62 = 21.08$

$\boxed{4}$ 茶五斤の代銀二十目にては茶二十四斤の代銀何ほどと問．

答曰銀九十六匁

術曰 $\dfrac{24 \times 20}{5} = 96$

$\boxed{5}$ 米九石六斗の代金十二両にては金五両には米何ほどと問．

答曰米四石

術曰 $\dfrac{9.6 \times 5}{12} = 4$

$\boxed{6}$ 銭一貫文の代銀八匁にては銀一匁に銭何ほどと問．

答曰銭百二十四文

術曰 $\dfrac{1000 \times 0.96}{8} = \underline{120\text{ 文}}$(調銭) $= \overline{124\text{ 文}}$(省銭)　　調銭$\underline{100\text{ 文}}$ = 省銭$\overline{104\text{ 文}}$

術解

○銭はかならず百文に付四文づつの割合にて目を引調銭にして後乗除せざればならぬ也．目のさし引を忘るべからす．たとへは百文を調銭にするには百文を置九分六厘を掛調銭九十六文となる．

○若百文より以下の端銭ある時は其端銭は其まま置て百文より上へとり九分六厘をかくるべし．

○又云乗除して出たる銭はかならず調銭にて出るゆへ何程ありても百文の位まて定法九分六厘にて割べし．さすれば通用の銭となる也．

$\boxed{7}$ 金一両に四十八俵替の炭は金二十五両には何俵と問．

答曰炭千二百俵

術曰 $48 \times 25 = 1200$

$\boxed{8}$ 銀八十五貫五百目あり．金一両に付六十目替にして此代金何ほどと問．

答曰金千四百二十五両

術曰 $\dfrac{85500}{60} = 1425$

$\boxed{9}$ 銭百九十二貫六百二十四文あり．金一両に付銭六貫七百文替にしては此金何ほどと問．

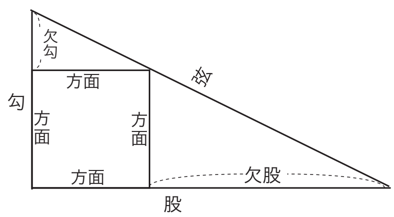
答曰金二十八両三分

術曰 $24 \div 0.96 = 25$　　192 貫 624 文 = 192 貫 625 文　　$192.625 \div 6.7 = 28.75$ 両 = 28 両 3 分

(1 両=4 分)　$\underline{\qquad\qquad}$ は調銭, $\overline{\qquad\qquad}$ は省銭

すべて調銭で計算すると，$\overline{192624\text{ 文}} = \underline{184920\text{ 文}}$　　$\overline{6700\text{ 文}} = \underline{6432\text{ 文}}$　　$184920 \div 6432 = 28.75$

$\boxed{10}$ 勾股の内に図のことく方をいるゝあり．只云(ただいふ)方面十二寸，欠勾(かけつり)九寸．欠股(かけはたばり)何ほどと問．

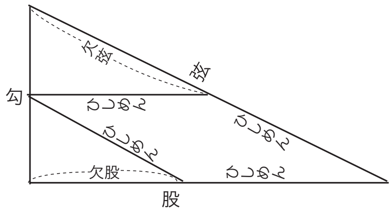


答曰欠股十六寸

術曰 $\dfrac{12 \times 12}{9} = 19$

術解 欠勾 : 面 = 面 : 欠股

$\boxed{11}$ 勾股の内に図のことく菱を容るあり．只云(ただいふ)菱面二十寸欠股(はたばり)十六寸．欠弦何ほどと問．

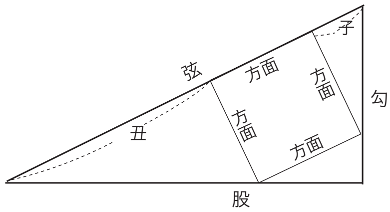


答曰欠弦二十五寸

術曰 $\dfrac{20 \times 20}{16} = 25$

術解 欠股 : 菱面 = 菱面 : 欠弦

$\boxed{12}$ 勾股の内に図のごとく脊方(せきほう)を容る有．只云方面十二寸，丑十六寸．子何ほどと問．

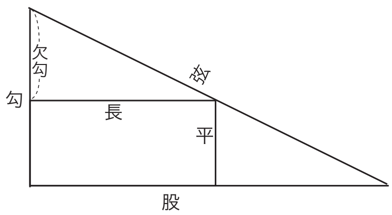


答曰子九寸

術曰 $\dfrac{12 \times 12}{16} = 9$

術解 丑 : 面 = 面 : 子

$\boxed{13}$ 勾股の内に図のごとく直(ちょく)を容るあり．只云勾九寸，股十二寸，平三寸．長何ほどと問．



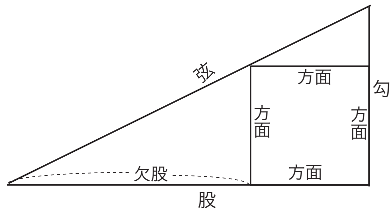
答曰長八寸

術曰 $\dfrac{(9-3) \times 12}{9} = 8$

術解 勾 : 股 = 欠勾 : 長

$\boxed{14}$ 勾股の内に図のごとく方をいるゝあり．只いふ勾二十一寸，股二十八寸．方面何ほどと問．

答曰方面十二寸

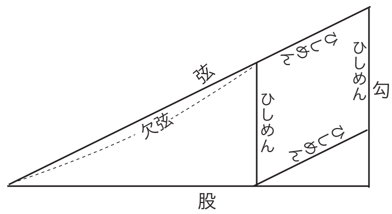


術曰 $\dfrac{21 \times 28}{21+28} = 12$

術解 (勾 + 股) : 勾 = (面 + 欠股) : 面

$\boxed{15}$ 勾股の内に図のごとく菱を容るあり．只いふ勾二十四寸，弦四十寸．菱面何ほどと問．

答曰菱面十五寸

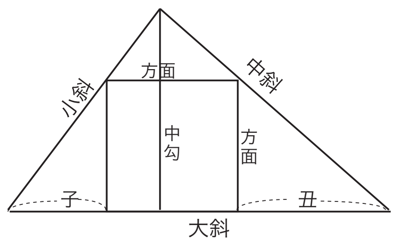


術曰 $\dfrac{24 \times 40}{24+40} = 15$

術解 (勾 + 弦) : 勾 = (面 + 欠弦) : 面

$\boxed{16}$ 三斜の内に図のごとく方を容るあり．只いふ大斜六寸，方面二寸．中勾何ほどと問．

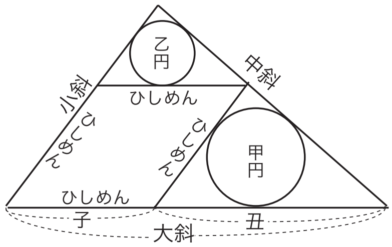
答曰中勾三寸



術曰 $\dfrac{6 \times 2}{6-2} = 3$

術解 (子 + 丑) : 面 = 大 : 中勾

$\boxed{17}$ 三斜の内に図の如く菱と甲乙の円を容る有．只云大斜九寸，甲円径二寸．乙円径一寸．菱面何ほどと問．

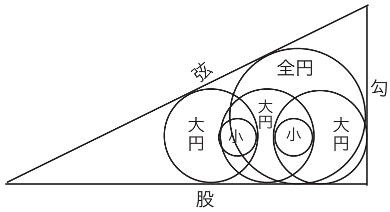


答曰菱面三寸

術曰 $\dfrac{9\times 1}{2+1}=3$

術解 $(甲+乙):(子+丑)=乙:面$

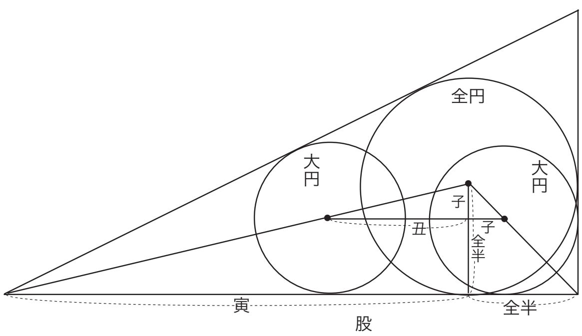
$\boxed{18}$ 勾股の内に図のごとく大円三ヶ，小円二ヶ，全円一ヶを容るあり．只云大円径三寸，小円径一寸．全円径五寸．股何程と問．



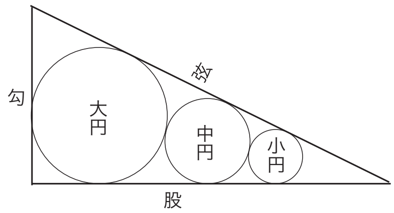
答曰股一十寸

術曰 $\dfrac{(大-小)\times 2\times 全}{全-大}=\dfrac{(3-1)\times 2\times 5}{5-3}=10$

術解 $2子:(子+丑)=全:\left(\dfrac{全}{2}+寅\right)$



$\boxed{19}$ 勾股の内に図の如く大中小の三円を容る有．只云大円径九寸，中円径六寸．小円径いかほどゝ問．

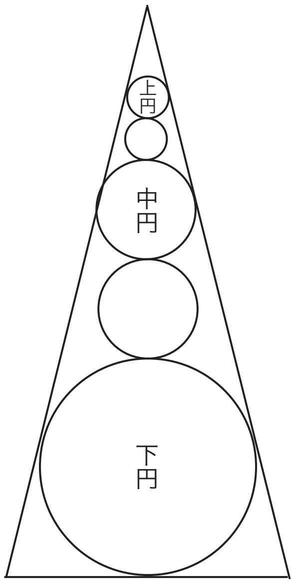


答曰小円径四寸

術曰 $\dfrac{中^2}{大} = \dfrac{6^2}{9} = 4$

術解 大 : 中 = 中 : 小

$\boxed{20}$ 圭の内に図の如く円を容るあり．只いふ上円径一寸，中円径二寸．下円径何程と問．

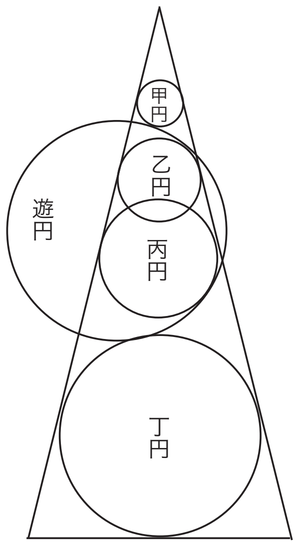


答曰下円径四寸

術曰 $\dfrac{中^2}{上} = \dfrac{2^2}{1} = 4$

術解 上 : 中 = 中 : 下

$\boxed{21}$ 圭の内外に図の如く円を容るあり．(甲乙丙の三円周は圭の二所と遊円周一所につく．丁円周は圭三所と遊円周一所とにつく) 只云甲円径一寸，乙円径二寸，丙円径三寸．丁円径何ほどゝ問．(大原の定理)

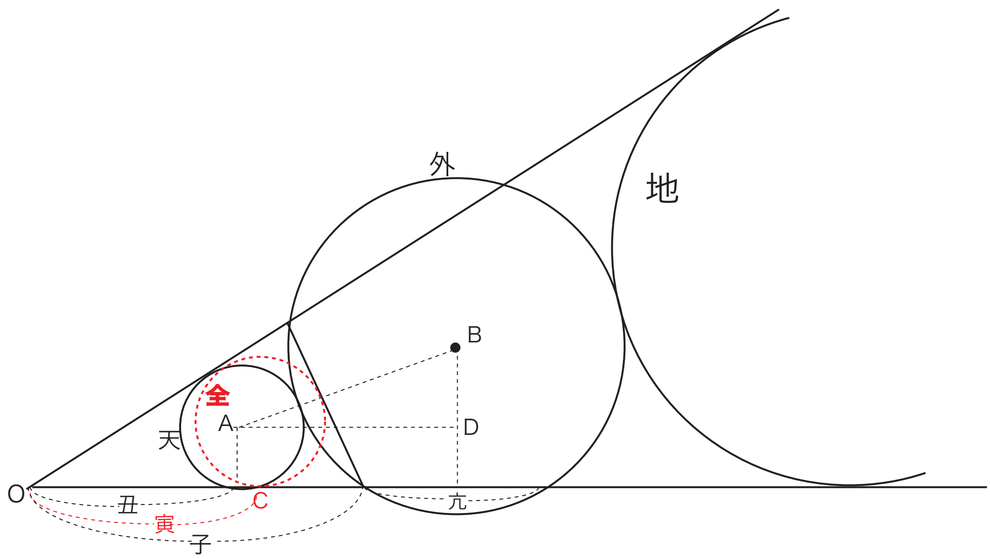


答曰丁円径六寸

術曰 $\dfrac{乙 \times 丙}{甲} = \dfrac{2 \times 3}{1} = 6$

術解 甲 : 乙 = 丙 : 丁

『点竄指南録』には詳解が書かれていないので，会田安明の『算法天生法』による術を示しておく．



$OC = 寅$

$$BD = \sqrt{\left(\frac{外}{2}\right)^2 - \left(\frac{亢}{2}\right)^2} - \frac{天}{2}$$

$$AB = \frac{天}{2} + \frac{外}{2}, \quad AD = 子 + \frac{亢}{2} - 丑$$

$\text{丑} : \text{寅} = \text{天} : \text{全}$ より $\text{丑} = \dfrac{\text{寅}}{\text{全}}\text{天}$
$BD^2 + AD^2 = AB^2$ より

$$\left\{\sqrt{\left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{亢}}{2}\right)^2} - \frac{\text{天}}{2}\right\}^2 + \left(\text{子} + \frac{\text{亢}}{2} - \text{丑}\right)^2 = \left(\frac{\text{外}}{2} + \frac{\text{天}}{2}\right)^2$$

$$\text{天}\sqrt{\left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{亢}}{2}\right)^2} + \text{子}^2 + \text{丑}^2 + \text{子亢} - \text{亢丑} - 2\,\text{丑子} = \frac{\text{天外}}{2}$$

これを天の二次方程式と見ると 2 解は天と地

$$\text{定数項} = \text{子}^2 + \text{子亢}$$

$$\text{天}^2\text{の係数} = \frac{\text{寅}^2}{\text{全}^2}$$

よって，$\text{天地} = \dfrac{\text{全}^2}{\text{寅}^2}(\text{子}^2 + \text{子亢}) \cdots$ ①

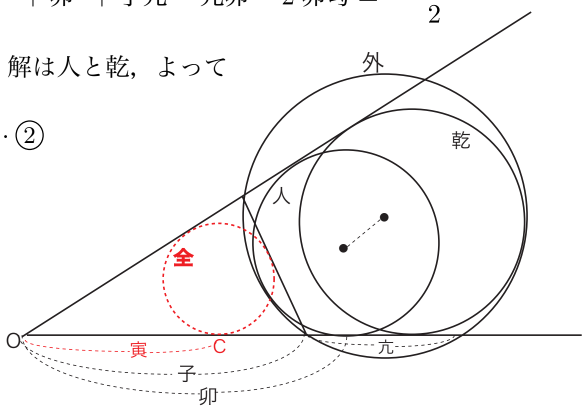
人，乾円についても同様にして

$$\text{人}\sqrt{\left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{亢}}{2}\right)^2} + \text{子}^2 + \text{卯}^2 + \text{子亢} - \text{亢卯} - 2\,\text{卯勾} = -\frac{\text{人外}}{2}$$

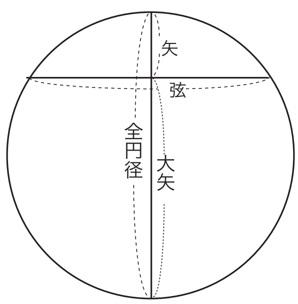
これを人の二次方程式と見ると．2 解は人と乾，よって

$$\text{人乾} = \frac{\text{全}^2}{\text{寅}^2}(\text{子}^2 + \text{子亢}) \cdots ②$$

①②より $\text{天地} = \text{人乾}$



$\boxed{22}$ 円あり．図のごとく．只云弦四寸，矢(や)一寸．全円径何ほどゝ問．



答曰全円径五寸

術曰 $\dfrac{\left(\dfrac{弦}{2}\right)^2}{矢}+矢=6$

術解 $矢:\dfrac{弦}{2}=\dfrac{弦}{2}:大矢$

$\boxed{23}$ 東西の両蔵へ米を納るあり．只云東蔵へは十五俵，西蔵へは十八俵，農家一軒ごとに此如くづつ両蔵へ納るといふ．今其納米をみるに東蔵より西蔵は多き事一万五百俵なり．農家の軒数何ほどゝ問．
答曰農家三千五百軒

術曰 $\dfrac{10500}{18-15}=3500$

$\boxed{24}$ 東西の蔵に等米を貯ふるあり．東蔵よりは日々に米百二十五俵を出す．西蔵よりは二日に米二百四十五俵をいだす．今両蔵をみるに東蔵に残る米五百俵，西蔵にのこる米五百二十俵あり．出す日数何ほどゝ問．
答曰いだす日数八日
術曰 $245\div2=122.5$，$125-122.5=2.5$，$\dfrac{520-500}{2.5}=8$

$\boxed{25}$ 金一両に八斗替の米を買置，七斗五升づつに売て米八斗の益ありといふ．此元金何ほどゝ問．
答曰元金十六両

術曰 $\dfrac{8}{8-7.5}=16$

$\boxed{26}$ 大坂にて一石に付銀五十六匁づつの米を買置，江戸へ廻し，金一両に付八斗づつに売て金八百五十八両の益ありと云．買置米高何ほどゝ問．但銀相場五十八匁．(銀相場 a 匁とは金一両の銀への為替レート)
答曰買置米三千〇十六石

術曰 $58\div0.8=72.5$，$72.5-56=16.5$，$\dfrac{858}{16.5}\times58=3016$

$\boxed{27}$ 金銀銭の三品あり．只云金十二両と銀二十四匁の銭六十二貫文なり．又云銭二貫八百文と銀二十六匁四分の代金一両なり銀相場何ほどゝ問．
答曰銀相場六十目

術曰 $\dfrac{2800\times24+62000\times26.4}{62000-2800\times12}=60$

術解 $x=$ 銀相場，$y=$ 銭一文の銀 として

$$\begin{cases} y=\dfrac{12x+24}{62000} \\ y=\dfrac{x-26.4}{2800} \end{cases}$$

を解く．
原文では次のように述べている．
一算を立銀相場とす．(「天元之一を立てる」ではなく．「一算を立てる」という．) いづれの題にても一算を引て此のごとく直に問所の物を傍書してこの術の終りまで是を用ひて左に寄と相消との両数を求るに，あるひは割或は掛あるひは平方にひらきなど其時員によつてこれをなす．

此左に寄と相消と云義は左に寄る数也とも相消数なり共一方を元正なるは負とし，元負なるは正にして左に寄と相消の二数をひとつにする事を相消といふなり．後みな相消のわけ是にならへ.

いづれの空数にても割たるものありて，あしき時は其割たる物をあまねく空数に懸，左右傍書おなじものを省きとれば此ごとく割たる物なくなる也．後これをりやくす．除象を乗ずるの義，これにならへ.

実 | 又只 銀銭 | 只又 銀銭

方 | 只 銭 | 只又 金銭

空数の内銀相場のなき算木を実級に置，銀相場の懸りて有算木は其銀相場を省きて残る算木を法級に置也．但銀相場に限らず何にても始一算を立て仮に名付たる物夫を省て法級に置也．後皆是にならへ.

数を以傍書にかへ

実 | 一七〇四〇〇〇ヶ

方 | 二八四〇〇ヶ

$\boxed{28}$ 大豆七十俵と小豆五十五俵とあり．石数併て五十石也．只云大豆一俵より小豆一俵は五升少し．大豆一俵の入何程と問.

答曰大豆一俵四斗二升二合入

術曰 $\dfrac{0.5 \times 55 + 500}{70 + 55} = 4.22$

術解 $x =$ 大豆一俵の入，$y =$ 小豆の石数 として

$$\begin{cases} y = 500 - 70x \\ y = 55x - 0.5 \times 55 \end{cases}$$

を解く.

$\boxed{29}$ 米あり．只云四斗入四百俵の代金二百両也．又云三斗五升入二百四十五俵の代金百〇七両と銀十一匁四分三厘七毛五糸也．銀相場何程ト問.

答曰銀相場六十一匁

術曰 $400 \times 4 = 1600$，$\dfrac{245}{1600} \times 200 \times 3.5 = 107.1875$，$\dfrac{11.4375}{107.1875 - 107} = 61$

$\boxed{30}$ 西国にて銀二十四メ目にて米四百八十石を買，東国へ廻して益米百石ありと云．金一両に米何斗替と問.

但銀両替六十目

答曰東国相場金一両に付九斗五升

術曰 $480 - 100 = 380$，$380 \times 60 \div 24000 = 0.95$

$\boxed{31}$ 銀あり．其高をしらず．只云金にしてみれバ二百十二両と銀七匁有．又云銭にしてみれバ一千四百三十貫文有．別云金一両の銀より銭一貫文の銀は五十一匁一分少し．銀相場及有銀高何程と問．
答曰銀相場六十目　有銀高十二貫七百二十七匁

術曰 $1430 - 212 = 1218$, $(1430 \times 51.1 + 7) \div 1218 = 60$, $60 \times 212 + 7 = 12727$

術解 銀相場 $= x$, 有銀高 $= y$ として

$$\begin{cases} y = 1430(x - 51.1) \\ y = 212x + 7 \end{cases}$$

を解く．

$\boxed{32}$ 爰に鶴亀合百頭あり．只云足数和して二百七十二．鶴亀各何ほどと問．
答曰鶴六十四　亀三十六

術曰 $100 \times 4 - 272 = 128$, $128 \div (4 - 2) = 64$

術解 鶴数 $= x$ として

$$2x + 4 \times 100 - 4 \times x = 272$$

を解く．
これまでは「孫子算経」の兎雉算を踏襲していたが，本書により鶴と亀に変わる．
東北地方に伝わる鶴亀算を解く歌『鶴問わば，頭の数に四を掛けて，足数引いて二で割るなり．』

『九章算術』は鶴と亀ではないが，盈不足算には次のような算題がある．

> 上酒は 1 斗で 50 銭，下酒は 1 斗で 10 銭である．上，下酒合わせて 2 斗を買うと 30 銭であった．それぞれ何斗づ買ったか．
> 答　上酒 0.25 斗　下酒 1.75 斗

上酒，下酒がそれぞれ鶴，亀に対応し，銭を足数と思えばよい．上酒 0.5 斗，下酒 1.5 斗とすると 10 銭多くなり，上酒 0.2 斗，下酒 1.8 斗とすると 2 銭不足するので，

$$上酒 = \frac{0.5 \times 2 + 0.2 \times 10}{10 + 2} = 0.25 斗$$

と求めている．
$f(x)$ を一次関数とし，一次方程式 $f(x) = K$ を解くのであるが．x の値を二個想定し，$x = a$ とした場合 $f(a) - K = r$, $x = b$ とした場合 $K - f(b) = s$ とすると，$f(x) = K$ の解は

$$x = \frac{as + br}{r + s}$$

で得られる．これが過不足算の術である．

鶴亀算の例では．鶴の数を x とすると，亀の数は $100 - x$ で足数は $2x + 4(100 - x)$ と書ける．$f(x) = 2x + 4(100 - x)$ とするとき，$f(x) = 272$ をみたす x の値を求めたいのであるが．$x = 0$ のとき $r = 128$(不

足)，$x=100$ のとき $s=72$(余り) となり, 過不足算の術で

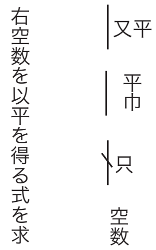
$$鶴 = \frac{0\times 72 + 128\times 100}{128+72} = 64$$

となる.

$\boxed{33}$ 直あり図の如し．只云積二十一歩．又云長平差四寸．平何程と問.
答曰平三寸

術曰 $4\div 2=2,\ 2^2+21=25,\ \sqrt{25}-2=3$

術解



平のなき者を実級におき平の懸りたる者を平を省て法級に置．平巾の懸りたる者平巾を省て廉級におく．後皆これにならへ.

$$平 = \frac{\sqrt{\left(\frac{方}{2}\right)^2 + 実\cdot 廉} - \frac{方}{2}}{廉}$$

$\boxed{34}$ 勾股あり図の如し．只云積六歩．又云勾股和七寸．勾何程と問.
答曰勾三寸

術曰 $7\div 2=3.5,\ 7.5^2-2\times 6=0.25,\ 3.5-\sqrt{0.25}=3$

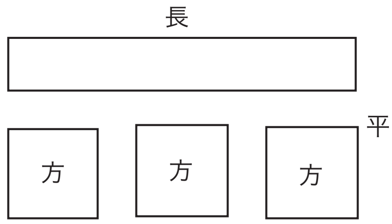
$\boxed{35}$ 勾股あり．只云積六歩．又云弦中勾差二寸六分．中勾何程と問.
答曰中勾二寸四分

術曰 $2.6\div 2=1.3,\ 1.3^2+2\times 6=13.69,\ \sqrt{13.69}-1.3=2.4$

$\boxed{36}$ 直あり図の如し．只云積十二歩．又云長五段と平三段の差十一寸．長何ほどと問.
答曰長四寸

術曰 $12 \times 0.6 = 7.2,\ 11 \times 0.1 = 1.1,\ 1.1^2 + 7.2 = 8.41,\ \sqrt{8.41} + 1.1 = 4$

$\boxed{37}$ 直あり．図の如く縦横に幅等く道を開き残積を四等分に是を分る．只云長一十寸．又云平四寸四分．方面いかほどと問.



答曰方面三寸 又二寸　(答を 2 つ出すのはめずらしい)

術解 方面 $= x$ として

$$2\text{平長} - \text{長}^2 + \text{長}\,x - 2x^2 = 0$$

$$-12 + 10x - 2x^2 = 0$$

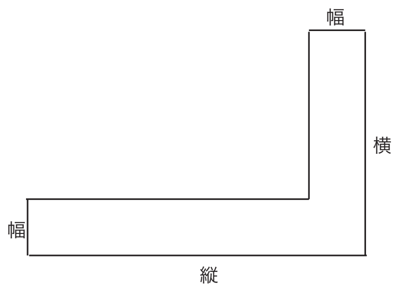
$$\text{天} = 10 \div 2 = 5$$

$$\text{地} = \sqrt{\text{天}^2 - 4 \times 10(\text{天} - 4.4)} = 1$$

$$x = \frac{\text{地} + \text{天}}{2} = 3$$

もう一つの解は $3 - \text{地} = 2$

$\boxed{38}$ 二直相併あり．図の如し．只云積二十歩．又云縦横の差二寸．別云幅横和七寸．縦何ほどと問.



答曰縦七寸

術解 縦 $= x$ として

$$-119 + 38x - 3x^2 = 0$$

$x = 7,\ \dfrac{17}{3}$　$\left(\dfrac{17}{3}\text{は答として採用していない}\right)$

【番外　平方式を帰除式にする定法】

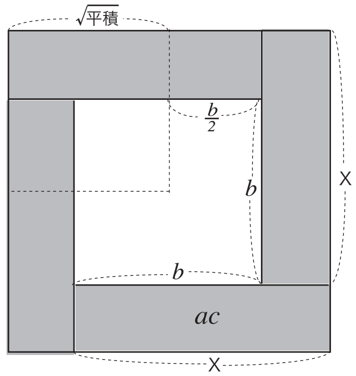
凡平方式の商を顆盤上にするの法．其平方式の正負に仍て加減同じからず．故にくわしく左に是をしるす．

○上連 $c+bx-ax^2=0$

$$平積 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac$$

$$\frac{b}{2}+\sqrt{平積}-ax=0 \qquad (加々式)$$

$$-c+\left(\sqrt{平積}-\frac{b}{2}\right)x=0 \qquad (変格)$$

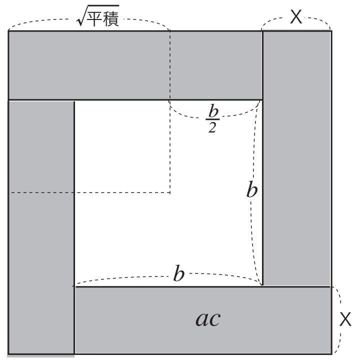


○下連 $-c+bx+ax^2=0$

$$平積 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac$$

$$-\frac{b}{2}+\sqrt{平積}-ax=0 \qquad (加減式)$$

$$-c+\left(\frac{b}{2}+\sqrt{平積}\right)x=0 \qquad (変格)$$



○中断 $c - bx + ax^2 = 0$

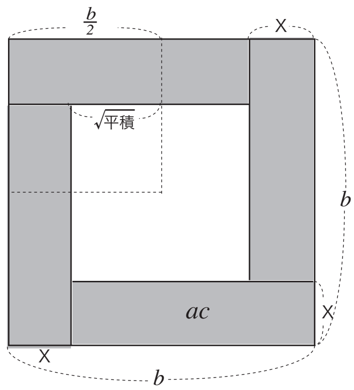
$$平積 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{平積} - ax = 0 \qquad (少商を得る定式) \qquad (減々式)$$

$$\frac{b}{2} + \sqrt{平積} - ax = 0 \qquad (多商を得る定式) \qquad (減加式)$$

$$-c + \left(\frac{b}{2} + \sqrt{平積}\right)x = 0 \qquad (変格)$$

$$-c + \left(\frac{b}{2} - \sqrt{平積}\right)x = 0 \qquad (変格)$$



平方式は三式にて四商あり．帰除式とするの法かくの如し．若この法の如く加減なりがたく却て減する時は虚題としるべし．是より以下帰除式を作るの觧是を略す．但括觧其業繁くして容易にさとしがたき者は其所にこれを詳にす．点竄法に仍て開方式を得るといへども立方式以上逐々乗数多になりては開除して其商を得る事容易ならず．然りとて其ままにして置時は其式に道あるもとりがたし．仍て得る所の商数豫(あらかじめ)しれたる式は左の通りにして是を試すべし．仮に三乗法式を用ひて術理を示す．

正商三ヶを得る式

・此級へ商三ヶを掛て隅級にくわへ同名なるがゆへに

・隅級負六となるに商をかけ負一八ヶとなるを廉級にくわへ異名なるがゆへに相減して余り

・正廉八ヶとなるに商を掛正二四ヶとなるを方級に加へ異名なるが故に相減して余り

・正方七ヶと成に商をかけ正二一ヶとなるを実級に加へ異名なるがゆへに相減して

・実空となる若実空を得さる時は其式あやまり有としるべし．

若商数しれざるか又は其商不尽ある式は此法施しがたし
其時は開式新法の術に仍て其商数をもとむべし．

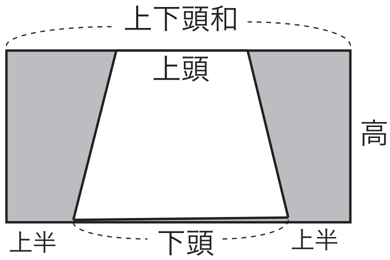
「開式新法」(1805 年) は川井久徳著・坂部廣胖閲で，方程式の逐次近似法を述べたもの．

$\boxed{39}$ 梯あり．図の如し．只云積三十九歩．又云高の内上頭を減じ余二寸．別云高と下頭と和して十五寸．高何

ほどと問.

答曰高六寸

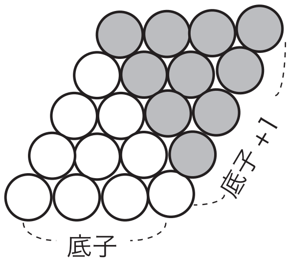
術曰 $15-2=13,\ (39\div 13)\times 2=6$



$\boxed{40}$ 三角並あり．図の如し．仮に底子七ヶを画．只云底子七十五個．積何ほどと問.

答曰積二千八百五十個

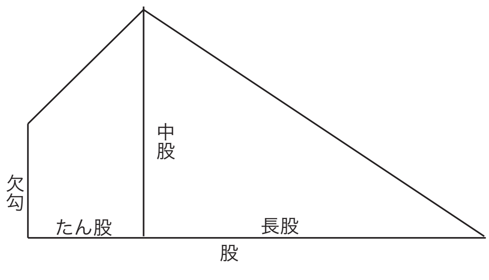
術曰 $(75+1)\times 75\div 2=2850$



$\boxed{41}$ 勾股闕あり．図の如し．只云積一十寸，欠勾一寸，短股二寸，中股三寸．股何ほどゝ問.

答曰股六寸

術曰 $10\times 2-1\times 2=18,\ 18\div 3=6$



$\boxed{42}$ 円あり．図の如し．只云円周と円積と和して三十三寸七分五厘．円径幾何と問．但円責法七分五厘を用ゆ.

答曰円径五寸

術曰 $33.75\div 0.75=45,\ 45+4=49,\ \sqrt{49}-2=5$

$\boxed{43}$ 銀一貫百八十三匁を人数十三人に配分するに，次第の差二匁衰(おとり)にして一の取銀何ほどゝ問.

答曰一の取銀百〇三匁

術曰 $1183 \div 13 = 91,\ \dfrac{(13-1) \times 2}{2} + 91 = 103$

$\boxed{44}$ 金六百九十三両を次第同差に九人にて分る．只云一番の取金より九番の取金は百四十四両少し．一番の取金何ほどゝ問.

答曰一番の取金百四十九両

術曰 $693 \div 9 = 77,\ 144 \div 2 = 72,\ 77 + 72 = 149$

$\boxed{45}$ 銀三百目を人数五人に配分するに，次第の差等からず．一番より二番は銀二匁少し．二番より三番は銀五匁少し．三番より四番は銀十五匁少し．四番より五番は銀廿二匁少し．各何程と問.

答曰一番七十五匁　二番七十三匁　三番六十八匁　四番五十三匁　五番三十一匁

術曰 $\text{甲} = 5 - 1,\ \text{乙} = \text{甲} - 1,\ \text{丙} = \text{乙} - 1,\ (2\,\text{甲} + 5\,\text{乙} + 15\,\text{丙} + 22 + 300) \div 5 = 75$

$\boxed{46}$ 配当米九十石四斗五升四夕あり．上下二組に是を分る．上は一組七人次第に一石六斗増し取，下は一組五人次第に内二割劣に是を取．只云上組一番の取米より下組一番の取米は外三割多し．各なにほどゝと問.

答曰上組一番五石　下組一番六石五斗

術曰 $\dfrac{(7-1) \times 7}{2} = 21,\ 90.4504 - 21 \times 1.6 = 56.8504$

$\text{壹} = 1.3,\ \text{貳} = \text{壹} \times 0.8 = 1.04,\ \text{参} = \text{貳} \times 0.8 = 0.832,\ \text{肆} = \text{参} \times 0.8 = 0.6656,\ \text{伍} = \text{肆} \times 0.8 = 0.53248$

$$56.8504 \div (\text{壹} + \text{貳} + \text{参} + \text{肆} + \text{伍} + 7) = 5 = \text{上組一番の取米}$$

$$5 \times 1.3 = \text{下一番の取米}$$

【番外　地方諸算法諸名目根元】

田（た）　水田をいふ.

畑（はた）[*1]

陸田を云．公私共今此畑の字を用ゆ．日本記并和名秒には暵の字を「はたけ」と訓ず．又鎌倉将軍家の頃は畠の字を用ゆと見へたり．東鑑云弘長三年 (1263) 六月御上洛之間百姓等取役事段別百文五町別官駄一匹夫二人可充行 至畠以二町 可准田一町 と有．畑畠の字共に和字也.

町

十反を云．即三千坪也．古へは三千六百坪を町とす.

反

十畝を云．即三百坪也．いにしへ段に作る．縦三十間，横十二間，其積三百六十坪を反と云.

畝

三十歩を云．いにしへ此名なし．いつの頃より始ると云事さだかならずといへども，天正より後の事と見へたり．惣而（そうじて）反別に掛てとる物，一畝に就て何程といはず，一反に就て何程といふを以考れは，畝の名目後年に至

*1 左訓　はたけ

できたる事明かなり．

歩（ぶ）

亦坪とも云．方六尺の積を云．拾芥抄云九田以方六尺為歩と書たる．今用ゆる坪刈桝は内法（うちのり）にて六尺壹分四方を用る也．

反別（たんべつ）

反数といふべきを反別と云也．其何故といふ事をしらず．

籾（もみ）

今公私とも此字を用ゆ．和字也．粟の字，もみなるを過てあはと訓ず．あはゝ粱と書也．和漢朗詠集云花色如蒸粟俗呼て為女郎と云詩より謬り来りしなるべし．論語云冉子為其母請粟といひしも籾を請なり．あはにはあらず．

高（たか）[*2]

いにしへ高と云事なし．戸数とて家数を以何百何十何戸と唱ふ．其後貫高永高石高等の名目はじまる．

○貫高は鎌倉将軍家の末，京都将軍家 (足利将軍家) の始より田地に貫と云事はじまる．東国西国ともに一統行れしと見へたり．鈐録（けんろく）[*3]云武士の知行を何千何百貫といふ事，当時も百姓の詞に残りてあり．田一坪に苗一把種る事にて百坪には百把種る．是を百目と云．千坪に千把種る．是を一貫目と云．此積にて大抵十貫目は百石，百貫目は千石にあたれども上中下によりて一定せずとしるべし．

○永高は石高以前関東諸国にて年貢辻を永楽銭につもりて知行領知などに直し，此永高を用ひし由．東海道筋鎌倉抔（など）に永高の所，今以有といへども古来の侭なるはなし，と見へたり．永高時代の訳，分明ならず．京都将軍道義，義持公の時代應永十年八月三日相州三嵜浦（今豆州と云 いかが考べし）へ漂舩一艘来著す．舩中を改るに永楽銭数百貫を積来りしを悉留置たる由．これによつて永楽銭多くありて永高と云事も超りたるべし．

○石高は籾納より超る．籾百石納る村を高百石の村と云．籾千石納る村を高千石の村と云．　鈐録云大名の身上を幾万石と云，平士の身上を幾千石幾百石と云事古法にあらず．大かた信長秀吉の時より超ると有．　爰を以考へみる時は石高も右の時代より始なり．慶長の頃迠も籾納と見へたり．いつの頃よりか籾納止て米にて納るやうに成たり．籾米にて納るになりてみれは，土地の善悪と年の豊凶によりて籾一升すりて米六七合を得る有，又二三合を得るあり．是よりして免といふ事初りて高と納米と別に成たり．

石盛（こくもり）　盛と斗（ばかり）も云．又斗代とも云．一事異名也．一反歩の高をいふ．

○盛と云時は高といひ，斗代と云時は其高を分米と云よし．或人の説なり．しかれども分米といふは小以高といふがごとし．一ヶ村の高を分米と書し事いまだ見ず．

○盛といふ時は幾つと云．斗代といふ時は何石何斗と唱ふるよし．或人の説なり．しかれども石盛何石何斗と書たる書も多く見へたり．

○石盛にて十と云は常の一の位也．故に一ツ二ツと云は常の分の位也．地方の算に馴ざる内は位を誤る事あり．心付べし．

[*2] 年貢は村民全体の共同責任で納められた．

[*3] 荻生徂徠『鈐録』第一・制賦

○一坪の稲をかり舂法して籾一升ある時は一反に籾三石有．是へ五公五民の定法五分を掛，一石五斗と成．是を十五の盛と云 此十五と云は斗升にて十五あるゆへ十五の盛と云よし．其外異説品々有．是を略す．しかし石盛の事は其国々の仕来又は土地の様子にも寄る事なれは一概には論じがたし．只其大意を述るのみ．

反取米　一反歩の取米をいふ．

たとえは一反の籾三石ある時は五合摺 或五分ずり共いふ にして米一石五斗あり．此米へ五公の定法五分をかけ七斗五升と成．是を一反の取米と云．残る七斗五升は百姓とる也．此五公五民の法は今公私とももっぱら用ゆるところなり．

○又四公六民の取と云あり．是は右一石五斗へ四公の定法四分を掛，米六斗と成．是を一反の取米とす．残る九斗を百姓とる也．

○又六公四民の取と云は右一石五斗は六公の定法六分を掛，米九斗となる．是を一反の取米とす．残る六斗を百姓とる也．

物成　又租税とも取箇とも成箇ともいふ．皆年貢の事也．

○関東筋田方は米納也．是を本途米とも取米共云也．亦夏成に対して秋成共云成．又畑方は永納なり．麦作などを見込にて永にて六月中取立る．是を夏成と云．厘付[*4]を仕出すには，永一貫文に定法二石五斗代を掛，夏成取米と成．秋成取米を加へ高を以て割，厘付を得る．若五ヶ年十ヶ年平均厘を得るには右二石五斗の半分一石二斗五升を定法として夏成取米を求め秋成を加へ平均厘付を得る．

○上方筋は大抵両作場(田と畑) ゆへ畑年貢とて別に納る事なく，残らず米取にして其取米の内三分一銀納にする也．銀納相場年々不同なり．

免　亦厘とも云．高一石の取米をいふ．

○厘付と云も免といふも同事になりたれども，元来厘付は籾磨より起り，免は古き詞にて，是程年貢を出すべし．其余は百姓にゆるしてやれ，と云義なりといへり．

○たとへは高一石に三斗取を三ツと云．四斗取を四ツと云．俗に是を三ツ物成，四ツ物成といふ．

○厘を二ツ三ツ共いひ，亦二尊三尊とも云よし．算学津梁に見へたり．(津久井義年『地方算学律梁』(1783 年))

高免

亦高厘ともいふ其村の取米を其村高にて割，得る数を云．

毛付免　亦毛付厘ともいふ．

是は其村の郷蔵處 (共同倉庫)・用水處より押堀(田畑の水没)・川欠(河川の決壊)・山崩・当年不作等に至まて，ことことく引て，全く其年の立毛(収穫物) ある反別の高にて其年の取米を割，得る数をいふ．

口米

或覚書云口米は上方は一石に付三升，関東は三斗五升に付一升で取立るよし．是は地方役人給分并筆墨紙等の諸入用の為に取立る．今は諸家とも此口米とも領主地頭の蔵入に成．地方の諸入用は別に領主地頭より出る也．

[*4] その年の免 (税率) を石高に掛て額を算出すること．

口永

本途(ほんど)[*5]永一貫文に付，口永三拾文づつ往古より取立る也．中頃口永三十一文二分五厘と成．享保五庚子年より ふたたび三十文づゝとなりたり．是も口米とおなじく地方諸入用に取立しが今は領主地頭の蔵入となる也．

見取場

是は反別斗にて高なく一反に付，何程づゝと取所をいふ．

小物成

野銭・山銭・鉄砲役漁猟運上・酒造冥加等の類，其外品々あり．此類を小物成といふ．万石以下の知行には此小物成の内にも高に入て渡るものあり．

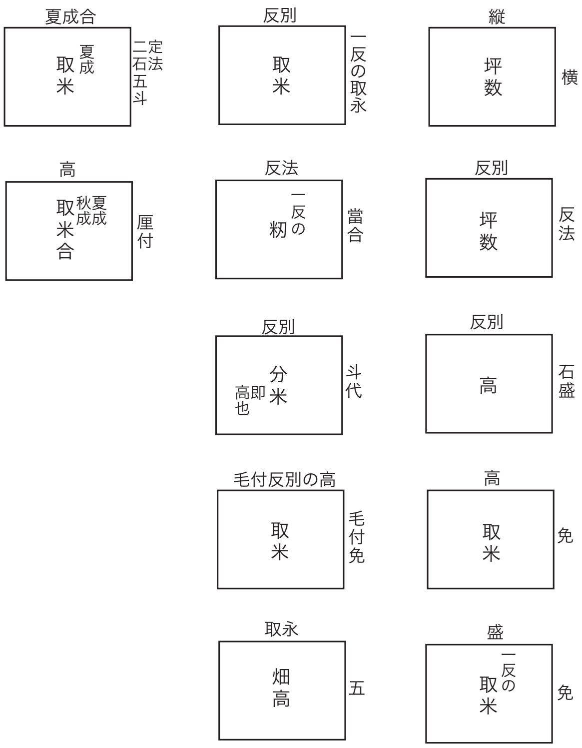
御蔵米入用　高百石に付永

六尺給米　　　　同　　米

御傳馬宿入用　　同　　米

右三役は御領所にかぎる．私領にはこれなし．尤定法ありて年々これを取立るなり．

【地方算法乗除図解捷法】



各縦なる物を置，横なる物をかくれば，内なる物となる也．故に内なる物を置，縦なる物にて割は横なる物となる．又横なる物にて割は縦なるものとなる也．

若地方の題を得はこの図解を見るべし．地方一通りの題は大抵此解にてしるゝなり．

[*5] 年貢

$\boxed{47}$ 一本にて廿五節(ふし)ある竹あり．只云末三節に米四升六合五夕容(いる)．又云本二節に米五升三合五夕容．節ごとの差米ひとし．各何ほどづゝ容と問．

答曰末一節に米一升五合容　次第の差米五夕づゝ

術曰 $4.65 \div 3 = 1.55 =$ 甲, $5.35 - 2$ 甲 $= 2.25$, $2.25 \div (25 \times 2 - 5) = 0.05 =$ 差米

甲 $- 0.05 = 1.5 =$ 末一節

$\boxed{48}$ 直田あり．図の如し．只云縦三百廿六間，横百三十八間．この反別(たんべつ)何程と問．但反法三百歩．

答曰反別十四町九反九畝十八歩

術曰 $326 \times 138 \div 300 = 149.96$

$\boxed{49}$ 反別五反八畝廿一歩あり．石盛十二にして此高何ほどと問．

答曰高七石〇四升四合

術曰 $21 \div 12 = 0.7, \quad 58.7 \times 12 = 704.4$

$\boxed{50}$ 高百二十五石免三ッ五分にして此取米何程と問．

答曰取米四十三石七斗五升

術曰 $125 \times 0.35 = 43.75$

$\boxed{51}$ 石盛十一免四ッ此反取米何ほどと問．

答曰反取米四斗四升

術曰 $1.1 \times 0.4 = 0.44$　(盛にて十と云は常の一の位也)

$\boxed{52}$ 畑五町八反七畝歩此取永四貫六百九十六文也．此反取永何ほどと問．

答曰反取永八十文

術曰 $4696 \div 58.7 = 80$

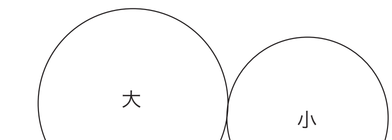
$\boxed{53}$ 勾股の内に図の如く全円を容る有．只云勾三寸股四寸．全円径いかほどと問．

答曰全円径二寸

術曰 弦 $= \sqrt{\text{勾}^2 + \text{股}^2} = 5$

全円径 $=$ 勾 $+$ 股 $-$ 弦 $= 3 + 4 - 5 = 2$

$\boxed{54}$ 大小円交る罅(すき)に図の如く甲円をいるるあり．只云大円径九寸小円径四寸．甲円径何ほどと問．

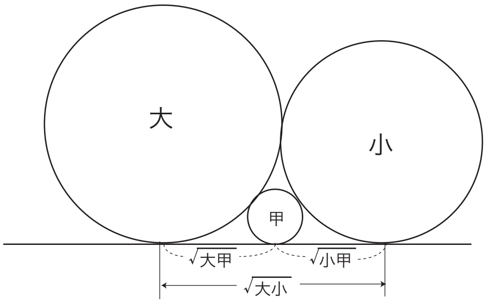


答曰甲円径一寸四分四厘

術曰 $\sqrt{\dfrac{\text{大}}{\text{小}}} = \sqrt{2.25} = 1.5$

甲円径 $= \dfrac{\text{大}}{(1.5+1)^2} = \dfrac{9}{6.25} = 1.44$

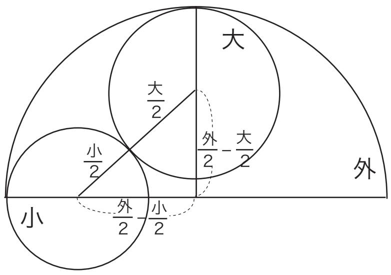
【術解】



$$\sqrt{大甲}+\sqrt{小甲}=\sqrt{大小}$$

$$\sqrt{甲}=\frac{\sqrt{大小}}{\sqrt{大}+\sqrt{小}}=\frac{\sqrt{大}}{\sqrt{\frac{大}{小}}+1},\qquad \therefore\quad 甲=\frac{大}{\left(\sqrt{\frac{大}{小}}+1\right)^2}$$

$\boxed{55}$ 円内に図の如く大円小円各二ヶを容る有．只云外円径七寸大円径三寸．小円径何ほどと問．
答曰小円径二寸八分
術曰 $小円径=\dfrac{外\,(外-大)}{外+大}=\dfrac{28}{10}=2.8$
【術解】



$$\left(\frac{外}{2}-\frac{小}{2}\right)^2+\left(\frac{外}{2}-\frac{大}{2}\right)^2=\left(\frac{大}{2}+\frac{小}{2}\right)^2$$

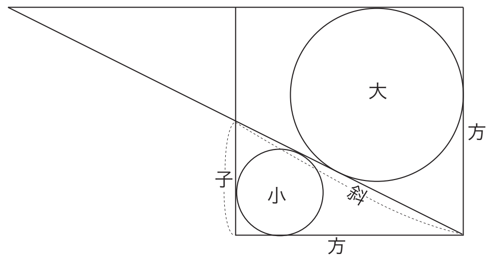
$$外^2-外小-外大=大小$$

$$\therefore\quad 小=\frac{外\,(外-大)}{外+大}$$

$\boxed{56}$ 方の内に図の如く斜を隔て大小の二円を容るあり．只云大円径四寸小円径三寸．方面何ほどと問．
答曰方面六寸
術曰 $\sqrt{大^2+小^2}=5$

$方面=\dfrac{1}{2}(5+大+小)=6$

【術解】



大 : 方 $=$ 小 : 子 より 子 $= \dfrac{小方}{大}$
斜 $=$ 子 $+$ 方 $-$ 小
子$^2 +$ 方$^2 =$ 斜^2 へ代入して 小$^2 + 2$ 子方 $- 2$ 方小 $- 2$ 子小 $= 0$

$$2\,方^2 - 2(大 + 小)\,方 + 大小 = 0$$

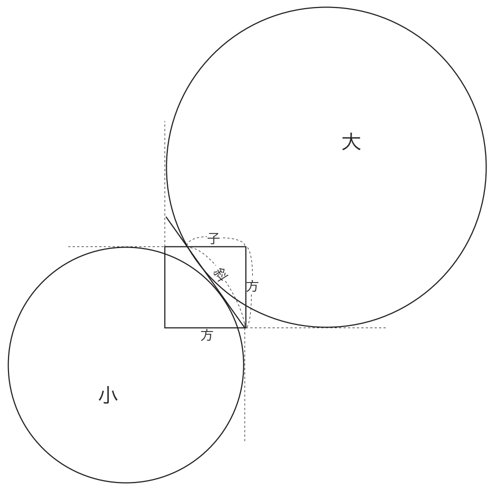
$$\therefore \quad 方 = \frac{大 + 小 + \sqrt{大^2 + 小^2}}{2}$$

〈補足〉方 $= \dfrac{大 + 小 - \sqrt{大^2 + 小^2}}{2} = 1$ も解であるが，このことについて．

方 : 大 $=$ 子 : 小 より 子 $= \dfrac{小方}{大}$

小 $= \dfrac{2\,子方}{子 + 方 - 斜}$ （直角三角形の傍接円の公式）より 斜 $= \dfrac{小方}{大} +$ 方 $- \dfrac{2\,方^2}{大}$

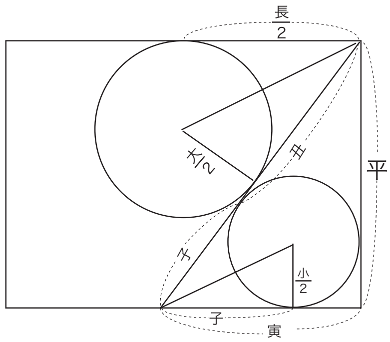
子$^2 +$ 方$^2 =$ 斜^2 へ代入して 2 方$^2 - 2$(大 $+$ 小) 方 $+$ 大小 $= 0$ で同じ方程式になる．このときの解が 方 $= 1$ である．



$\boxed{57}$ 直の内に図の如く大円一ヶと小円二ヶを容るあり．只云長五寸平四寸大円径二寸五分．小円径何程と問．
答曰小円径二寸

術曰 $大 \times 平 \div 長 = 2$,　$小円径 = 平 - 2$

【術解】



$\dfrac{長}{2} : \dfrac{大}{2} = 子 : \dfrac{小}{2}$ より　$子 = \dfrac{小長}{2\,大}$

$寅 = 子 + \dfrac{小}{2}$,　$丑 = 平 - \dfrac{小}{2}$

$\left(子 + \dfrac{小}{2}\right)^2 + 平^2 = (子 + 丑)^2$ へ代入して　$子小 = 2\,子平 - 子小 - 平小$

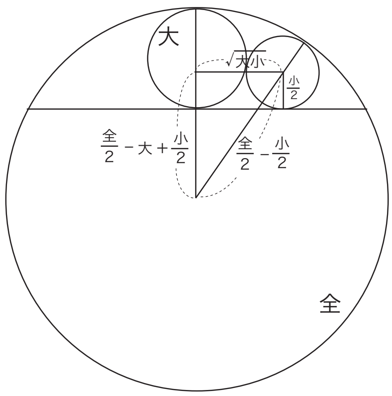
$$\therefore\quad 小 = 平 - \frac{平小}{子} = 平 - \frac{大平}{長}$$

$\boxed{58}$ 弧の内に図の如く三円を容る有．只云全円径九寸小円径一寸．弦いかほどと問．

答曰弦六寸

術曰 $弦 = 2\sqrt{全 \times 小} = 6$

【術解】



$$\left(\frac{全}{2} - \frac{小}{2}\right)^2 = 大小 + \left(\frac{全}{2} - 大 + \frac{小}{2}\right)^2$$

$$大^2 - 全大 + 全小 = 0$$

$$\therefore\quad 弦 = 2\sqrt{大\,(全 - 大)} = 2\sqrt{全小}$$

点竄指南録巻之一終

点竄指南録巻之二
武江　阪部勇左衛門廣胖　著
馬場金之丞正督　訂

$\boxed{59}$ 人集て木綿をわくる．其反数をしらず．只云七反づつ分れば十四反たらず．又云五反づつわくれば十六反あまる．惣反数をよび人数何程と問．
答曰人数十五人　惣反数九十一反
術曰 $(14+16)\div(7-5)=15=$ 人数
【術解】

$$7\text{人}-14=5\text{人}+16$$

$\boxed{60}$ 人集て米を買．其人数び石数をしらず．只云一人にて銀二百十匁づつ出せば盈る事三十目又云一人にて銀二百七匁づつ出せば盈る事三匁なり．人数及び米代銀何程づつと問．
答曰人数九人　米代銀一貫八百六十目
術曰 $(30-3)\div(210-207)=9=$ 人数
【術解】

$$210\text{人}-30=207\text{人}-3$$

$\boxed{61}$ 人集て金を分る．其人数および其金高をしらず．只云四両づつ分れば二十両たらず．又云三両三分づつ分れば七両二分足らず．人数及び配分金何ほどと問．
答曰人数五十人　金百八十両
術曰 $(20-7.5)\div(4-3.75)=50=$ 人数
【術解】

$$4\text{人}-20=3.75\text{人}-7.5$$

$\boxed{62}$ 物あり．惣数をしらず．只云人ごとに二十五ヶづつとれば足ざること六ヶ．又云人ごとに二十三ヶづつ取ば盈不足なし．人数および物の惣数何ほどと問．
答曰人数三人　惣数六十九
術曰 $6\div(25-23)=3=$ 人数
【術解】

$$25\text{人}-6=23\text{人}$$

$\boxed{63}$ 井あり．其深をしらず．只云縄を三折にして井に入て見れば縄の盈ること四尺．又云其縄を四折にして井に入てみれば盈ること一尺也．井の深さ及び縄の長さ何程と問．
答曰井深八尺　縄長三丈六尺
術曰 $(4-1)\times3\times4\div(4-3)=36=$ 縄長
【術解】

$$\frac{\text{長}}{3}-4=\frac{\text{長}}{4}-1$$

$\boxed{64}$ 牛と馬に乗て旅へ行人あり．馬は一日に十五里づつ歩み，牛は一日に十二里づつあゆむ．只云牛に乗行人は五日先へいづる．馬にのり行人幾日にて追及ぶと問．

答曰二十日にして追及

術曰 $5 \times 12 \div (15 - 12) = 20 =$ 追及日数

【術解】

$$12\,日 + 5 \times 12 = 15\,日$$

$\boxed{65}$ 老若の二人旅へ行あり．只云老人は初日十二里行，次の日より日ごとに一里づつ衰(おと)る．又云若人は日毎に十四里四分づつ行也．別云老人は四日前に出立す．若人幾日にして追着と問．

答曰五日にして追着

術曰 甲 $= (14.4 - 12) \div 1 - 0.5 = 1.9$

$$追付日数 = \sqrt{\frac{4 \times 14.4 \times 2}{1} + 甲^2} - 甲 - 4 = 5$$

【術解】老人旅行日数=老 とす．

$$(老 - 4) \times 14.4 = 12\,老 - \frac{老^2}{2} + \frac{老}{2}$$

$$4 \times 14.4 \times 2 - 2\,甲老 - 老^2 = 0$$

$$追付日数 = 老 - 4$$

$\boxed{66}$ 遅足早足の二人あり．遅足の人先へ歩て三十七町行．早足の人をふ事百四十七町にして及ざること二十三町也．又追こと幾町にして追付と問．

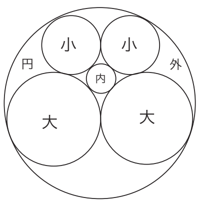
答曰又追事二百四十一町半にして追着

術曰 $23 \times 147 \div (37 - 23) = 241.5 =$ 又追町数

【術解】又追町数=追 とす．

$$\frac{37}{147} - \frac{23}{147} = \frac{37}{147 + 追}$$

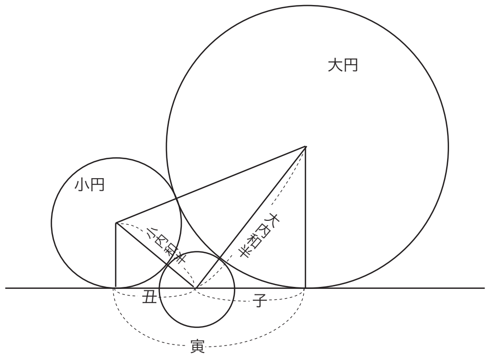
$\boxed{67}$ 円の内に図の如く五円を容る有．只云大円径一十四寸，小円径七寸．内外円径各何ほどと問．



答曰内円径四寸　外円径二十八寸

術曰 天 $= 14 \times 7 \times 2 = 196$,　$2\sqrt{天} - 14 - 7 = 7 =$ 外法,　天 $\div$ 外法 $= 196 \div 7 = 28 =$ 外円径

$$2\sqrt{天} + 14 + 7 = 49 = 外法,\quad 天 \div 外法 = 196 \div 49 = 4 = 内円径$$



【術解】

$$子^2 = \left(\frac{大}{2} + \frac{内}{2}\right)^2 - \frac{大^2}{4} = \frac{内^2}{4} + \frac{大内}{2}$$

$$丑^2 = \left(\frac{小}{2} + \frac{内}{2}\right)^2 - \frac{小^2}{4} = \frac{内^2}{4} + \frac{小内}{2}$$

$$寅^2 = 大小$$

ゆえに

$$子^2 + 寅^2 - 丑^2 = \frac{内^2}{4} + \frac{大内}{2} + 大小 - \frac{内^2}{4} - \frac{小内}{2} = \frac{大内}{2} + 大小 - \frac{小内}{2}$$

ところで $子^2 + 寅^2 - 丑^2 = 2\,子寅$ だから

$$\frac{大内}{2} + 大小 - \frac{小内}{2} = 2\,子寅$$

これを自乗して

$$\left(\frac{大内}{2} + 大小 - \frac{小内}{2}\right)^2 = 4\,子^2寅^2$$

$$4\,大^2小^2 - 4\,大小\,(大 + 小)\,内 + (大^2 - 6\,大小 + 小^2)\,内^2 = 0 \cdots ①$$

數にかえ

$$38416 - 8232\,内 - 343\,内^2 = 0$$

この商 4(内円徑とす) と -28(外円徑とす).
①の實級の 2 大小を省き，實級の $4\,大^2小^2$ を省く.

$$1 - 2(大 + 小)x + (大^2 - 6\,大小 + 小^2)x^2 = 0$$

この解 x は $x = \dfrac{内}{2\,大小} = \dfrac{内}{天}$ である.

$$D = 平責 = 8\,大小 = 4\,天$$

だから

$$x=\frac{1}{大+小+2\sqrt{天}}=\frac{内}{天}$$

$$\therefore\quad 内=\frac{天}{大+小+2\sqrt{天}},\quad 外=\frac{天}{2\sqrt{天}-大-小}$$

又は ① を

$$天^2-2\,天\,(大+小)x+(大^2-6\,大小+小^2)x^2=0$$

$$天^2-2\,天\,(大+小)x+\{(大+小)^2-4\,天\,\}x^2=0$$

$$天^2-2\,天\,(大+小)x+(大+小)^2x^2=4\,天\,x^2$$

$$(天-(大+小)x)^2=4\,天\,x^2\cdots②$$

$$天-(大+小)x=2\sqrt{天}x$$

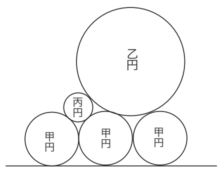
とし

$$内=\frac{天}{大+小+2\sqrt{天}}$$

此如く左右に分て平方に開くもよろし．人々心の欲する所に従ふべし．

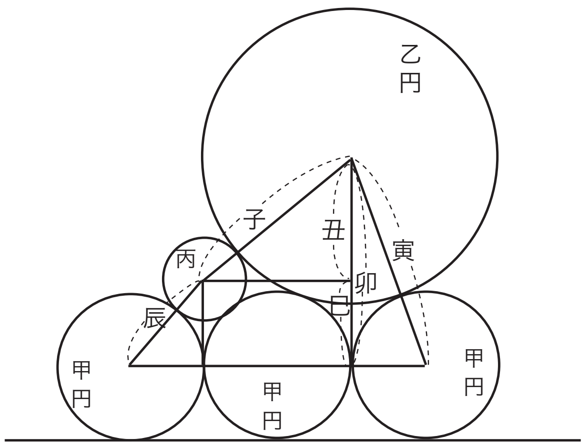
和算では ① を ② のように分解する例をよく見かける．

$\boxed{68}$ 直線上に圖の如く五円を載る有．只云甲円徑二寸乙円徑三寸丙円徑いかほどと問．



答曰丙円徑一寸四分

術曰 $(2\times\overline{2}+3)\times\overline{2}=14,\quad 3\times4-\overline{2}=10,\quad 14\div10=1.4=$ 丙円徑 $\quad(\overline{2}=$ 甲$)$



【術解】 丙を未知数とする．

$$子 = \frac{乙}{2} + \frac{丙}{2}$$

$$寅 = \frac{甲}{2} + \frac{乙}{2}$$

$子^2 - 甲^2 = 丑^2$ に代入して

$$\frac{乙^2}{4} + \frac{丙^2}{4} + \frac{乙丙}{2} - 甲^2 = 丑^2$$

$寅^2 - \left(\frac{甲}{2}\right)^2 = 卯^2$ へ代入して

$$\frac{乙^2}{4} + \frac{甲乙}{2} = 卯^2$$

対換して

$$\frac{丙^2}{4} + \frac{甲丙}{2} = 巳^2$$

$卯^2 + 巳^2 - 丑^2 = 2\,卯巳$ へ代入して

$$\frac{甲乙}{4} + \frac{甲丙}{4} - \frac{乙丙}{4} + \frac{甲^2}{2} = 卯巳$$

自乗して

$$\left(\frac{甲乙}{4} + \frac{甲丙}{4} - \frac{乙丙}{4} + \frac{甲^2}{2}\right)^2 = 卯^2巳^2$$

$卯^2巳^2$ を代入して

$$\left(\frac{甲乙}{4} + \frac{甲丙}{4} - \frac{乙丙}{4} + \frac{甲^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{乙^2}{4} + \frac{甲乙}{2}\right)\left(\frac{丙^2}{4} + \frac{甲丙}{2}\right)$$

展開し，遍異減同加して，遍甲をはぶき

$$4\,甲^2乙 + 4\,甲^2 + 甲乙^2 + (4\,甲^2 - 4\,乙^2 - 6\,甲乙)\,丙 + (甲 - 4\,乙)\,丙^2 = 0$$

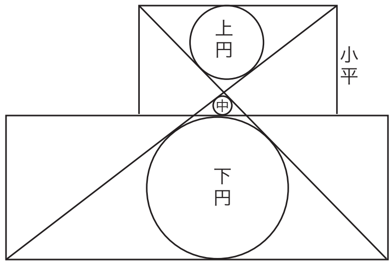
$子 = 2\,甲 + 乙$ とする．

$$甲子^2 + (2\,子甲 - 4\,子乙)\,丙 + (甲 - 4\,乙)\,丙^2 = 0$$

$$(丙 + 子)(子甲 + (甲 - 4\,乙)\,丙) = 0$$

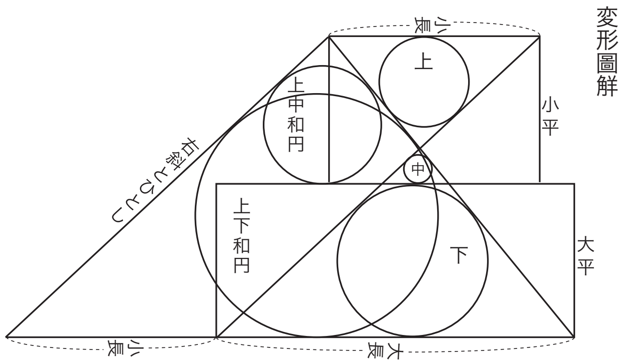
$$\therefore\quad 丙 = \frac{子甲}{4\,乙 - 甲}$$

$\boxed{69}$ 不同の直を重る内に圖の如く二斜三円を容る有．只云上円径四寸，中円径二寸，下円径 6 寸，小平いか程と問．



答曰小平九寸

術曰 $(4+2)\times 6=36,\ 6-2=4,\ 36\div 4=9=$ 小平



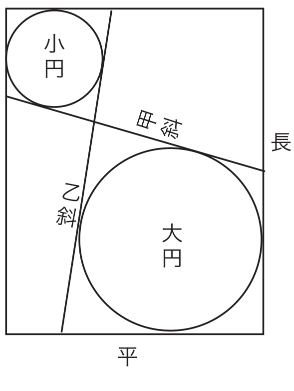
【術解】小平を未知数とする．

(小平 + 下徑) : (上徑 + 下徑) = 小平 : (上徑 + 中徑) より

$$(\text{小平}+\text{下徑})(\text{上徑}+\text{中徑})=\text{小平}\ (\text{上徑}+\text{下徑})$$

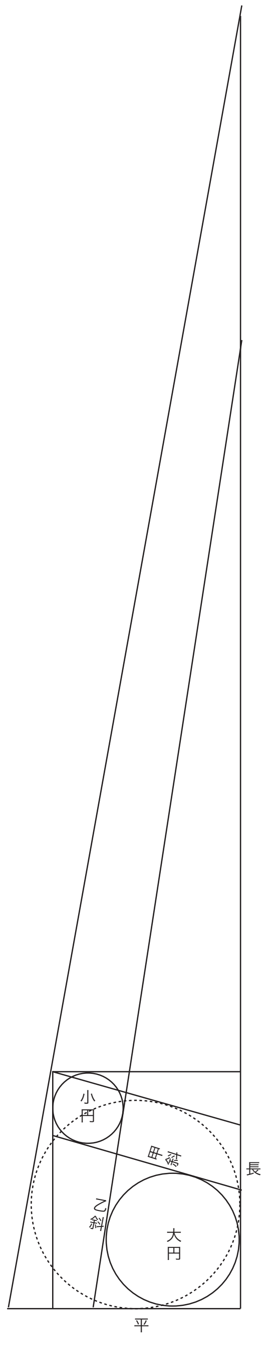
$$\therefore\quad \text{小平}=\frac{(\text{上}+\text{中})\ \text{下}}{\text{下}-\text{中}}$$

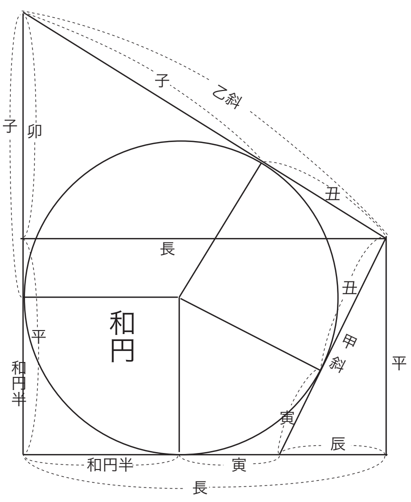
$\boxed{70}$ 直の内に圖の如く斜を隔て大小の円を容るあり．只云長三十五寸，平二十寸，甲斜二十五寸，乙斜何程と問．



答曰乙斜三十七寸

術日 $\sqrt{25^2-20^2}=\sqrt{225}=15,\ 15+20+25-35=25=$ 天,
$35^2\div$ 天 $=49,\ (49+$天$)\div 2=37=$ 乙斜



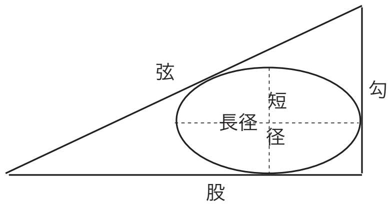


【術解】 和円 $=$ 大 $+$ 小, 辰$^2=$ 甲$^2-$ 平^2
卯 $=($長 $-$ 辰$)+$ 乙 $-$ 甲 $-$ 平
$\therefore$ 乙 $-$ 卯 $=$ 辰 $+$ 甲 $+$ 平 $-$ 長 $:=$ 天

$$乙+卯=\frac{長^2}{乙-卯}$$

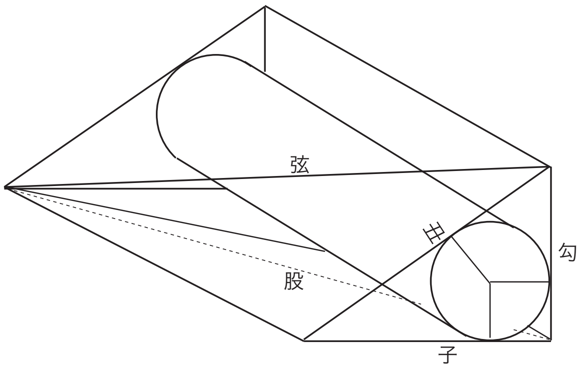
$$\therefore\quad 2\,乙=天+乙+卯=辰+甲+平-長+\frac{長^2}{乙-卯}$$

$\boxed{71}$ 勾股の内に図のごとく側円を容るあり．只云股八寸，長径四寸，短径二寸．勾何ほどと問．



答曰勾三寸

術曰 $(股 - 長) \times 2 = (8-4) \times 2 = 8 := 天,\ (天 + 長) \times 短 = (8+4) \times 2 = 24,\ 24 \div 天 = 3 = 勾$



【術解】 勾を未知数とする．

勾股形の箱を作り，円擣を押し入て斜にきるとき，切口即題に云図のごとくなる也．

比例により 長径 : 股 = 短径 : 子

$$\therefore \quad 子 = \frac{股 \cdot 短}{長}$$

$$丑 = 子 + 勾 - 短 = \frac{股 \cdot 短}{長} + 勾 - 短$$

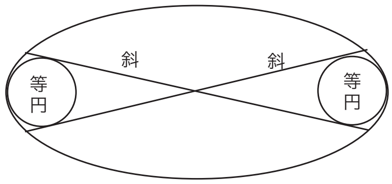
$$丑^2 = \left(\frac{股 \cdot 短}{長} + 勾 - 短\right)^2 = \frac{股^2 短^2}{長^2} + 勾^2 + 短^2 + \frac{2\,股 \cdot 短}{長} 勾 - 2\,勾短 - 2\frac{股 \cdot 短^2}{長}$$

$勾^2 + 子^2 = 丑^2$ へ代入して

$$2(股 - 長)\,勾 - (2\,股 - 長)\,短 = 0$$

$$\therefore \quad 勾 = \frac{\{2(股 - 長) + 長\,\}短}{2(股 - 長)}$$

$\boxed{72}$ 側円の内に図のごとく斜を隔て等円二個を容る有．其周長径のはしにつく．只云長径二十五寸，短径一十五寸．等円径九寸．界斜何程と問．



答曰斜二十寸

術曰 $\dfrac{9}{25}\times 2 = 0.72$，$(1-0.72)\times 15^2 = 63$， $63+9^2 = 144$，$\sqrt{144} = 12$

$(25-9)\times 15 = 240$，$240 \div 12 = 20 =$ 斜

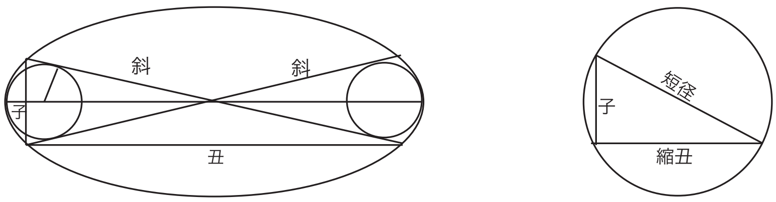
【術解】斜を未知数とする．$\dfrac{長-等}{2} : \dfrac{等}{2} = 斜 : 子 \quad \therefore \quad 子 = \dfrac{斜\cdot 等}{長-等} \cdots ①$

縮丑 $= \dfrac{短}{長}$丑 だから

$$子^2 + \frac{短^2}{長^2}丑^2 = 短^2 \cdots ②$$

$$子^2 + 丑^2 = 斜^2 \cdots ③$$

① ② ③ より子，丑を消去する．



$$\begin{aligned}
短^2 &= 子^2 + \frac{短^2}{長^2}丑^2 \\
&= \frac{斜^2等^2}{(長-等)^2} + \frac{短^2}{長^2}\left(斜^2 - \frac{斜^2等^2}{(長-等)^2}\right) \\
&= \frac{斜^2等^2}{(長-等)^2} + \frac{短^2斜^2}{(長-等)^2} - \frac{2\,短^2斜^2等}{長\,(長-等)^2} \\
&= \frac{天}{(長-等)^2}斜^2 \qquad \left(天 = 短^2 - \frac{短^2等}{長} + 等^2 とする\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad 短 = \frac{\sqrt{天}}{長-等}斜$$

$$\therefore \quad 斜 = \frac{短\,(長-等)}{\sqrt{天}}$$

楕円 $\dfrac{x^2}{15^2} + \dfrac{y^2}{25^2} = \dfrac{1}{4}$ の $x=0$ での曲率半径 ρ は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{25}{9}\frac{x}{y}$$

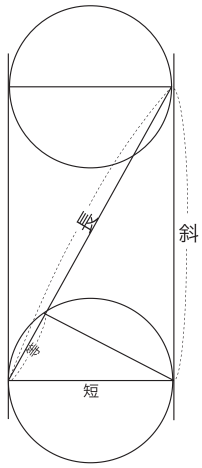
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{25}{9}\frac{y - y'x}{y^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0, y=\frac{25}{2}} = -\frac{2}{9}$$

$$\rho = \left|\frac{(1+\frac{dy}{dx})^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right|_{x=0} = \frac{9}{2} = \text{等円半径}$$

よって等円は曲率円である．



上図で，等 : $\sqrt{\text{短}^2 - \text{等}^2}$ = 短 : 斜 より

$$\text{斜} = \frac{\text{短}}{\text{等}}\sqrt{\text{短}^2 - \text{等}^2} = \frac{15}{9} \times 12 = 20$$

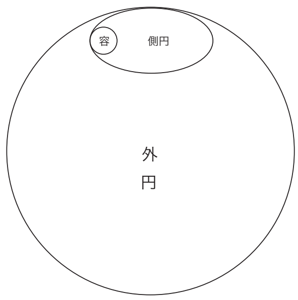
あるいは

$$\text{斜} = \sqrt{\text{長}^2 - \text{短}^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < a < b)$ の 点 $(0,\ b)$ における曲率円で斜をひくと

$$\text{斜} = 2\sqrt{b^2 - a^2} = 2\,\text{焦点}$$

$\boxed{73}$ 円の内に図の如く側円をいれ，側円のうちに円をいるる有．外円は側円短径の端につく．容円は側円長径の端につく．只云側円長径四寸，短径二寸．至小なる外円径といたつて大なる容円径何ほどと問.



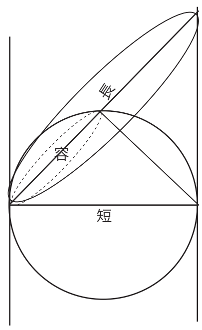
答曰外円径八寸　容円径一寸

術曰 $4 \div 2 = 2 =$ 天, $2 \div$ 天 $= 1 =$ 容円径, $4 \times$ 天 $= 8 =$ 外円径

【術解】下図のごとく円擣へ球を押入て，斜にきる時は平面側円内へ至て大なる円を容る形となる．

容 : 短 = 短 : 長 より 容 $= \dfrac{\text{短}^2}{\text{長}}$

対換して 外 $= \dfrac{\text{長}^2}{\text{短}}$



楕円　$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の $x = 0$ での曲率半径 ρ を求めると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\frac{y - y'x}{y^2}$$

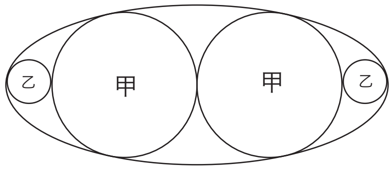
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

$$\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0,y=2} = -2$$

$$\rho = \left|\frac{(1 + \frac{dy}{dx})^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

よって容円の直径は 1

$\boxed{74}$ 楕円の内に図のように甲円，乙円各 2 個を容れる．至て大なる乙円といへども其周が長径の端につく．只云長径 1 寸，甲乙円径短径各何程と問．



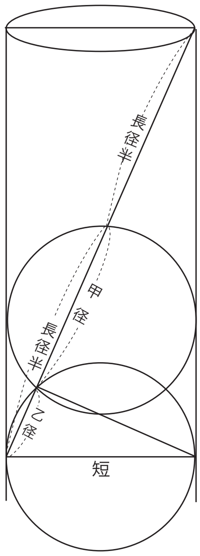
答曰甲円径 0.35355339 有奇　，　乙円径 0.14644661　，　短径 0.38268343

術曰 甲円径 $= \sqrt{0.125} \times$ 長径 $= 0.353553390$

乙円径 $= \dfrac{\text{長径}}{2} - 0.353553390 = 0.14644661$

短径 $= \sqrt{\text{乙円径} \times \text{長径}} = 0.38268343$

【術解】甲径を未知数とする．乙 $= \dfrac{\text{長}}{2} -$ 甲



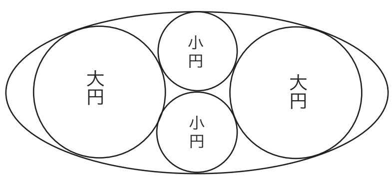
短 : 乙 = 長 : 短 より 短$^2 =$ 長 $\times$ 乙 $= \dfrac{\text{長}^2}{2} -$ 甲長

一方 短$^2 =$ 甲$^2 +$ 乙$^2 =$ 甲$^2 + \left(\dfrac{\text{長}}{2} - \text{甲}\right)^2 = \dfrac{\text{長}^2}{4} + 2$ 甲$^2 -$ 甲長

短を消去して 甲$^2 = \dfrac{\text{長}^2}{8}$

$\therefore$　甲 $= \sqrt{0.125}$長

$\boxed{75}$ 側円内に図のように大円小円各 2 個を容れる．只云長径 8 寸，短径 4 寸，大円径何ほどと問．



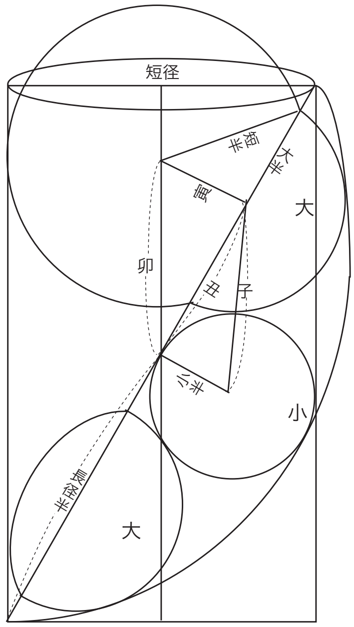
答曰 大円径 3 寸

術曰 短径 $\div$ 長径 $= 4 \div 8 = 0.5$

短径 $- 0.5^2 \times$ 短径 $= 4 - 1 = 3 =$ 大円径

【術解】大円径を未知数とする．$\dfrac{\text{短}}{2} =$ 小　，子 $= \dfrac{\text{大}}{2} + \dfrac{\text{短}}{4}$

下図のごとく円擣は球を押入れて斜めに切る平面へ又小円を容れる時は題図のごとくなるなり．



$$丑^2 = 子^2 - \left(\frac{小}{2}\right)^2 = \frac{大^2}{4} + \frac{大短}{4}$$

$$寅^2 = \frac{短^2}{4} - \frac{大^2}{4}$$

比例により　短 : 長 = 寅 : 卯，よって $卯^2 = \dfrac{長^2}{4} - \dfrac{大^2長^2}{4\,短^2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{短}{2}\right)^2 &= 卯^2 + \left(丑 + \frac{大}{2}\right)^2 - 2\left(丑 + \frac{大}{2}\right)丑 \\ &= 卯^2 + \frac{大^2}{4} - 丑^2 \\ &= 卯^2 + \frac{大^2}{4} - \left(\frac{大^2}{2} + \frac{大短}{4}\right) \\ &= 卯^2 - \frac{大短}{4} \\ &= \frac{長^2}{4} - \frac{大^2長^2}{4\,短^2} - \frac{大短}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 短^2 = 長^2 - \frac{大^2長^2}{短^2} - 大短$$

$$長^2大 + 短^3大 + 短^4 - 短^2長^2 = 0$$

$$短^3(大 + 短) + 長^2(大 + 短)(大 - 短) = 0$$

遍く過乗を省き

$$短^3 + 長^2(大 - 短) = 0$$

$$\therefore\quad 大 = 短 - \frac{短^3}{長^2}$$

$\boxed{76}$ 検見村あり．五公五民の取五分摺(ずり)にして石盛十三免五ツ五分にして當合何ほどと問．

答日當合九合五夕三三三余

術日 $1.3 \times 0.55 \times 4 = 2.86$，$2.86 \div 300 = 0.0095333$

【術解】求めるものは 1 坪の籾 $= x$，　$x \times 300 \times 0.5 \times 0.5 = 1.3 \times 0.55$

五巻 47 術解番外に詳しくあり．1 反 = 300 坪

盛 × 免 = 反取米 で 盛 = 1.3, 免 = 0.55 とする．

$\boxed{77}$ 検見村あり．六公四民の取五分摺(ずり)にして石盛一石五斗厘付五ツ．當合いかほどと問．

答日當合八合三夕三三三余

術日 $1.5 \times 0.5 \times 2 = 1.5$，$1.5 \div 0.6 \div 300 = 0.0083333$

【術解】求めるものは 1 坪の籾 $= x$，　$x \times 300 \times 0.5 \times 0.6 = 1.5 \times 0.5$

$\boxed{78}$ 検見村あり．當合一升二合五夕．只云當年坪苅一升三合．反取の上り何程と問．但五公五民の取五合摺にして

答曰反取三升七合五夕上る

術曰 $0.013-0.0125=0.0005$，$0.0005\times 300\div 4=0.375$

【術解】求めるものは 1 反の取 $=x$ ，　$0.0005\times 300=x\times 0.5\times 0.5$

$\boxed{79}$ 本田新田の二位有．本田石盛十六，新田石盛十三．只云本田當合と新田當合の差二合なり．厘付何程と問．但本田新田とも厘付おなじ五公五民の取五合摺にして．

答曰厘付五ツ

術曰 $(1.6-1.3)\times 4=1.2,\ 300\div 1.2=250,\ 250\times 0.002=0.5$

【術解】厘付 $=x$ とする．$\dfrac{x\times 4\times 1.6}{300}-\dfrac{x\times 4\times 1.3}{300}=2$

$\boxed{80}$ 東西の二村あり．只云反別和して二十五町歩．東村平均石盛二石，西村平均石盛一石六斗．又云東村高より西村高は多き事四十石．各いかほどと問．

答曰東村反別十町　東村高二百石　西村反別十五町　西村高二百四十石

術曰 $25\times 16=400,\ 400-40=360,\ 360\div 3.6=100=$ 東村反別

【術解】東村反別 $=x$, 西村反別 $=40-x$, $1.6(250-x)-2x=40$

$\boxed{81}$ 新検地の村あり．古高何程と云をしらず．外改出高二十五石，取米五十石．只云古高厘より今高厘は下るを一ツ．各いか程と問．

答曰　古高百石　古高厘五ツ　今高百二十五石　今高厘四ツ

術曰 $50\div 25\div 0.1=20,\ 20+0.25=20.25,\ \sqrt{20.25}=4.5,\ 4.5+0.5=5,\ 5\times 0.1=0.5$

【術解】古高厘 $=x$, 今高厘 $=x-$ 差, 今高 $=$ 古高 $+$ 改出, $\underline{\text{古高}\times x=\text{取米}=\text{今高}\times\text{今高厘}}$

差 $=0.1$, 取米 $=50$, 改出 $=25$

$$\text{取米}=\left(\frac{\text{取米}}{x}+\text{改}\right)(x-\text{差})$$

$$\text{改}\,x^2-\text{改}\cdot\text{差}\,x-\text{取}\cdot\text{差}=0$$

遍法級数を以割

$$\frac{1}{\text{差}}x^2-x-\frac{\text{取}}{\text{改}}=0$$

$$x=\text{差}\left(0.5+\sqrt{0.5^2+\frac{\text{取}}{\text{差}\cdot\text{改}}}\right)$$

$\boxed{82}$ 上中下の田あり．只云物成合四百六十二石四升八合あり．又云反別和して三十五町三反一畝歩有．別云上田の物成より中田の物成は二十八石九斗六升少し．重云一反に付上田は一石六斗取．中田は一石二斗八升取．下田は九斗六升取にして各何ほどと問．

答曰　上田十二町五反三畝　此物成二百石四斗八升

　　中田十三町四反　此物成百七十一石五斗二升

　　下田九町三反八畝　此物成九十石四升八合

【術解】上田反数 x ，中田反数 y ，下田反数 z とする．

$$\begin{cases} x+y+z=353.1 \\ 1.6x+1.28y+0.96z=462.048 \\ 1.6x-1.28y=28.96 \end{cases}$$

$\boxed{83}$ 新古の二田あり．高合二百五十石あり．古田取米百二十石．新田取米五十石．只云古田厘より新田厘は下ること三ツ．各いか程と問．

答曰　古田高百五十石　古田厘八ツ　新田高百石　新田厘五ツ

術曰 $1\div 250=0.004=$ 天，$0.004\times(120+50)=0.68$，$(0.68-0.3)\div 2=0.19=$ 地

$50\times$ 天 $\times 0.3=0.06$，$\sqrt{0.06+地^2}=\sqrt{0.0961}=0.31$，$0.31+$ 地 $=0.5=$ 新田厘

$\boxed{84}$ 上下の米あり．只云上米より下米は金一両に付一斗やすし．又云上米より下米は一石に付銀二匁五　安し．別云銀相場六十目なり．各何ほどと問．

答曰　金一両に付　上米一石五斗　下米一石六斗

術曰 $60\div 0.1\div 2.5=240$，$\sqrt{240+0.25}-0.5=\sqrt{240.25}-0.5=15.5-0.5=15$

$15\times 0.1=1.5=$ 上米相場

【術解】金 1 両に付上米 x 石，同じく下米 y 石とする．

$$\begin{cases} y-x=0.1 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2.5}{60} \end{cases}$$

$$2.5x^2+2.5\times 0.1x-0.1\times 60=0$$

$$\frac{1}{0.1}x^2+x-\frac{60}{2.5}=0$$

$$x=\left(-0.5+\sqrt{0.5^2+\frac{60}{2.5\times 0.1}}\right)\times 0.1$$

$\boxed{85}$ 上下の米あり．上米四十二石の代金より下米三十八石七斗の代金は十一両少し．只云金一両に付上米より下米は一斗一升安し．上米一石に付銀何ほどと問．但銀相場六十目

答曰　上米一石に付銀八十目

術曰 $11\times 0.11=1.21$，$1.21+38.7=39.91$，$(42-39.91)\div 2=1.045=$ 天，$42\times 0.11=4.62=$ 地

$4.62\times 11=50.82$，$\sqrt{50.82+天^2}-$ 天 $=7.205-1.045=6.16$，$6.16\times 60\div$ 地 $=369.6\div$ 地 $=80$

【術解】上米一石につき銀 x 両，同じく下米を y 両とする．

$$\begin{cases} 42x-38.7y=11 \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=0.11 \end{cases}$$

$$0.11\times 42x^2+(42-38.7-0.11\times 11)x-11=0$$

$$地\,x^2+2\,天\,x-11=0$$

$$求める銀=x\times 60=\frac{-天+\sqrt{天^2+地\times 11}}{地}\times 60$$

$\boxed{86}$ 勾股あり図の如し．只云勾股積の内，勾股の差冪を減じ余を平方に開の商は勾より少こと四寸．又云股二十寸．勾何程と問．

答曰勾十三寸　又十六寸

術曰 $1.25 \times 20 + 4 = 29 = 天$

$$天^2 = 841, \quad \sqrt{天^2 - 2(股^2 + 4^2)} = 3$$

$$(天 \pm 3) \div 2 = 13,\ 16$$

【術解】 勾を得る式

$$2\,勾^2 - 2\left(\frac{5}{4}股 + 只\right)勾 + 股^2 + 只^2 = 0$$

$天 = \dfrac{5}{4}股 + 只$ と置く．

$$2\,勾^2 - 2\,天 + 股^2 + 只^2 = 0$$

此式正商二件共に題に合故に左のごとし．

$$勾 = \frac{天 \pm \sqrt{天^2 - 2(股^2 + 只^2)}}{2}$$

$\boxed{87}$ 勾股あり．只云股弦の差を以勾を除き得る数三寸也．勾弦の差を以股を除き得る数何ほどと問．

答曰勾弦の差を以股を除数二寸

術曰 $2 \div (3-1) + 1 = 2$

【術解】 $\dfrac{勾}{弦 - 股} = 3 = 只 \cdots ⓪$, $\dfrac{股}{弦 - 勾} = x$

$(弦 - 勾)(弦 + 勾) = 股^2$ に代入して $\dfrac{股}{x}(弦 + 勾) = 股^2$

$\therefore\quad 弦 + 勾 = 股\,x \cdots ①\quad 弦 - 勾 = \dfrac{股}{x} \cdots ②$

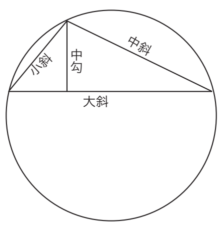
①②より $勾 = \dfrac{股\,x - \dfrac{股}{x}}{2}$, $弦 = \dfrac{股\,x + \dfrac{股}{x}}{2}$

これを⓪に代入して　$(只 - 1)x^2 - 2\,只\,x + 只 + 1 = 0$

$$(x-1)\left\{(只 - 1)x - 只 - 1\right\} = 0$$

$$x = \frac{2}{只 - 1} + 1$$

$\boxed{88}$ 円の内に図の如く三斜を容るあり．只云小斜四寸中斜七寸円径一十四寸．中勾何ほどと問．



答曰中勾二寸

術曰 小斜 × 中斜 ÷ 円径 = 中勾

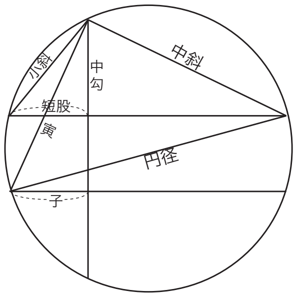
【術解】寅 : 子 = 中斜 : 中勾 で 子 = 短股 だから 寅 : 短股 = 中斜 : 中勾

故に中斜寅の勾股形と中勾短股の勾股形と同矩なる事をしり下の比例を設く.

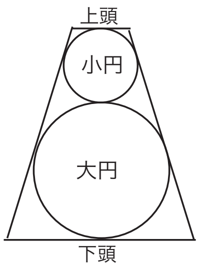
$$円径 : 中斜 = 小斜 : 中勾$$

$$\therefore \quad 中勾 = \frac{中斜 \times 小斜}{円径}$$

(正弦定理)



89 梯の内に図の如く大小二円を容る有. 只云上頭一寸下頭一十六寸. 大円径何程と問.

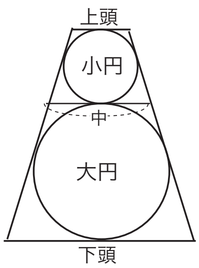


答曰大円径八寸

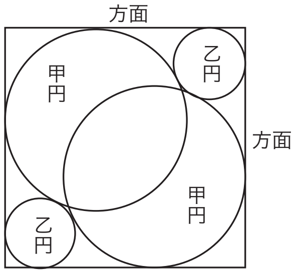
術曰 $\sqrt{\sqrt{上 \times 下} \times 下} = 大円径$

【術解】上 : 中 = 中 : 下 より 中 $= \sqrt{上下}$

大 : 下 = 中 : 大 より 大 $= \sqrt{中下} = \sqrt{\sqrt{上 \times 下} \times 下}$



90 方の内に図の如く甲乙各二円を容るあり. 只云方面九寸, 甲円径八寸. 乙円径何ほどと問.



答曰乙円径二寸

術曰 $9 \times 2 = 18 = 天$

$\sqrt{天 \times 8} = 12$

$12 \times 2 = 24$

$天 + 8 - 24 = 2 = 乙$

【術解】 $\dfrac{乙}{2} + \sqrt{甲乙} + \dfrac{甲}{2} = 面$

$$\left(\sqrt{乙} + \sqrt{甲}\right)^2 = 2\,面$$

$$\sqrt{乙} + \sqrt{甲} = \sqrt{2\,面}$$

$$乙 = 甲 + 2\,面 - 2\sqrt{2\,面 \cdot 甲}$$

$\boxed{91}$ 新古の二田あり．只云古田高より新田高は多事二十五石．又云古田厘七ツ二分，新田厘五ツ，別云古田高を以新田とり米を除く厘と新田高を以古田取米を除く厘と各ひとし．高をよび取米各いかほどと問.

答曰古田高百二十五石　古田取米九十石　新田高百五十石　新田取米七十五石

術曰 $7.2 \div 5 = 1.44$

$\sqrt{1.44} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2$

$25 \div 0.2 = 125 = 古田高$

【術解】古田高 $= x$, 新田高 $= x + 25$

$$\frac{(x+25) \times 5}{x} = \frac{x \times 7.2}{x+25}$$

$$5(x+25)^2 = 7.2x^2$$

$$(x+25)^2 = \frac{7.2}{5}x^2 = 1.44x^2$$

$$x + 25 = 1.2x$$

$$x = 25 \div (1.2 - 1) = 125 = 古田高$$

$\boxed{92}$ 東中西の三村あり．只云東村取米より中村取米は多きこと十六石，又云中村取米より西村取米は多きこと十石．別云三村各厘付五ツ，重云西村高を以中村取米を除く厘より中村高を以東村取米を除く厘は下事一ツ．各何程と問.

答曰東村高四十八石　同取米二十四石

中村高八十石　同取米四十石

西村高百石　同取米五十石

術曰 $甲 = \dfrac{別}{重} = \dfrac{0.5}{0.1} = 5$

$$乙 = \frac{(只 - 又)\,甲 - 又}{2} = 10$$

$$東取米 = 乙 + \sqrt{乙^2 + 甲又只} - 只 = 24$$

【術解】東村，中村，西村の取米を東，中，西とする．東村高，中村高，西村高を東高，中高，西高とする．東を未知数とする．

$$中 = 東 + 只 \quad \therefore \quad 中高 = \frac{東 + 只}{別}$$

$$西 = 中 + 又 \quad \therefore \quad 西高 = \frac{中 + 又}{別}$$

$$\frac{中}{西高} - 重 = \frac{東}{中高}$$

$$\frac{東 + 只}{\dfrac{東 + 只 + 又}{別}} - 重 = \frac{東}{\dfrac{東 + 只}{別}}$$

分母を払って，東で整理すると

$$重東^2 + (別又 + 2\,重只 + 又重 - 別只)\,東 + 重只^2 + 重只又 - 別只^2 = 0$$

〈此式直に例の如く実廉相乗して東村取米を得るといへども迂遠なる故に，原式を見て目算して商に $-只$ ，此の如く立て是をひらき変商をもとむる事左のごとし.〉
$東 + 只 = X$ として

$$重\,X^2 + (別又 + 又重 - 別只)X - 別又只 = 0$$

$$X^2 - \left(\frac{(只 - 又)\,別}{重} - 又\right)X - \frac{別又只}{重} = 0$$

$甲 = \dfrac{別}{重}$, $乙 = \dfrac{(只 - 又)\,甲}{2} - \dfrac{又}{2}$ とおく

$$X^2 - 2\,乙\,X - 甲又只 = 0$$

$$\therefore \quad X = 乙 + \sqrt{乙^2 + 甲又只}$$

$$\therefore \quad 東 = X - 只 = 乙 + \sqrt{乙^2 + 甲又只} - 只$$

$\boxed{93}$ 東西の村あり．東村取米四十五石, 西村取米三十二石．只云西村高東村厘相乗して得る内東村高西村厘相乗して得る数を減じ余四石．又云東村厘を以西村取米を除く高より西村厘を以東村取米を除く高は多き事四十八石五斗．各何ほどと問.
答曰　東村高九十石　同厘五ツ
西村高八十石　同厘四ツ
術曰 $甲 = 只 \div 2 = 2$

$$\sqrt{東西 + 甲^2} = 38$$

$$(38 + 甲) \div 西 = 1.25$$

$$1.25 \times 東 - 西 = 24.25$$

$$24.25 \div 又 = 0.5 = 東村厘$$

【術解】東村厘 $= x$, 西村厘 $= y$，東村取米 $=$ 東，西村取米 $=$ 西 とする．

$$\begin{cases} \dfrac{西}{y}x - \dfrac{東}{x}y = 只 \\ \dfrac{西}{x} + 又 = \dfrac{東}{y} \end{cases}$$

y を消して

$$西又^2x^2 + (2\,西^2 - 只東)\,又\,x + 西^3 - 只東西 - 東^3 = 0$$

又 $x = X$ とおく　〈逐下又云を省き〉

$$西\,X^2 + (2\,西^2 - 只東)X + 西^3 - 只東西 - 東^3 = 0$$

この解 $-$西 とみて

$$西\,(X + 西)^2 - 只東\,(X + 西) - 東^3 = 0$$

$$\therefore \quad X + 西 = \frac{甲 + \sqrt{甲 + 東西}}{西}東$$

$$\therefore \quad x = \left(\frac{甲 + \sqrt{甲 + 東西}}{西}東 - 西\right)\frac{1}{又}$$

$\boxed{94}$ 大小の村あり．取米和して百七十五石．只云大村高大村厘和して百五十石五斗．又云小村高小村厘大村厘和して百廿六石三斗．別云小村高より小村厘は少事百廿四石二斗．各何ほどと問．
答曰　小村高百二十五石　同取米百石　同厘八ツ
術曰 又 $-$ 別 $= 2.1 =$ 甲

$$(只 - 甲) \times 甲 = 311.64$$

$$(311.64 - 175) \times 3 = 409.92 = 乙$$

$$(3\,甲 + 又) \div 2 = 66.3$$

$$只 - 66.3 = 84.2 = 丙$$

$$\sqrt{丙^2 + 乙} - 丙 = 2.4$$

$$2.4 \div 3 = 0.8 = 小村厘$$

【術解】大村取高 $=$ 大，小村取高 $=$ 小，大村厘 $= x$，小村厘 $= y$ とする．小村厘を未知数とする．

$$\begin{cases} 大\,x + 小\,y = 175 \\ 大 + x = 只 \\ 小 + y + x = 又 \\ 小 - 別 = y \end{cases}$$

大，小，x を消して

$$3y^2-(4\,又-3\,別-2\,只)y-只\,(又-別)-(又-別)^2-175=0$$

$又-別=甲$ と置くと

$$3y^2+(-3\,甲-又+2\,只)y-只甲-甲^2-175=0$$

$3y=Y$，$丙=-\dfrac{3}{2}甲-\dfrac{又}{2}+只$，$乙=3\,只甲-3\,甲^2-175\times 3$ とすると，

$$Y^2+2\,丙\,Y-乙=0$$

$$\therefore\quad Y=-丙+\sqrt{丙^2+乙}$$

$$\therefore\quad y=\frac{Y}{3}=\frac{-丙+\sqrt{丙^2+乙}}{3}$$

$\boxed{95}$ 銀七百三十八匁有．是を分るに人数をしらず．次第に内二割衰(おとり)に分るなり．只云始めの取銀より末の取銀は百廿二匁少し．始の取銀何程と問.

答曰　始の取銀二百五十目

術曰 $有銀-(1-0.2)\,只\div 0.2=始取銀$

【術解】初取銀を未知数とする.

$$\begin{aligned}a_1&=x\\a_2&=a_1-a_1\times 0.2\\a_3&=a_2-a_2\times 0.2\\a_4&=a_3-a_3\times 0.2\\a_5&=a_4-a_4\times 0.2\end{aligned}$$

上段積　下段積

$上段責=有銀+x-a_5$，　$下段責=(有銀-a_5)\times 0.2$

$上段責-下段責=有銀$ だから

$$有銀+x-a_5-(有銀-a_5)\times 0.2=有銀$$

$x-a_5=只$ だから

$$只-有銀\times 0.2+(x-只)\times 0.2=0$$

$$x=有銀-\frac{(1-0.2)\,只}{0.2}$$

$\boxed{96}$ 爰(ここ)に宿雪(きのふのゆき)一尺八寸四分寸之三あり．此上へ初日降増二日目解(とけ)減じ，又三日目降四日目解(とく)る．追て此の如くして降終の日降る事六寸四分寸之一．其翌日全(まつたく)雪尽(つき)たり．只云初日降る雪と二日目解る雪は相等く，夫より降る事は次第に相衰り解る事は次第に相増其差(たがひ)各内一割半也．初日降二日目解る所の等き数何ほどと問.

答曰　相等数一尺

術曰 $終雪=6\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{4}=\dfrac{乾}{后分母}$

$$乾\times 0.15=3.75=坤$$

$$宿雪=18\frac{3}{4}=\frac{75}{4}=\frac{75}{前分母}$$

$$\frac{75\times 后分母}{前分母\times 坤}=20$$

$$\sqrt{20+0.25}=\sqrt{20.25}=4.5$$

$(4.5-0.5)\times$ 坤 $=15$

$15+$ 乾 $=40$

$40\div$ 后分母 $=10=$ 相等数

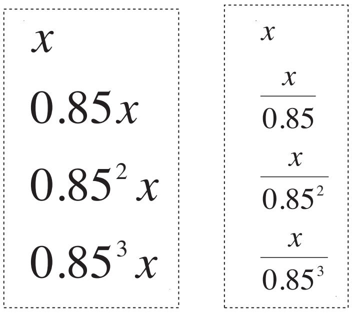
【術解】まず，$\boxed{95}$ と同様にして，降雪和を求める．相等数 $=x$ とする．割 $=0.15$

上段責 $=$ 降和 $+\,x-$ 終雪

下段責 $=$ (降和 $-$ 終雪) $\times$ 割

上段責 $-$ 下段責 $=$ 降和 だから

$$\text{降和}=\text{終雪}+\frac{x-\text{終雪}}{\text{割}}$$



降雪和　　解雪和

上の図に仍て

$$\frac{\text{降和}\times x}{\text{終雪}}=\text{解和}$$

解和 $=$ 降和 $+$ 宿雪 だから

$$\frac{\text{降和}\times x}{\text{終雪}}=\text{降和}+\text{宿雪}$$

$$\left(\text{終雪}+\frac{x-\text{終雪}}{\text{割}}\right)x=\left(\text{終雪}+\frac{x-\text{終雪}}{\text{割}}\right)\text{終雪}+\text{宿雪}\times\text{終雪}$$

$$\frac{x^2}{\text{割}}+\left(\text{終雪}-\frac{2\,\text{終雪}}{\text{割}}\right)x+\frac{\text{終雪}^2}{\text{割}}-\text{終雪}^2-\text{宿雪}\times\text{終雪}=0$$

この解を終雪とみて $X=x-$ 終 として，

$$\frac{1}{\text{割}}X^2+\text{終}\,X-\text{宿}\times\text{終}=0$$

$$\text{終雪}=\frac{25}{4}=\frac{\text{乾}}{\text{后分母}}$$

$$\text{宿雪}=\frac{75}{4}=\frac{\text{天}}{\text{前分母}}$$

とする．$X = x - \dfrac{乾}{后母}$ で

$$\frac{1}{割}X^2 + \frac{乾}{后分母}X - \frac{天\cdot乾}{前母\cdot后母} = 0$$

$$\frac{后母^2}{割}X^2 + 乾\cdot后母\,X - \frac{天\cdot乾\cdot后母}{前母} = 0$$

后母 $X = Y =$ 后母 $x -$ 乾 とする

$$\frac{1}{割}Y^2 + 乾\,Y - \frac{天\cdot乾\cdot后母}{前母} = 0$$

乾で割って

$$\frac{1}{乾\cdot割}Y^2 + Y - \frac{天\cdot后母}{前母} = 0$$

乾 $\cdot$ 割 $=$ 坤 とする

$$\frac{1}{坤}Y^2 + Y - \frac{天\cdot后母}{前母} = 0$$

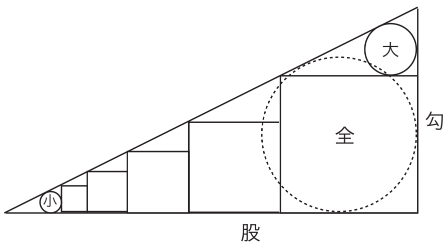
$$\therefore \quad Y = \left(-0.5 + \sqrt{0.25 + \frac{天\cdot后母}{坤\cdot前母}}\right)坤$$

$$因りて \quad x = \frac{Y + 乾}{后母}$$

故に本術の如し．

【注】『算法点竄指南録』の不都合な算題について，小寺 裕，『数学史研究』通巻 215 号，日本数学史学会，2013 参照

$\boxed{97}$ 鈎股の内に図の如く大小と方を累容るあり．其方面段数をしらず．仮に方面五ヶを画．只云勾一百九十二寸，股三百二十寸．又云方積和して二万二十五寸．全円径を以大小円径和を除き得る数何程と問．



答曰七分六厘五毛六絲二忽五微

術曰 勾 $+$ 股 $= 512 =$ 甲

$$甲 \div 股 = 1.6$$

$$1.6 \times 1.6 = 2.56$$

$$(2.56 - 1) \times 20025 = 31239$$

$$\sqrt{192^2 - 31239} = 75$$

$75 \div 192 = 0.390625 = 乙$

$\dfrac{勾}{甲} + 乙 = 0.765625$

【術解】

$率 = \dfrac{股}{勾 + 股}$

$積和 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + 末^2 = {a_1}^2 + {a_1}^2率^2 + {a_2}^2率^2 + {a_3}^2率^2 + {a_4}^2率^2$

だから

$$\frac{積和}{率^2} = \frac{{a_1}^2}{率^2} + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 = \frac{{a_1}^2}{率^2} + 積和 - 末^2$$

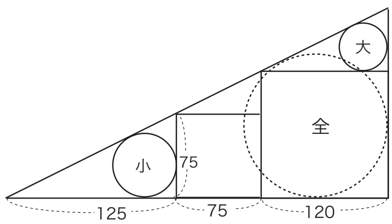
$$末^2 = 積和 - \frac{積和}{率^2} + \frac{{a_1}^2}{率^2} = 積和 - 積和\left(\frac{勾+股}{股}\right)^2 + 勾^2$$
$$= 勾^2 - (1.6^2 - 1)\,積和 = 192^2 - (1 - 2.56) \times 200025 = 5625$$

$\therefore \quad 末 = \sqrt{5625} = 75$

$\dfrac{大}{{a_1}^2} = \dfrac{全}{股}, \quad \dfrac{小}{末} = \dfrac{全}{勾}$ より

$\dfrac{大 + 小}{全} = \dfrac{勾}{勾 + 股} + \dfrac{末}{勾}$

実際はこんな図になる．率 $= \dfrac{5}{8}$



$\dfrac{大}{120} = \dfrac{小}{125} = \dfrac{全}{320}$

$\therefore \quad \dfrac{大 + 小}{全} = \dfrac{120}{320} + \dfrac{125}{320} = \dfrac{245}{320} = 0.765625$

$\boxed{98}$ 甲乙の人に金を貸あり．各元金高をしらず．只云甲は一ヶ年金百両に付利金拾六両一分なり．乙は一ヶ月金百両に付利金一両永二十五文也．但利に利をくわへず．三ヶ年目に元利のこらず是を取に，甲の元金に乙の利金を加へたる数と乙の元金に甲の利金を加へたる数と同じ．甲乙元金各いかほどと問．但甲乙元金各両に止り不尽なし．

答曰甲元金一千二百六十二両，乙元金一千二十五両

術曰 甲利 $(6.25) \times 3 = 48.75$

$100 - 48.75 = 51.25 :=$ 汎乙元金

$乙利\ (1.025) \times 36 = 36.9$

$100 - 36.9 = 63.1 := 汎甲元金$

汎数二位互減して等数 0.05 を得る．(51.25 と 63.1 の等数は 0.05)

$甲元金 = 63.1 \div 0.05 = 1262$

$乙元金 = 51.25 \div 0.05 = 1025$

【術解】

$$\frac{甲 \times 6.25 \times 3}{100} + 乙 = \frac{乙 \times 1.025 \times 36}{100} + 甲$$

$(100 - 48.75)\ 甲 = (100 - 36.9)\ 乙$

$51.25\ 甲 = 61.3\ 乙$

等数の求め方

$63.1 \div 51.25 = 1 \because 11.85$

$51.25 \div 11.85 = 4 \because 3.85$

$11.85 \div 3.85 = 3 \because 0.3$

$3.85 \div 0.3 = 12 \because 0.25$

$0.3 \div 0.25 = 1 \because 0.05$

$0.25 \div 0.05 = 5 \because 0$

よって，0.05 が等数.

$$\frac{51.25\ 甲}{0.05} = \frac{61.3\ 乙}{0.05}$$

$1025\ 甲 = 1262\ 乙$

$\therefore \quad 甲 = 1262,\ 乙 = 1025$

【番外　遍約術解】
たとえは甲乙の両数あるを互減して等数を求め，其等数を以甲及乙を割定甲乙を求る是を遍約と云なり.
たとえは八ヶと一十ヶと遍約していか程と問.
答曰　八を四とし，一十を五とす.

$10 \div 8 \because 2 := 甲$

$8 \div 甲 \because 0$

故に甲二ヶを以等数とす．

$$8 \div 等数 = 4$$

$$10 \div 等数 = 5$$

48，72，108，128 を遍約して何程と問
48 を 12 とし，72 を 18 とし，108 を 27 とし，128 を 32 とす．

$$128 \div 108 \because 20 := 甲$$

$$108 \div 甲 \because 8 := 乙$$

$$甲 \div 乙 \because 4 := 丙$$

$$乙 \div 丙 \because 0$$

$$72 \div 丙 \because 0$$

$$48 \div 丙 \because 0$$

故に 丙 $= 4$ を等数とする．

$$48 \div 等数 = 12$$

$$72 \div 等数 = 18$$

$$108 \div 等数 = 27$$

$$128 \div 等数 = 32$$

此他是をりやくす．此理を推てしるへし．又少数より約すこと同し．人々心の知る所に従ふべし．

$\boxed{99}$ 爰に鼠あり．其数をしらず．只云親鼠二疋に付春十二疋づつ子をうむ．又其親子ともに夏十二疋づつ子をうむ．又其親子ともに秋十二疋づつ子をうむ．又其親子ともに冬十二疋づつ子をうむ．拘此惣鼠十疋にて一日に米一合づつをくらふに三斗五升俵にして端米なしと云．各何ほどと問．
答曰春の親鼠五百疋，惣鼠数一百二十万五百疋，一日の米三百四十三俵
鼠数 $= x$, 俵数 $= y$ として

$$\left(1 + \frac{12}{2}\right)^4 = 2401$$

$$2401 \div 10 = 240.1$$

$$240.1x = 350y$$

240.1 と 350 の等数は 0.7

$$y = 240.1 \div 0.7 = 343$$

$$x = 350 \div 0.7 = 500$$

$\boxed{100}$ 上米一斗八升，下米三斗各代銀ならし一升に付銀八分．但上下米おのおの一升の代銀厘にとどまり不尽なし．各一升の代銀なにほどと問．

答曰　第一　上米一升の代銀八分五厘　下米一升の代銀七分七厘

　　　第二　上米一升の代銀九分　　　下米の代銀七分四厘

　　　第三　上米一升の代銀九分五厘　下米一升の代銀七分一厘

　　　外是をりゃくす．

術曰上米と下米を互減して等数 六ヶ を得る．是を以上下の米を割，上米 三ヶと成 減数とす．下米 五ヶと成 加数とす．平均の銀を置 題に随て厘位を以一の位とす 加数を累加して上米一升の代銀とす．又ならしの銀を置 位前のごとく 内減数を累減して下米一升の代銀とす．

【術解】上米，下米一升の代銀を各々 x，y とする．

$$18x+30y=80\times(18+30)$$

$$18(x-80)=30(80-y)$$

18 と 30 の等数 6 で割って

$$3(x-80)=5(80-y)\qquad\langle 3=\text{減数},\ 5=\text{加数}\rangle$$

$$\therefore\quad x-80=5k,\ 80-y=3k$$

$$x=5k+80,\ y=80-3k\qquad\langle\text{平均の銀 80 を置，加数 5 を累加す．(減数 3 を累減す)}\rangle$$

$$k=1\text{ のとき }x=85,\ y=77$$

$$k=2\text{ のとき }x=90,\ y=74$$

$$k=3\text{ のとき }x=95,\ y=71$$

ほかこれを略す

$\boxed{101}$ 東西の蔵に米あり．各俵数をしらず．両蔵より運所の俵数合て一万俵に近し．東は道法五里，人夫二百三十二人．西は道法三里，人夫百五十三人．但東西一人前の賃銀ひとし．東西よりはこび来る俵数何ほどと問．

答曰　東蔵よりの出米四千六百四十俵　　西蔵よりの出米五千百俵．

術曰東の道法を置，西の人夫を掛 七六五ヶとなり 西蔵汎出米とす．西の道法を置，東の人夫を掛 六九六ヶとなる 東蔵汎出米とす．両汎数互減して等数 三ヶ を得る．是を以汎数を割，西蔵再汎数 二五五ヶ 東蔵再汎数 二三二ヶ を得る．再汎数二位相併 四八七ヶとなる を以一万俵を割 二〇ヶ を得る．不尽常にすつべし 是を以再汎数にかけ定数とす．

【術解】東西よりはこび来る俵数を各々 x，y とする．東西一人前の賃金が等しいことより，

$$\frac{5x}{232}=\frac{3y}{153}$$

$$5\times153x=3\times232y$$

$$765x=696y$$

等数 3 で割って

$$255x = 232y$$

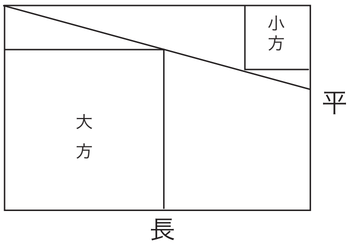
$$x = 232k,\ y = 255k$$

$$232 + 255 = 487$$

$$10000 \div 487 = 20.\cdots$$

$$x = 232 \times 20 = 4640,\ y = 255 \times 20 = 5100$$

$\boxed{102}$ 直の内に図のごとく斜を隔て大小の方を容るあり．只云長五十一寸，小方面九寸，大方面および平各いかほどと問．但各寸位にとどまる



答曰　大方面一十四寸　平一十七寸
術曰長を置 五一ケ 汎平とす．此内小方面を減じ余 四二ケ 汎大方面とす．互減して等数 三ケ を得る．是を以汎数を割定数とす．
【術解】平 × 長 = 大 × 長 + 小 × 平 より

$$51\,平 = 51\,大 + 9\,平$$

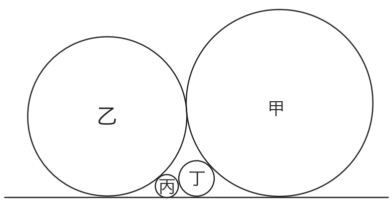
$$51\,大 = 42\,横 \qquad \langle 51 = 汎平,\ 42 = 汎大方面\rangle$$

等数 3 で割って

$$17\,大 = 14\,横$$

$$大 = 14,\ 平 = 17$$

$\boxed{103}$ 直線の上に図の如く四円を載るあり．只云甲円径二十五寸，丙円径一寸．乙丁円径各いかほどと問．
但各寸位にとどまり



答曰　乙円径九寸　丁円径四寸

術曰丙円径を置，甲円径にて割 ○ヶ○四となる 平方に開き ○ヶ二 天といふ．是に一ヶを加へ 一ヶ二と成 是を掛合 一ヶ四四となる 汎乙円径とす．一ヶを置内天を減じ余 ○ヶ八 これを掛あわせ ○ヶ六四となる 汎丁円径とす．汎数二位互減して等数 ○ヶ一六 を得る．是を以汎数を割定数とす．

【術解】$\sqrt{乙丙}+\sqrt{丙丁}+\sqrt{丁甲}=\sqrt{甲乙}$ より

$$\sqrt{乙}\sqrt{\frac{丙}{甲}}+\sqrt{丁}\sqrt{\frac{丙}{甲}}+\sqrt{丁}=\sqrt{乙}$$

$$天=\sqrt{\frac{丙}{甲}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=0.2$$

$$0.2\sqrt{乙}+0.2\sqrt{丁}+\sqrt{丁}=\sqrt{乙}$$

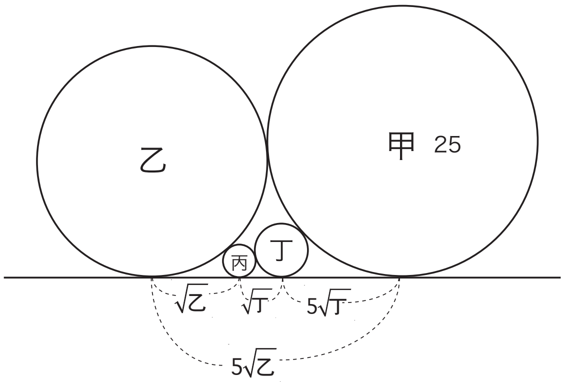
$$1.2\sqrt{丁}=0.8\sqrt{乙}$$

$$1.44\,丁=0.64\,乙$$

等数 0.16 で割って

$$9\,丁=4\,乙$$

$$乙=9,\ 丁=4$$



$\boxed{104}$ 方堡壔あり．図のごとく方面高内斜おのおの奇零なき数を求る術いかんと問．答曰左のごとし

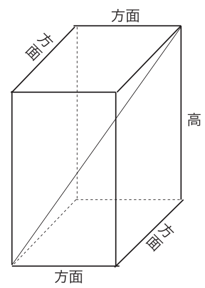
方面二寸　高一寸　内斜三寸

方面四寸　高七寸　内斜九寸

方面六寸　高七寸　内斜十一寸

此余是をりやくす．

術曰方面を置 随意に是を設く 是を掛合折半して自約術に仍て左右数を求め多き内少を減じ余高とす．左右数相併て内斜とす．



$$2\,方^2+高^2=内^2$$

$$4\,左右 + (左 - 右)^2 = (左 + 右)^2$$

$内 = 左 + 右$, $高 = 左 - 右$ とおくと

$$左 = \frac{内 + 高}{2},\ 右 = \frac{内 - 高}{2}$$

$$左右 = \frac{方^2}{2}$$

仮に方面三寸を設て諸数を求め術是を示す．方面三寸を掛合て九ヶ折半して四ヶ五と成．自約実とす．

$$左右 = \frac{3^2}{2} = 4.5$$

左	右	高級	内斜級
1	4.5	3.5	5.5
2	2.25	0.25	4.25
3	1.5	1.5	4.5
4	1.125	2.125	5.125
5	0.9	4.1	5.9

逐て此の如く際限なく整数を問故割きれざる数は用へからず．但方面を設るに奇数を用る時は分位に下る．分位下る事を嫌はば方面に偶数を用べし．自約術と云は此の如く相乗したる数を還源して分る時用る術なり．

105 金一両に付八斗替の米を買，代銀二十三貫二百七十二匁五分也．其石高及び銀相場をしらず．又年利一割三分にて金を貸，利銀九百四十二匁五分あり．其元金及び銀相場を知らず 但銀相場各ひとし 銀相場，米石高，元金各何ほどと問． 但米は石に止り金は両にとどまる

答曰米三百二十一石　元金百二十五両　銀相場五十八匁

術曰利銀を置，年利にて割 七二五〇と成 自約術に仍て 右一二五ヶ左五八ヶ を得る．右を以元金とす．左を以銀相場とす．是を以米代銀を割 四〇一ヶ二五となる 米相場をかけ 三二一ヶとなる 米石高とす．

【術解】$銀相場 = 銀$, $米石高 = 米$, $元金 = 元$ とする．

$$\frac{米}{0.8} \times 銀 = 23272.5$$

$$元 \times 0.13 \times 銀 = 942.5$$

$$元 \times 銀 = 942.5 \div 0.13 = 7250 = 58 \times 125 = 左 \times 右$$

$$\text{よって}\quad 左 = 58 = 銀相場,\ 右 = 125 = 元金$$

通用銀相場六十目内外と見るゆへ五十目より七十目迄の間を自約して是を試るに此数の外題にかなふ者なし．

106 田畑あり．只云反別合て九町二反三畝あり．又云田石盛より畑石盛は下る事二ツ．重云田高より畑高は少事二十九石八斗一升なり．各いかほどと問． 但反別は畝に止り石盛は一ツの位に止る

答曰田反別五町三反五畝　田石盛十五

　畑反別三町八反八畝　畑石盛十三

術曰只云を置，是を半して 四六ヶ一五 甲と云．是に又云を掛 九ヶ二三となる を以重云を減じ余 二〇ヶ五八と成 是を自約して 右七ヶ三五左二ヶ八 を得る．左に又云を加へ 三ヶ 折半して 一ヶ五と成 田石盛とす．此内又云を減じ余 一ヶ三となる 畑石盛とす．右に甲を加へ 五三ヶ五となる 田反別とす．

【術解】田反別 $= x$, 田石盛 $= p$ とする．

$$xp = (923 - x)(p - 2) + 2981$$

$$xp = 923p - 923 \times 2 - xp + 2x + 2981$$

$$\left(x - \frac{923}{2}\right)(2p - 2) = 2058 \cdots ①$$

2058 を自約して 73.5×28

$$2p - 2 = 28 \quad より \quad p = 15$$

$$x - \frac{923}{2} = 73.5 \quad より \quad x = 535$$

① の解は他にもある．$2058 = 2 \cdot 3 \cdot 7^3$ たとえば

$$p = 7,\ x = 633$$

このときは 田石盛 $= 7$, 畑石盛 $= 5$ となり，現実と合わない．石盛は通常 15 前後．

(石盛は 1 反あたりの石高)

此の自約数は品々ありといへども或は反に止り，或は畝以下に至て題ごとに省く．

$\boxed{107}$ 爰に実数 八万一千〇四十一ヶ と法数 一百六十六ヶ とあり．加数 一十三ヶ を以ひとしく実法に累加して是を除(わる)に不尽なし．累加段数何程と問．

答曰累加段数十八　商二百〇三個一分八厘七毛五糸

又　累加段数三十七　商百二十六

術曰実数を置，内法数を減じ余 八〇八七五ヶとなる 是を自約して 右二〇二ヶ一八七五左四〇〇ヶ 又 右一二五ヶ左六四七ヶ を得る．左の内法数を減じ余 二二四ヶ四八一ヶ とを得る．各加数にて割 一八ヶ三七ヶ とを得る．各累加段数とす．

【術解】

$$\frac{81041 + 13k}{166 + 13k} = \ell$$

$$81041 + 13k = 166\ell + 13k\ell$$

$$13k\ell + 166\ell - 13k = 81041$$

$$(13k + 166)(\ell - 1) = 80875$$

80875 を自約して 400×202.1875 又 647×125

$$13k + 166 = 400,\ k = 18,\ \ell = 203.1875$$

$$13k + 166 = 647,\ k = 37,\ \ell = 126$$

$\boxed{108}$ 南北の関守あり．惣人数二万五人．只云南の番頭より北の番頭は少事八人．又云南の番頭一組の人数より北の番頭一組の人数は少事八十五人也．各何ほどと問．

答曰　第一

　　南番頭九人　南一組二千八人

　　北番頭一人　北一組一千九百二十三人

　　第二

　　南番頭十三人　南一組一千百三十四人

　　北番頭五人　北一組一千四十九人

　　第三

　　南番頭十九人　南一組六百九十七人

　　北番頭十一人　北一組六百十二人

此余是をりやくす

術曰只云を置折半して 四ヶとなる 天と云．又云をかけ 三四〇ヶとなる 是を以惣人数をげんじ余 一九六六五ヶと成 是を自約して 多三九三三ヶ少五ヶ 又 二一八五ヶ九ヶ 又 一三一一ヶ一五ヶ 他是を署す．天を置少を加へ南番頭とす．又云を置，多を加へ折半して内一ヶを減じ余南一組の人数とす．

【術解】北番頭 $= z$, 南番頭 $= w$, 北一組 $= a$, 南一組 $= b$ とする，$z = w - 8$, $a = b - 85$

$$az + bw + z + w = 20005$$

$$(b - 85)(w - 8) + bw + w - 8 + w = 20005$$

$$2bw - 8b - 83w + 672 = 20005$$

$$(w - 4)(2b - 83) = 19665$$

19665 を自約して $3933 \cdot 5$, $2185 \cdot 9$, $1311 \cdot 15$　　$(19665 = 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23)$

$$w - 4 = \text{少},\ 2b - 83 = \text{多}$$

$$w = \text{少} + \frac{\text{只}}{2},\ b = \frac{\text{多} + \text{又}}{2} - 1$$

$\boxed{109}$ 原数一千四百ヶあり．是に因方を乗じて平方に開き不尽なし．其因方いかほどと問．

答曰因方十四

術曰原数を置，是を自約して 二ヶ三次五ヶ二次七ヶ一次を得る 次数奇数の者 二ヶ七ヶ 相乗して 一四ヶと成 因方とす．

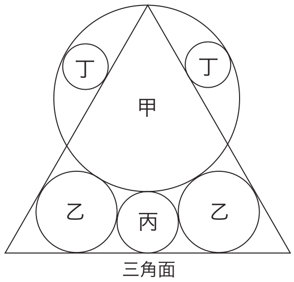
【術解】原数を自約して $1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ これ補数 2×7 を補い　$4^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ この如く冪数を得る也．故に補数 2×7 を相乗じて 14 を得る．是を以て因方とす．故に本術の如し．

初学のために別数を役て術遣を詳にす．たとへば原数 13500 ヶあり．因方を乗じ平方に開き不尽なし．其因方を問ときは，因方 15 ヶと云．其解次の如し．

故原数を置是を自約して 二ヶ二次三ヶ三次五ヶ三次を得る 次数奇数の者 三ヶ五ヶ 相乗じて 一五ヶと成る 因方とす．

此他此理を推てしるべし．算題辞に因方を乗じ，立方に開き不尽なき数を問ときは各次数三次づつになるやうに補ふべし．

$\boxed{110}$ 三角内外に図の如く六円を容るあり．只云乙円径十六寸．甲丙丁円径各いかほどと問．



答曰甲円径三十六寸　丙円径十二寸　丁円径九寸

術曰 $丙 = 乙 \times 0.75 = 12$, $丁 = 丙 \times 0.75 = 9$, $甲 = 丁 \times 4 = 36$

【術解】

$$\left(\frac{甲}{2} + \frac{乙}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{乙丙}\right)^2 + \left(\frac{甲}{2} + 丙 - \frac{乙}{2}\right)^2$$

$$丙^2 - 甲乙 + 甲丙 = 0 \cdots 前式$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}乙 + \sqrt{乙丙}\right) : 甲 + 丙 = 1 : \sqrt{3}$$

$$甲 + 乙 = \frac{3}{2}乙 + \sqrt{3\ 乙丙} \cdots 後式$$

前式，後式より甲を消去して $X = \sqrt{丙}$ とすると

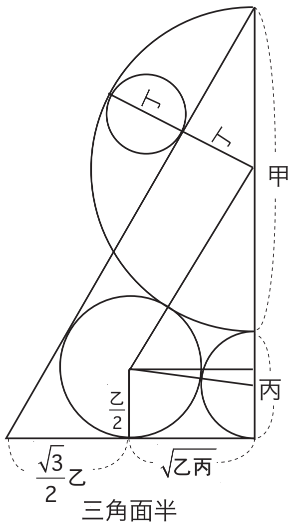
$$2\sqrt{3}X^2 + 5\sqrt{乙}X^2 - 2\sqrt{3}乙\ X - 3\sqrt{乙}乙 = 0$$

$$\left(X + \sqrt{3\ 乙}\right)\left(2\sqrt{3}X^2 - \sqrt{乙}X - \sqrt{3}乙\right) = 0$$

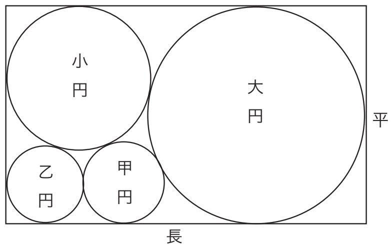
$$\left(X + \sqrt{3\ 乙}\right)\left(2X - \sqrt{3\ 乙}\right)\left(\sqrt{3}X + \sqrt{乙}\right) = 0$$

$$\therefore \quad X = \frac{\sqrt{3\ 乙}}{2}$$

$$\therefore \quad 丙 = \frac{3}{4}乙$$

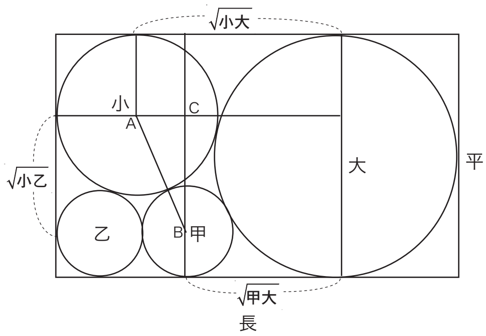


$\boxed{111}$ 直の内に図の如く四円を容る有．只云大円径三寸，小円径いか程と問．



答曰小円径二寸余

術曰 天 $=\sqrt{2}-1$, 小 $=\left(\dfrac{\sqrt{天^2+8}+天}{4}\right)^2$ 大 $=2.00$ 余



直角三角形 ABC において

$$\left(\frac{甲}{2}+\frac{小}{2}\right)^2=(\sqrt{大小}-\sqrt{甲大})^2+\left(大-\frac{小}{2}-\frac{甲}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad 大=2\sqrt{小甲}$$

$$\therefore\quad \sqrt{甲}=\frac{大}{2\sqrt{小}}\cdots ①$$

$$大=\frac{小}{2}+\sqrt{小乙}+\frac{乙}{2}=\left(\frac{\sqrt{小}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{乙}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{乙}=\sqrt{2\,大}-\sqrt{小}\cdots ②$$

長を 2 通りで書いて

$$長=\frac{小}{2}+\sqrt{大小}+\frac{大}{2}=\frac{乙}{2}+\sqrt{甲乙}+\sqrt{甲大}+\frac{大}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{小}{2}+\sqrt{大小}=\frac{乙}{2}+\sqrt{甲乙}+\sqrt{甲大}\cdots ③$$

③ に① ② を代入して

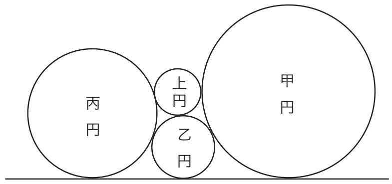
$$2(\sqrt{2}+1)\,小-\sqrt{大}\sqrt{小}-(\sqrt{2}+1)\,大=0$$

天 $=\sqrt{2}-1$ をかけて

$$2\,小-天\sqrt{大}\sqrt{小}-大=0$$

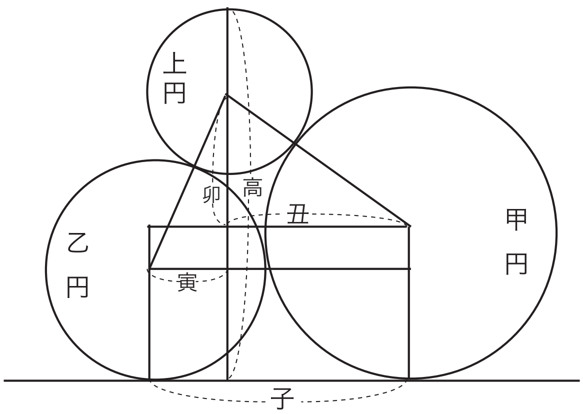
$$\therefore\quad \sqrt{小}=\frac{天+\sqrt{天^2+8}}{4}\sqrt{大}$$

$\boxed{112}$ 直線の上に図の如く四円を載る有．只云甲円径二十寸，乙円径四寸，丙円径五寸．上円径何ほどと問．



答曰上円径三寸

術曰 $天 = 乙\sqrt{\dfrac{甲}{丙}}$，$地 = (天 + 乙)^2$，$上円径 = \dfrac{地}{4(甲 - 天)}$



$天 = 丑 - 寅$ とする．$子 = \sqrt{甲乙}$，$丑 = \dfrac{\sqrt{甲乙}}{2} + \dfrac{天}{2}$，$寅 = \dfrac{\sqrt{甲乙}}{2} - \dfrac{天}{2}$，$卯 = 高 - \dfrac{上}{2} - \dfrac{甲}{2}$

$卯^2 + 丑^2 = \left(\dfrac{上}{2} + \dfrac{甲}{2}\right)^2$ へ代入して

$$天^2 + 2\sqrt{甲乙}天 + 4\,高^2 - 4\,高上 - 4\,高甲 + 甲乙 = 0 \cdots 前空数$$

これを対換して (甲と乙を入れ替えて)

$$天^2 - 2\sqrt{甲乙}天 + 4\,高^2 - 4\,高上 - 4\,高乙 + 甲乙 = 0 \cdots 後空数$$

前空数 − 後空数 より

$$\sqrt{甲乙}天 - 高甲 + 高乙 = 0 \cdots 定后空数$$

これを倍して前空数を減じ

$$天^2 + 4\,高^2 - 4\,高上 - 2\,高甲 - 2\,高乙 + 甲乙 = 0 \cdots 定前空数$$

定前空数と定后空数より天を消去して

$$乙^2甲^2 - 4\,上乙甲高 - 2\,乙^2甲高 - 2\,乙甲^2高 + 乙^2高^2 + 2\,乙甲高^2 + 甲^2高^2 = 0 \cdots 乾$$

これを対換して

$$乙^2丙^2 - 4\,上乙丙高 - 2\,丙^2乙高 - 2\,丙乙^2高 + 丙^2高^2 + 2\,乙丙高^2 + 乙^2高^2 = 0 \cdots 坤$$

乾坤より高を消去して

$$丙^2乙^4 - 2\,丙乙^4甲 + 乙^4甲^2 + 上\,(-8\,丙^2乙^2甲 - 16\,丙乙^3甲 - 8\,丙乙^2甲^2) + 上^2(-16\,丙乙^2甲 + 16\,丙^2甲^2) = 0$$

$$(甲+丙)^2乙^4 - 8(甲+丙)\,甲乙^2丙上 + 16\,甲^2丙^2上^2 = 4\,甲乙^4丙 + 16\,甲乙^3丙上 + 16\,甲乙^2丙上^2$$

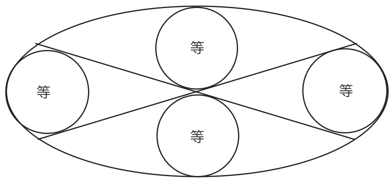
両式平方に開き

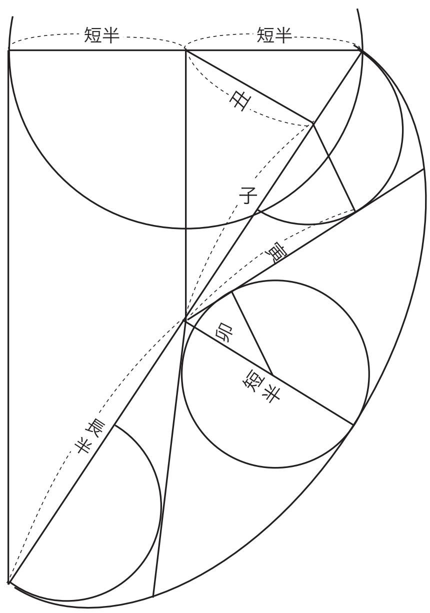
$$-(甲+丙)\,乙^2 + 4\,甲丙上 = 2\sqrt{甲}\sqrt{丙}乙^2 + 4\sqrt{甲}\sqrt{丙}乙上$$

$$4(甲丙 - \sqrt{甲}\sqrt{丙}乙)\,上 = (甲 + 2\sqrt{甲}\sqrt{丙} + 丙)\,乙^2$$

$$\therefore\quad 上 = \frac{\left(乙\sqrt{\dfrac{甲}{丙}} + 乙\right)^2}{4\left(甲 - 乙\sqrt{\dfrac{甲}{丙}}\right)}$$

$\boxed{113}$ 側円の内に図の如く斜を隔て四等円を容る有．只云側円短径三十九寸，最大なる等円径いか程と問．





円柱の内へ二球を押入斜にきる図

答曰　等円径一十九寸余

術曰 等円径 $= x$ とする． $x^2(x + 短)^2 = 短^2(短^2 - 2x^2)$

$$-短^4 + 3\,短^2x^2 + 2\,短\,x^3 + x^4 = 0$$

を解く．

【術解】 $\dfrac{短}{2} : \dfrac{長}{2} = \dfrac{等}{2} : \dfrac{短}{2}$ より 長 $= \dfrac{短^2}{等}$

$$子 = \frac{長 - 等}{2} = \frac{短^2}{2\,等} - \frac{等}{2} = \frac{(短 - 等)(短 + 等)}{2\,等}$$

卯 $= \dfrac{短 - 等}{2}$，卯 : $\dfrac{等}{2}$ = 子 : 寅 より 寅 $= \dfrac{短 + 等}{2}$

$寅^2 + \left(\dfrac{等}{2}\right)^2 = 子^2$ へ代入して

$$-短^4 + 3\,短^2x^2 + 2\,短\,x^3 + x^4 = 0$$

$$-2313441 + 4563x^2 + 78x^3 + x^4 = 0$$

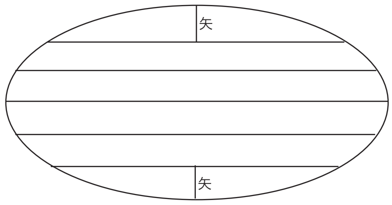
$x = -35.03117518632765 - 57.37283849963795i$

$x = -35.03117518632765 + 57.37283849963795i$

$x = -26.940716163074526$

$x = 19.00306653572984$

$\boxed{114}$ 長立円あり．図の如く積等分に是をきる．仮に六段にきるかたちをえがく．只云短径若干．其截数にしたがつて矢を得る術いかんを問.



答曰左のごとし

術曰 矢 $= x$ とする．$(3\,短 - 2x)x^2 n = 短^3 \quad (n = 截数)$

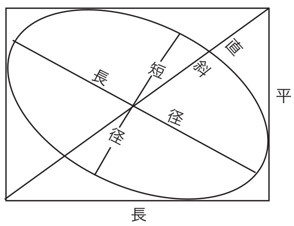
【術解】球欠積 $= \left(\dfrac{弦^2矢}{4} + 矢^3\right)\dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{長}{短}$ を掛けて

$$等積 = \left(\frac{3\,弦^2矢長}{4\,短} + \frac{矢^3長}{短}\right)\frac{\pi}{6}$$

一方 等積 $= \dfrac{短^2長}{n}\dfrac{\pi}{6}$，径矢弦の術 $弦^2 = 4\,矢短 - 4\,矢^2$ より術文の開方式が得られる.

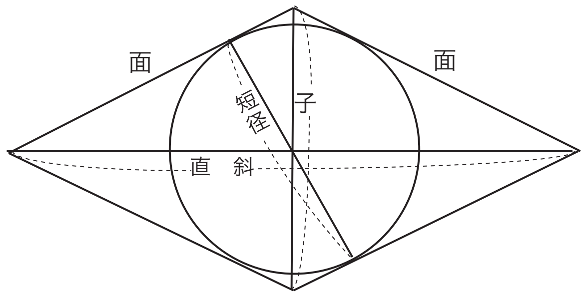
$\boxed{115}$ 直の内に図の如く側円を容る有．只云直斜五寸，側円長径四寸，側円短径何ほどと問.



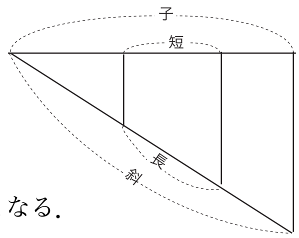
答曰短径三寸

術曰　短径 $= \sqrt{斜^2 - 長^2}$

【術解】菱の箱へ円擣を押入て斜に載時は題図の如くなる也.



短径 $= x$ とする．長 : 直斜 = 短 : 子 より 子 $= \dfrac{x \cdot 直斜}{長}$



短 : 子 $= \dfrac{直斜}{2}$: 面 より 2 面 $= \dfrac{直斜^2}{長}$

子^2 + 直斜$^=$4 面^2 へ代入して $x^2 = 直斜^2 - 長^2$

短^2 + 長^2 = 斜^2 だから，楕円に外接する長方形の対角線の長さは一定となる．

$\boxed{116}$ 米三十五石の代金二十八両一分余也，此相場にて今四斗三升入の米を買時，代金ならびに俵数不尽なし．各(おのおの)何程と問.

答曰　代金七両　米二十俵

又　　代金八両　米廿三俵

術曰 $\dfrac{28.25 \times 0.43}{35} = 0.34707$

代金に余有と云，故に尾数是を収て 0.348 となる. 零約術により

$$0.348 = \cfrac{1}{2(甲) + \cfrac{1}{1(乙) + \cfrac{1}{6(丙) + \cfrac{1}{1(丁) + \cfrac{1}{10(戊)}}}}}$$

$\dfrac{7}{20}$ と $\dfrac{8}{23}$ を答とする．

【術解】28 両 1 分の時は 0.3470 余を得る．28 両 2 分の時は 0.350 余を得る．

題辞に 28 両 1 分余と云ゆえ尾数を収て 0.348 を以零約実とす．十干数をもとむ．

十二支をもとむ．丑と寅との二行数を以答とす．

$$子 = \frac{乙}{乙甲 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$丑 = \frac{丙子_{〔1〕} + 1}{丙子_{〔3〕} + 甲} = \frac{7}{20}$$

$$寅 = \frac{丁丑_{〔7〕} + 子}{丁丑_{〔20〕} + 子} = \frac{8}{23}$$

$$卯 = \frac{戊寅_{〔8〕} + 丑}{戊寅_{〔23〕} + 丑} = \frac{87}{250}$$

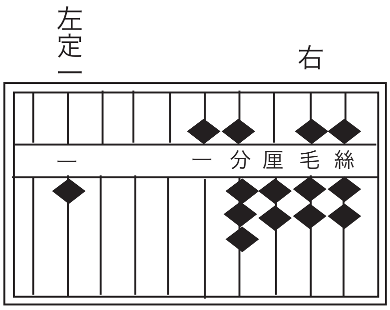
【番外　零約術解】

此零約術と云は割て得たる数を用(もつ)て元の実方数を求る法なり．其理自約術と表裏をなす．

たとえは法を以実を除得る商五ヶ八二七七余と成実方数はいか程と問．

答曰　実一千七百二十五　法二百九十六

先図の如く算を布(しく)



此の如く左右に置，扨(さて)術をはじむるには左右の列なく少数を以多数を割り初る也．得商をば次第に外(ほか)へ移し置，不尽と不尽を相互に割なり．猶委細に傍書并に合紋を以くわしく是を示す．

㊀ $\dfrac{\text{右云数}}{\text{右定一}} = \text{商 } 5(\text{甲}) + 0.8277$

㊁ $\dfrac{1}{0.8277} = 1(\text{乙}) + 0.1723$

㊂ $\dfrac{0.8277}{0.1723} = 4(\text{丙}) + 0.1385$

㊃ $\dfrac{0.1723}{0.1385} = 1(\text{丁}) + 0.0338$

㊄ $\dfrac{0.1385}{0.0338} = 4(\text{戊}) + 0.0033$

㊅ $\dfrac{0.0338}{0.0033} = 10(\text{己}) + 0.0008$

㊆ $\dfrac{0.0033}{0.0008} = 4(\text{庚}) + 0.0001$

㊇ $\dfrac{0.0008}{0.0001} = 8(\text{辛}) + 0$

左にても右にても空を得るを際(かぎり)として術を止．

又図に仍て各を得る．十二支の数は前術にて得る数也．上級下級共に同数なり．

十二支の数は今得る処の数也．上級下級各別なり．

甲 (5)	実級 (分子，乗率)	法級 (分母，除率)
乙 (1)	甲 × 乙 + 1 = 子 (6)	乙 = 子 (1)
丙 (4)	子丙 + 甲 = 丑 (29)	子丙 + 1 = 丑 (5)
丁 (1)	丑丁 + 子 = 寅 (35)	丑丁 + 子 = 寅 (6)
戊 (4)	寅戊 + 丑 = 卯 (169)	寅戊 + 丑 = 卯 (29)
己 (10)	卯己 + 寅 = 辰 (1725)	卯己 + 寅 = 辰 (296)
庚 (4)	辰庚 + 卯 = 巳 (7069)	辰庚 + 卯 = 巳 (1213)
辛 (8)	巳辛 + 辰 = 午 (58277)	巳辛 + 辰 = 午 (10000)

各上実下法の如く而(しか)も一にして得る数左のごとし．

解曰上の子を下の子にて割るなり．丑寅以下是にならへ．其割て得たる数を子商丑商と置て名つくる也．

子商	6
丑商	5.8
寅商	5.83333
卯商	5.8275862
辰商	5.8277027
巳商	5.8276999
午商	5.8277

上図の如く子商より丑商は真数に近く，丑商より寅商は真数に遠く次第に真数に合といへども一行は真数の内に成，一行は真数の外に成て次第に近づくなり．其内何れの行なりとも題にか協ふ者を用ゆ．扨此商は辰商能題辞にかなふ故辰の数を答とす．
本術文是をりやくす．

$$5.8277 = 5 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\underline{10}+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8}}}}}}}$$

子商	0.988235
丑商	0.988281
寅商	0.988269
卯商	0.988274
辰商	0.9882729
巳商	0.98827300
午商	0.988272998
未商	0.988273000
申商	0.988272999
酉商	0.98827300000
戌商	0.988273

$$0.988273 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}}}}}}}$$

$\boxed{117}$ 勾股の内に図の如く菱を容るあり．只云菱面二寸二分二厘二毛二絲余あり．此数に仍て奇零なき勾股弦を求んと欲す．各何ほどと問．
答曰　勾三寸　股四寸　弦五寸
術曰零約術によりて $2.2222\cdots = \dfrac{20}{9}$
20 を自約して 5×4
股 $= 4$，弦 $= 5$

【術解】菱面 $= \dfrac{股 \times 弦}{股 + 弦}$

【番外　剰一歉一解】

〇剰一解　盈一とも云

たとへは左十九ヶを以累加して得る数，右二十七ヶを以累減して余一ヶ．左の總数いか程と問.

答曰左總数百九十箇

不定方程式 $19x - 27y = 1$ を解くこと.

図の如く算を布

若左の数多く右の数すくなき時は左の内にて右の数を累減して右よりすくなきを得て止て其残数を定左として算をはじむるなり.

$$27 = 1(\text{甲}) \times 19 + 8$$

$$19 = 2(\text{乙}) \times 8 + 3$$

$$8 = 2(\text{丙}) \times 3 + 2$$

$$3 = 1(\text{丁}) \times 2 + 1$$

丁不尽に至(いたり)て左の方に一ヶをあます故に算を止(やむ)．若一ヶを得ざる時は前理を推(おし)て次々の干数を求むべし.

爰に於て図に仍て十二支の数をもとむ.

$$\text{子} = \text{甲乙} + 1$$

$$\text{丑} = \text{子丙} + \text{甲}$$

$$\text{寅} = \text{丑丁} + \text{子}$$

$$\text{卯} = \text{寅丙} + \text{丑}$$

$$\text{辰} = \text{卯丁} + \text{寅}$$

$$\vdots$$

十干の数丁に止る故に丁故寅に至て算を止め寅の一十ヶを以左段数とす．是に左十九ヶを懸一九〇ヶを得る左の惣数とす.

剰一術

左	右	
19	27	
8	1(甲)	
3	2(乙)	$\text{子} = \text{甲乙} + 1 = 3$
2	2(丙)	$\text{丑} = \text{子丙} + \text{甲} = 7$
1	1(丁)	$\text{寅} = \text{丑丁} + \text{子} = 10 = x$
余	商 (十干)	十二支

$ax-by=1$ を解く $(a<b)$

$$\frac{b}{a}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5}}}}$$ と展開できたとする

$$a_1=\frac{p_1}{q_1}$$

$$a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2}=\frac{p_2}{q_2}$$

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}=\frac{a_1a_2a_3+a_3+a_1}{a_2a_3+1}=\frac{p_3}{q_3},\quad p_3=a_3p_2+p_1,\ q_3=a_3q_2+q_1$$

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}=\frac{a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4}=\frac{p_4}{q_4},\quad p_4=a_4p_3+p_2,\ q_4=a_4q_3+q_2$$

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5}}}}=\frac{p_5}{q_5},\quad p_5=a_5p_4+p_3,\ q_5=a_5q_4+q_3$$

とおくと

$$p_1q_2-p_2q_1=a_1a_2-1-(a_1a_2+1)\cdot 1=-1$$

$$p_2q_3-p_3q_2=p_2(a_3q_2+q_1)-(a_3p_2+p_1)q_2=p_2q_1-p_1q_2=1$$

$$p_3q_4-p_4q_3=p_3(a_4q_3+q_2)-(a_4p_3+p_2)q_3=p_3q_2-p_2q_3=-1$$

$$p_4q_5-p_5q_4=p_4(a_5q_4+q_3)-(a_5p_4+p_3)q_4=p_4q_3-p_3q_4=1$$

よって $ap_4-bq_4=1$，すなわち $x=p_4$，$y=q_4$
本問では 子 $=p_2$，丑 $=p_3$，寅 $=p_4$

連分数展開 $\alpha_n=[a_1\ ;\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n]$ において

$$\begin{cases} p_0=1,\ p_1=a_1,\ p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2} \\ q_0=0,\ q_1=1,\ q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2} \end{cases}$$

と定めると

$$\alpha_n=\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}$$

$$p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}=(-1)^{n-1}$$

又
たとへば左一百七十九ヶを以累加して得る数右七十四ヶを以累減して余り一ヶ．左の惣数幾何を問．
答曰左惣数七千六百九十七ヶ

$179x - 74y = 1$ を解くこと．

此題の数は左多く右寡し故に左の内にて右七十四ヶを二段げんじて余三一ヶとなる．是を定左として算を起すなり．若左に一を余す時は直(じき)に左段数とす．

179	74	左の方が多いとき
31	74	ここより算を起す
12	2(甲)	
7	2(乙)	子 $=$ 甲乙 $+ 1 = 5$
5	1(丙)	丑 $=$ 子丙 $+$ 甲 $= 7$
2	1(丁)	寅 $=$ 丑丁 $+$ 子 $= 12$
1	2(戊)	卯 $=$ 寅戊 $+$ 丑 $= 31$
1	1(己)	辰 $=$ 卯己 $+$ 寅 $= 43 = x$

十干数の有かぎりは十二支の数を求る也．
此数辰に至て干数尽たり．故に辰四十三
を以左段数とす．是に左数百七十九ヶを懸
七千六百九十七ヶを得る．左の總数とす．

○歉(けん)一解　朒(じく)一ともいふ
$178x - 239y = -1$ は $239y - 178x = 1$ で
$239 = 1 \cdot 178 + 61$ として 178 と 61 より算を起こす．$(61y - 178(x - y) = 1)$
甲 $= 2$
乙 $= 1$　子 $=$ 甲乙 $+ 1 = 3$
丙 $= 11$　丑 $=$ 子丙 $+$ 甲 $= 35$
丁 $= 4$　寅 $=$ 丑丁 $+$ 子 $= 143 = y$

$157x - 134y = -1$ は $134y - 157x = 1$ として
甲 $= 1$
乙 $= 5$　子 $=$ 甲乙 $+ 1 = 6$
丙 $= 1$　丑 $=$ 子丙 $+$ 甲 $= 7$
丁 $= 4$　寅 $=$ 丑丁 $+$ 子 $= 34$
戊 $= 1$　卯 $=$ 寅戊 $+$ 丑 $= 41$
己 $= 2$　辰 $=$ 卯己 $+$ 寅 $= 116 = y$

$\boxed{118}$ 甲乙と号(なづく)る物あり，其数をしらず．只云甲十段乙五段和して百八十三ヶ，又云甲乙相併数七にて割奇零なし．甲何程と問．但甲乙数奇零なし．
答曰甲数十三ヶ
術曰 11 甲 $+$ 5 乙 $= 183$，甲 $+$ 乙 $= 7$ 丙 より 6 甲 $+$ 35 丙 $= 183$ これを解く．
まず剰一術で $6X - 35Y = 1$ を解くと $X = 6$，$Y = 1$
この X に 183 を掛けて，35 で割った余りが甲である．すなわち

$6 \times 183 = 31 \times 35 + 13$ より 甲 $= 13$

$ax{+}by = c\ (a > 0,\ b > 0)$ を解くには，まず剰一術で $aX{-}bY = 1$ を解き，その鮮を $X = X_0,\ Y = Y_0$ とする．cX_0 を b で割った余りを r とする．$cX_0 = Pb{+}r$ を $acX_0{-}bcY_0 = c$ へ代入して，$a(Pb{+}r){-}bcY_0 = c$

$$\therefore \quad ar + b(aP - cY_0) = c$$

よって $x = r$ である．

$\boxed{119}$ 甲乙の人に金を貸あり．只云甲は月に二分の利にて五ヶ月貸，乙は月に一分半の利にて九ヶ月貸，又云甲乙元利あわせて金七十両あり．各元金何ほどと問．
答曰甲元金四十三両
術曰 甲の元利合計 $= (1 + 0.02 \times 5)$ 甲 $= 1.1$ 甲
乙の元利合計 $= (1 + 0.015 \times 9)$ 乙 $= 1.135$ 乙
1.1 甲 $+ 1.135$ 乙 $= 70$
220 甲 $+ 227$ 乙 $= 14000$ これを解く．
まず $220X - 227Y = 1$ を剰一術で解くと $X = 162$
$162 \times 14000 = 9991 \times 227 + 43$
よって 甲 $= 43$

$\boxed{120}$ 書付けあり．図の如く虫くふ．其虫触所の惣代銀及び一反に付ての代銀何程と問．
答曰惣代銀二貫百二十五匁二分　一反に付八匁四分
術曰一反につき $\dfrac{x}{10}$ 匁，代銀を $10y + 5.2$ 匁 とすると
$253 \times \dfrac{x}{10} = 10y + 5.2$
$253x - 100y = 52$　これを解く
まず $253X - 100Y = 1$ を剰一術で解くと $X = 17,\ Y = 43$
17×52 を 100 で割った余りは 84　(木綿一反の常識的な値段にする．一般解は $84 + 100k$)

$\boxed{121}$ 牛と馬を買，代金合て四千九百九十八両有．只云馬は一疋に付三十五両，又云牛は一疋に付二十一両也．馬何疋と問．但馬は百疋にちかし．
答曰馬九十九疋
術曰 馬 $= 100 -$ 午 とすると $35(100 -$ 午$) + 21$ 牛 $= 4998$
5 午 $- 3$ 牛 $= -214$　これを解く．
まず $5X - 3Y = -1$ を歛一術で解くと $X = 1,\ Y = 2$
この $X = 1$ に 214 を掛けて 3 で割ったあまり 1 が午．よって 馬 $= 99$

惣(すべ)て剰一歛一ともに左数一ヶを得るか，或(あるいは)一ヶにあらずとも求る物より少数なる時は変数を得るゆえ右数を累加して終に真数を得るといへども累加段数多き時は煩(わづらは)しき故成たけ右数の多くなるやうにするとも又は求る物を成たけ少数になるやうにすべし．此の如く心懸ても精要算法の論書共に有が如く其術を見て滞(とどこほ)るやうにと是を巧み，或題の員数を換(かへ)或題辞を改め設る時は其変斗(はか)りがたし．今此術直(じき)に馬疋数とせずして不足数と立しは変すくなからしめんが為なり．

$\boxed{122}$ 甲乙と号る物有．其数をしらず．只云甲数を置百廿一をかけ得る内乙数百四段を減じ余一ヶ．甲乙数各何程と問．但甲乙数奇零なし．

答曰甲数四十九　乙数五十七

術曰 $121\,甲 - 104\,乙 = 1$　剰一術により $甲 = 49,\ 乙 = 57$

$121 = 1 \cdot 104 + 17$

$104 = 6 \cdot 17 + 2$

$17 = 8 \cdot 2 + 1$

$甲 = 6 \cdot 8 + 1 = 49$

$\boxed{123}$ 銭一貫文にて梨柿栗の三菓合て一千個を買．只云梨は一つに付二十文，柿は二つに付五文，栗は五つに付三文也．各何程と問．

答曰梨七つ　此代銭百四十四文

　柿百十八ヶ　此代銭三百七文

　栗八百七十五ヶ　此代銭五百四十五文

術曰 $\begin{cases} 20\,梨 + \dfrac{5}{2}柿 + \dfrac{3}{5}栗 = 960 \\ 梨 + 柿 + 栗 = 1000 \end{cases}$

$175\,柿 + 194\,栗 = 190400$ を解く．

まず $175X - 194Y = 1$ を剰一術で解くと $X = 51,\ Y = 46$

因て，51×190400 を 194 で割った余り 118 が柿．

柿の銭は $118 \times 2.5 = 295$　これを省銭にして 307 文　$(295 = 3 \times 96 + 7)$

$\boxed{124}$ 甲乙の人に銀を貸あり．各四年賦に是を返す．返銀毎年同数也．但甲の毎年返す銀と乙の毎年返す銀とは同じからず．只甲は甲の内のみ，乙は乙の内のみ毎年同数にかへすなり．只云甲乙一ヶ年の年譜銀合て六百七十七匁四分八厘九毛〇一忽〇九繊余．又云甲の利足は毎年元銀六百目に付百目，乙の利足は毎年元銀七百目に付百目なり．各元銀何程と問．但元銀各不尽なし．

答曰甲元銀二百五十五匁　乙元銀一貫六百九十五匁

術曰 $甲利率 = \dfrac{1}{6}$，$乙利率 = \dfrac{1}{7}$

$$\left(\frac{7}{6}\right)^4 甲 = \left\{1 + \frac{7}{6} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^3\right\} 甲返$$

$$7^4 甲 = 6(7^4 - 6^4)\ 甲返$$

$$\therefore\quad 甲返 = \frac{7^4}{6 \times 85 \times 13} 甲$$

対換して

$$8^4 乙 = 7(8^4 - 7^4)\ 乙返$$

$$\therefore\quad 乙返 = \frac{8^4}{7 \times 113 \times 15} 乙$$

甲返 + 乙返 $= 677.4890109$ に代入して

$$7^4 \cdot 11865\,甲 + 8^4 \cdot 6630\,乙 = 677.4890109 \times 6630 \times 11865$$

等数 15 で約して

$$1899191\,甲 + 1810432\,乙 = 3552975945 (不尽量を収む/不尽収て一にととのふ)$$

これを解く．まず $1810432X - 1899191Y = 1$ を剰一術で解くと $X = 67936$

$$67936 \times 3552975945 = 127093575 \times 1899191 + 1695$$

よって 乙 $= 1695$

1810432	1899191	
88759	1(甲)	
35252	20(乙)	子 = 甲乙 + 1 = 21
18255	2(丙)	丑 = 子丙 + 甲 = 43
16997	1(丁)	寅 = 丑丁 + 子 = 64
1258	1(戊)	卯 = 寅戊 + 丑 = 107
643	13(己)	辰 = 卯己 + 寅 = 1455
615	1(庚)	巳 = 辰庚 + 卯 = 1562
28	1(辛)	午 = 巳辛 + 辰 = 3017
27	21(壬)	未 = 午壬 + 巳 = 64919
1	1(癸)	申 = 未癸 + 午 = 67936 = X

$\boxed{125}$ 年一割二分の利にて銀を貸あり．只云元利和銀を廿五匁づつ包み余り二十二匁，又云元利和銀を三十六匁づつ包み余り四匁なり．元銀何ほどと問．但元銀不尽なし．
答曰元銀一貫二百二十五匁
術曰 $25x + 22 = 36y + 4$ より $25x - 36y = -18$ これを解く．
まず $25X - 36Y = -1$ を歉一術により解くと $X = 23$
$23 \times 18 = 11 \times 36 + 18$ よって $x = 18$，従って，x の一般解は $x = 18 + 36k$
$25(18 + 36k) + 22 = 1.12 \times$ 元銀
$\therefore \quad 1.12\,元 - 900k = 472$
等数 0.16 で割って 7 元 $- 5625k = 2950$

7	5625	
4	803(甲)	
3	1(乙)	子 = 甲乙 + 1 = 804
1	1(丙)	丑 = 子丙 + 甲 = 1607
1	2(丁)	寅 = 丑丁 + 子 = 4018

$4018 \times 2950 = 2107 \times 5625 + 1225$ (一般解は $1225 + 5625k$) よって 元 $= 1225$ (最小解)
【等数術】
$(900 \quad 1.12) = (1.12 \quad 0.64) = (0.64 \quad 0.48) = (0.48 \quad 0.16) = (0.16 \quad 0.16)$

126 甲乙の人に元銀同数に貸あり．甲は二割，乙は二割半也．甲の元利和銀を三十三匁づつ包み，余二十八匁八分．乙の元利和銀を二十二匁づつ包み余二匁五分．又云甲乙元利和銀合て四十三匁づつ包み余十三匁三分．甲乙元利合銀何程と問.
答曰甲乙元利合銀三貫〇二十三匁三分
術曰 $\begin{cases} 1.2\,元 = 33x + 28.8 \cdots ① \\ 1.25\,元 = 22y + 2.5 \cdots ② \end{cases}$
$1.25 \times ① - 1.2 \times ②$ より $41.25x - 26.4y = -33$
【等数術】$(41.25,\ 26.4) = (26.4,\ 14.85) = (14.85,\ 11.55) = (11.55,\ 3.3) = (3.3,\ 1.65) = (1.65,\ 1.65)$
等数 1.65 で割って $25x - 16y = -20$
歉一術

7	16	
2	2(甲)	
1	3(乙)	子 = 甲乙 + 1 = 7

$7\times 20 = 8\times 16 + 12$，よって 特殊解 $x = 12$, $y = 20$ が得られ，一般解は $x = 12 + 16k$, $y = 20 + 25k$

故に，甲乙元利和銀について $33(12 + 16k) + 22(20 + 25k) + 31.3 = 43\ell + 13.3$
$43\ell - 1078k = 854$
剰一術

43	1078	
3	25(甲)	
1	14(乙)	子 = 甲乙 + 1 = 351

$351 \times 854 = 278 \times 1078 + 70$
よって $\ell = 70$ で 甲乙元利合銀 $= 70 \times 43 + 13.3 = 3023.3$(最小解)

127 正負の平方あり．図の如く其段数をしらず．但逐差をよび段数正負共に同じ．正大方面を置，逐差を以是を累減して減する事あたはざる時は却て逐差を減じ，得る数を負小方面とす．只云正小方面四寸，又云逐差七寸．重云負積の和より正積の和は多き事百十二歩. 相等段数何ほどと問.
答曰正負各四段
術曰 $4 \times 2 - 7 = 1$
$1 \times 7 = 7$
$112 \div 7 = 16$
$\sqrt{16} = 4 =$ 段数
【術解】求める段数 (項数) $= n$
$小^2 + (小+差)^2 + (小+2\,差)^2 + \cdots + (小+(n-1)\,差)^2 - \left\{(小-差)^2 + (小-2\,差)^2 + \cdots + (小-n\,差)^2\right\} = 112$
$(2\,小 - 差)\,差\,n^2 = 112$
$7n^2 = 112$
$n = \sqrt{\dfrac{112}{7}} = 4$

128 立方の内に図の如く大球小球各三ヶを容る有. 大球は一ヶごとに立方の平面三所にせつす 小球は一ヶごとに立方の平面二所にせつす 只云小球径六十八寸大球径何程と問.

答曰大球径八十九寸一分余

術曰　$大球径 = \dfrac{小球径}{1.5 - \sqrt{1.25 - \sqrt{0.5}}}$

【術解】

$$子 = \frac{\sqrt{2}大}{2}$$

$$外斜 = \sqrt{2}大 + 大$$

$$内斜 = \sqrt{2}小 + 小$$

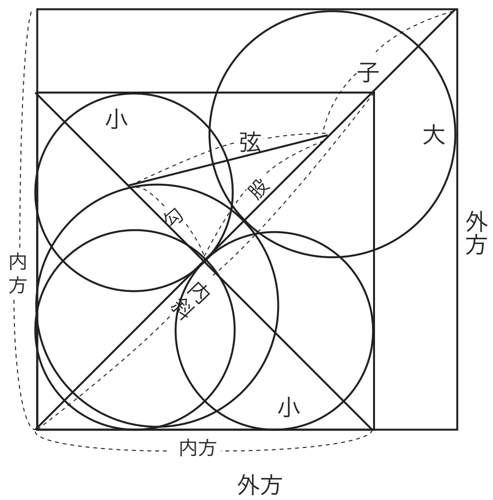
$$股 = 外斜 - \frac{内斜}{2} - 子 = \frac{\sqrt{2}大}{2} + \frac{2\,大}{2} - \frac{\sqrt{2}小}{2} - \frac{小}{2}$$

$$勾 = \frac{小}{2}$$

$$弦^2 = 大小$$

$股^2 + 勾^2 = 弦^2$ へ代入して

$$(3+2\sqrt{2})\,大^2 - (6+3\sqrt{2})\,小大 + (2+\sqrt{2})\,小^2 = 0 \quad 原式$$



原式を見るに実方廉各二位づゝありてあしゝ故に因方を考計て是を掛実数を一位とす．若廉級を一位にせんと思はば三ヶと二商二段の差を因方にすべし．廉級一位となる也．

$2-\sqrt{2}$ を掛けて

$$(2+\sqrt{2})\,大^2 - 6\,小大 + 2\,小^2 = 0$$

$$\left(1+\sqrt{0.5}\right)大^2 - 3\,小大 + 小^2 = 0$$

$$\left(\frac{方}{2}\right)^2 - 廉実 = (1.5\,小)^2 - \left(1+\sqrt{0.5}\right)小^2 = 1.25\,小^2 - \sqrt{0.5}小^2 = 子小^2$$

$$\therefore \quad 大 = \frac{小}{1.5-\sqrt{子}}$$

ここで使った解の公式は $ax^2+2bx+c=0$ ののとき，$x = \dfrac{c}{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}$

原式で $3-2\sqrt{2}$ を掛けて，廉級 (x^2 の係数) を 1 にしてもよいが，方，実級には $\sqrt{}$ が残るので，実，方に根号が残らない $2-\sqrt{2}$ を掛ける方がよい．

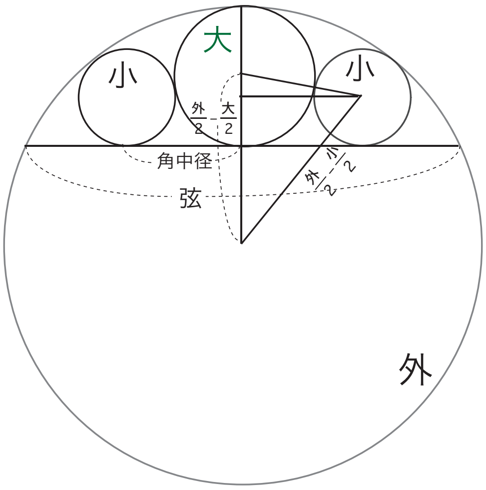
$\boxed{129}$ 大球を三段にきり，図の如く上段に甲球一ヶを容て $\substack{上截面に\\せつす}$ 乙球を環容す． $\substack{左右の隣球と\\甲球に切す}$ 中段の厚薄に拘らず下段に丙球一ヶを容て $\substack{下截面\\にせつす}$ 丁球を環容す． $\substack{左右の隣球と\\丙球にせつす}$ 乙丁球箇数惣計最多きを欲す．甲球径七寸八分，乙球径何程と問．

答曰乙球径二寸九厘余

術曰 $乙 = \dfrac{甲}{\sqrt{3}+2}$

〔題意〕大球を 3 つに切り，図のように上段に甲球 1 個を容れて (切断面に接する)，乙球を環状に容れる．(乙球は互いに接し，甲球にも接する) 中段の厚さに拘らず下段に丙球 1 個を容れて，丁球を環状に容れる．(丁球は互いに接し，丙球にも接する) 乙球と丁球の個数の和が最大になるようにする．甲球径 7.8 寸のとき，乙球径は幾らか．

横より見る図



【術解】双股弦の術より

$$\left(\frac{外}{2}-\frac{小}{2}\right)^2=\left(\frac{大}{2}+\frac{小}{2}\right)^2+\left(\frac{外}{2}-\frac{大}{2}\right)^2-2\left(\frac{大}{2}-\frac{小}{2}\right)\left(\frac{外}{2}-\frac{大}{2}\right)$$

$$\therefore\quad 外大-大^2-外小=0 \qquad (前空数)$$

$$-大+角中径率^2小=0 \qquad (后空数)$$

前空数と后空数より小を消去して

$$大径=外-\frac{外}{角中径率^2}$$

角数 即小球箇数	大球径
7 角	0.246 余
8 角	0.414 余
9 角	0.532 余
10 角	0.618 余
11 角	0.682 余
12 角	0.732 余

(表 1)

爰に於て数を推して是を試る．但外球径一寸を用ゆ．六角は大径小径等円になるゆへ球形をなさず．故に七角より起る事をしる．十三角に至ては七角の大径を併ても一寸以上になりて外径より大になるゆへ十二角を極とする事をしる．

右六角の内二角相併て其大径一寸にみたずしてしかも箇数多きを試る．

8 角大径 + 9 角大径	0.946 余	箇数合 17
7 角大径 + 12 角大径	0.978	箇数合 19

(表 2)

右箇数十九箇の形最多し故に是を用て乙径を求む．

上段厚さ	0.732 余	甲球径とす
中段厚さ	0.055 内	
下段厚さ	0.246 余	丙球径とす

(后矩合) で，大を甲に換え，小を乙に換え，12 角角中径冪 $\sqrt{3}+2$ に変え，

$$-甲 + (\sqrt{3}+2)\,乙 = 0$$

$$\therefore \quad 乙 = \frac{甲}{\sqrt{3}+2}$$

$$角中径率 = \frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$$

$$大径 = 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{n}$$

$n = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$ に対して上記 (表 1) の大径の値は正しい．

$\left(1-4\sin^2\dfrac{\pi}{n}\right)+\left(1-4\sin^2\dfrac{\pi}{m}\right)<1$ となる $m+n$ の最大値を求めよ，という問題．変形すると

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{m}<\frac{3}{2}$$

or

$$\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\pi\cos\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\pi<\frac{3}{4}$$

表 2 は

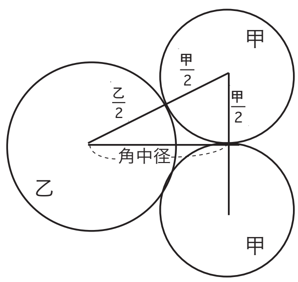
$$\cos\frac{2\pi}{8}+\cos\frac{2\pi}{9}<\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{12}<\frac{3}{2}$$

ということ．

$\boxed{130}$ 矮立円の内に図の如く甲球二ヶ上下相切し，乙球も亦上下相切して甲球二ヶ上下相切するの地に連環する有．外積卅八歩，甲球径何程と問．
答曰甲球径二寸余

術曰 $\sqrt[3]{\dfrac{外積}{\left(\sqrt{289104080}-16994\right)\dfrac{\pi}{6}}} = 甲球径$

【術解】



$$\left(\frac{甲}{2}+\frac{乙}{2}\right)^2-\left(\frac{甲}{2}\right)^2=角中径^2$$

角中径$^2=$ 乙^2(角中径率)^2 だから 2 甲 $+$ 乙 $-$ 4 乙^2(角中径率)$^2=0$

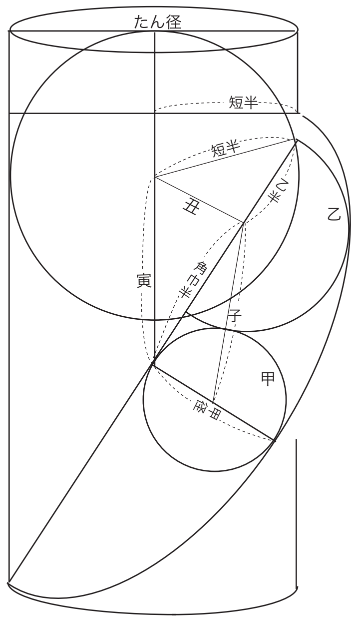
$$\therefore\quad 甲=2\,乙\cdot率^2-\frac{乙}{2}$$

乙径 1 寸として甲径を試る．

4 個之甲径	0.5
5 個之甲径	0.9472
6 個之甲径	1.5

4 個，6 個は題意にそむくゆえ，乙径の箇数必 5 個に極る事をしる．

(5 角形角中率)$^2=\dfrac{\sqrt{5}}{10}+\dfrac{1}{2}$ だから



$$甲=\frac{乙}{2(5-\sqrt{20})}$$

$$甲=\frac{短}{2}$$

$\left(\dfrac{短}{2}\right)^2-\left(\dfrac{乙}{2}\right)^2=丑^2$ より

$$丑^2=\left(\frac{乙}{2}-甲\right)\left(\frac{乙}{2}+甲\right)$$

$$角中率^2=\frac{1}{2}\left(\frac{乙}{2}+甲\right)乙$$

角中率$^2+$ 丑$^2=$ 寅^2　へ代入して

$$寅^2=\left(\frac{乙}{2}+甲\right)甲$$

比例　短 : 長 $=$ 丑 : 寅 より

$$長^2=\frac{短^2}{丑^2}寅^2=\frac{4\,甲^3}{\frac{乙}{2}-甲}$$

$$矮立円凡全責=長^2短=\frac{8\,甲^4}{\frac{乙}{2}-甲}=\frac{8\,甲^3}{\sqrt{20}-4}\quad(左によす)$$

2 凡甲責 $=2$ 甲^3，4 凡乙責 $=40(5-\sqrt{20})^3$甲^3，凡外責 $=\dfrac{外責}{\frac{\pi}{6}}$ だから

$$矮立円凡全責=2\,甲^3+40(5-\sqrt{20})^3甲^3+\frac{外責}{\frac{\pi}{6}}$$

左に寄と相消

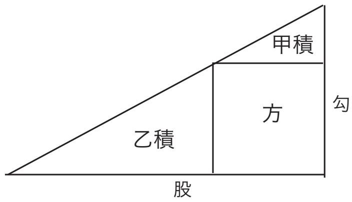
$$\frac{8\,甲^3}{\sqrt{20}-4}-2\,甲^3-40(5-\sqrt{20})^3甲^3-\frac{外責}{\frac{\pi}{6}}=0$$

$$-16994\,甲^3+3802\sqrt{20}甲^3-\frac{外責}{\frac{\pi}{6}}=0$$

$$(-16994+\sqrt{289104080})\,甲^3-\frac{外責}{\frac{\pi}{6}}=0$$

隅数を以実を除き，立方にひらき甲球径を得る．故に本術の如し．

$\boxed{131}$ 勾股の内に図の如く方を容るあり．只云甲積五十四歩，乙積九十六歩，勾股各何ほどゝ問．



答曰　勾二十一寸　股二十八寸

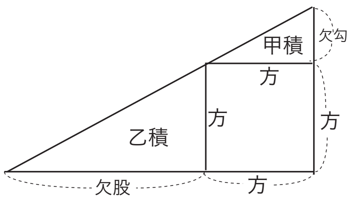
術曰　$\sqrt{甲積\times乙積}=\sqrt{5184}=72$

$$\sqrt{72\times2}=12:=天$$

$$\frac{天}{2}=6$$

$$\frac{甲}{6}+天=21=勾$$

$$\frac{乙}{6}+天=28=股$$



【術解】股：勾＝方：欠勾 より 欠勾 $=\dfrac{方\cdot勾}{股}\cdots$ イ

$$\therefore\quad 甲積=\frac{方^2勾}{2\,股}\cdots ロ$$

これを対換して

$$乙積=\frac{方^2股}{2\,勾}$$

$$甲積\times乙積=\frac{方^4}{4}$$

$$方^2=2\sqrt{甲積\times乙積}$$

$$方=\sqrt{2\sqrt{甲積\times乙積}}:=天$$

爰に於てイとロとを照（てらし）て欠勾を求む

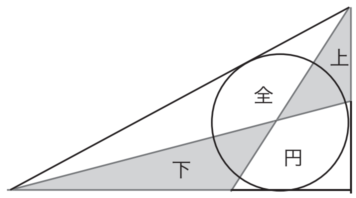
$$欠勾=\frac{2\,甲積}{天}$$

$$勾=\frac{2\,甲積}{天}+天$$

これを対換して

$$\text{股} = \frac{2\,\text{乙積}}{\text{天}} + \text{天}$$

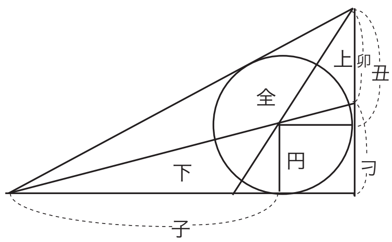
$\boxed{132}$ 勾股の内に図の如く二斜をもふくる有，二斜の交る所即円心なり 只云上黒積三十寸，又云下黒積四十五寸．全円径なにほどゝ問．



答曰全円径一十二寸

術曰 $\sqrt{\dfrac{8\times30\times45}{30+45}} = 12 = \text{全円径}$

【術解】此術解(じゅつげ)ならびに此次の術解とも変換術を用て是を施す．常の寄消法を用るもよしといへども此方も亦一奇の法にて功を取事あり．故に爰にしるす．



子 : $\dfrac{\text{全}}{2} = \text{股} : \text{寅}$ より 寅 $= \dfrac{\text{全}\cdot\text{股}}{2\,\text{子}}$

$$\text{卯} = \text{勾} - \text{寅} = \text{勾} - \frac{\text{全}\cdot\text{股}}{2\,\text{子}} = \frac{\text{勾}\,(\text{股}-\text{全}) + \text{股}\,(\text{勾}-\text{全})}{2\,\text{子}} := \frac{\text{東}}{2\,\text{子}}$$

ゆえに

$$\text{上責} = \frac{\text{東}\cdot\text{全}}{8\,\text{子}},\quad \text{下責} = \frac{\text{東}\cdot\text{全}}{8\,\text{丑}}$$

右二責遍通術に仍て是を通じ

$$\begin{cases} \text{上責} = \dfrac{\text{東}\cdot\text{全}\cdot\text{丑}}{8\,\text{子丑}} \\ \text{下責} = \dfrac{\text{東}\cdot\text{全}\cdot\text{子}}{8\,\text{子丑}} \end{cases} \quad \text{等数に約し} \begin{cases} \dfrac{\text{上責}}{\text{等}} = \text{汎丑} & \text{是をとき汎勾} - \dfrac{\text{汎全}}{2} := \text{天} \\ \dfrac{\text{下責}}{\text{等}} = \text{汎子} & \text{是をとき汎股} - \dfrac{\text{汎全}}{2} := \text{地} \end{cases}$$

故に 地 − 天 = 汎股 − 汎勾，　天 + 地 = 汎玄

以後，汎某を $\overline{\text{某}}$ と書くことにする．

$2\overline{\text{玄}}^2 - (\overline{\text{股}} - \overline{\text{勾}})^2 = (\overline{\text{勾}} + \overline{\text{股}})^2$ だから

$2(天+地)^2-(天-地)^2=(\overline{勾}+\overline{股})^2$ とかける．すなわち，
$(天+地)^2+4\,天地=(\overline{勾}+\overline{股})^2:=人^2$

$$\frac{人}{2}+\frac{地-天}{2}=\overline{股},\quad \frac{人}{2}-\frac{地-天}{2}=\overline{勾},\quad 人-(天+地)=\overline{全}$$

是を以東を繙(とき)【東 = 勾 (股 − 全) + 股 (勾 − 全) と置いたので，$\overline{東}=\overline{勾}(\overline{股}-\overline{全})+\overline{股}(\overline{勾}-\overline{全})$ へ上の式を代入するという意味】

$$\overline{東}=\overline{勾}(\overline{股}-\overline{全})+\overline{股}(\overline{勾}-\overline{全})=\cdots\cdots=(天+地)(人-天-地)=(天+地)\overline{全}$$

是を以汎上責を求む

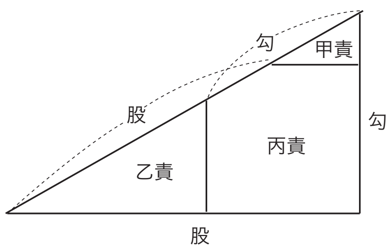
$$\overline{上責}=\frac{\overline{東全}}{8\overline{子}}=\frac{(天+地)\overline{全}^2}{8\,地}$$

$\overline{上責}:\overline{全}^2=上責:全^2$ だから

$$\begin{aligned}全^2&=\frac{上責\cdot\overline{全}^2}{\overline{上責}}\\&=\frac{8\,地\cdot上責}{天+地}\\&=\frac{8\,等\cdot上責\cdot下責}{等\,(上責+下責)}\\&=\frac{8\cdot上責\cdot下責}{(上責+下責)}\end{aligned}$$

平方に開き全径を得る．故に本術の如し．

$\boxed{133}$ 勾股積を図の如く甲乙丙の三段に分る有．只云甲乙積相乗して 九十三寸六分四厘〇四五八二四 又云丙積 一百六十一寸二分八厘 勾股弦各何程と問．



答曰勾十四寸　股四十八寸　弦五十寸
術曰 $\sqrt{93.64045824}\times4=9.6768\times4=38.7072$
これと 161.28 の等数を求めると 6.4512

$$38.7072\div6.4512=6:=天$$

$$161.28\div6.4512=25:=地=汎玄$$

$$\frac{天}{2}+地=28:=人$$

$$2\text{人} \times \text{天} = 336$$

$$\sqrt{\text{地}^2 - 336} = \sqrt{289} = 17$$

$$\frac{17 + \text{天} + \text{地}}{2} = 24 = \text{汎股}$$

$$\text{天} + \text{地} - \text{汎股} = 7 = \text{汎勾}$$

$$\sqrt{\frac{161.28 \times \text{地}}{\text{天}^2 \times \text{人}}} = \sqrt{\frac{4032}{1008}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{勾} = \text{汎勾} \times 2 = 14$$

$$\text{股} = \text{汎股} \times 2 = 48$$

$$\text{弦} = \text{汎玄} \times 2 = 50$$

【術解】弦 : 勾 = 弦 − 股 : 甲勾 より 甲勾 $= \dfrac{\text{勾}\,(\text{弦} - \text{股})}{\text{弦}}$ 同じく 甲股 $= \dfrac{\text{股}\,(\text{弦} - \text{股})}{\text{弦}}$

$$\text{甲責} = \frac{\text{勾股}\,(\text{弦} - \text{股})^2}{2\,\text{弦}^2}$$

対換して

$$\text{乙責} = \frac{\text{勾股}\,(\text{弦} - \text{勾})^2}{2\,\text{弦}^2}$$

$$\text{只} = \frac{\text{勾}^2\text{股}^2(\text{弦} - \text{股})^2(\text{弦} - \text{勾})^2}{4\,\text{弦}^4}$$

$$\sqrt{\text{只}} = \frac{\text{勾股}\,(\text{弦} - \text{股})(\text{弦} - \text{勾})}{2\,\text{弦}^2} = \frac{\text{勾股全}^2}{4\,\text{弦}^2}$$

$$4\sqrt{\text{只}} = \frac{\text{勾股全}^2}{\text{弦}^2}(= 38.7072)$$

$$\text{丙責} = \frac{\text{勾股}}{2} - \frac{\text{勾股}\,(\text{弦} - \text{股})^2}{2\,\text{弦}^2} - \frac{\text{勾股}\,(\text{弦} - \text{勾})^2}{2\,\text{弦}^2} = \frac{\text{勾股全}}{\text{弦}} = \text{又}\;(= 161.28)$$

$4\sqrt{\text{只}}$ と又云数と各遍通術に仍て分母を通じ二級に是を置

$$\begin{cases} 4\sqrt{\text{只}} = \dfrac{\text{勾股全}^2}{\text{弦}^2} \\ \text{又} = \dfrac{\text{勾股全弦}}{\text{弦}^2} \end{cases} \qquad \text{等数を以割} \qquad \begin{cases} \dfrac{4\sqrt{\text{只}}}{\text{等}} = \text{汎全} := \text{天} \\ \dfrac{\text{又}}{\text{等}} = \text{汎玄} := \text{地} \end{cases} \qquad (\text{この等数} = 6.4512)$$

爰に於て一算を立，汎勾とす．

$$\text{天} + \text{地} = \overline{\text{勾}} + \overline{\text{股}}, \quad \text{天} + \text{地} - \overline{\text{勾}} = \overline{\text{股}}, \quad \text{地}^2 = \overline{\text{玄}}^2$$

$\overline{\text{勾}}^2 + \overline{\text{股}}^2 = \overline{\text{玄}}^2$ へ代入して

$$\text{天}^2 + 2\overline{\text{勾}}^2 + 2\,\text{天地} - 2\,\text{天}\overline{\text{勾}} - 2\,\text{地}\overline{\text{勾}} = 0$$

$\overline{勾}$ を得る式

$$天^2 + 2\,天地 - 2(天 + 地)\overline{勾} + 2\overline{勾}^2 = 0$$

按るに此式は汎勾と汎股と両商を得る也

$$\overline{勾} = \frac{天 + 地 - \sqrt{地^2 - 2\,天地 - 天^2}}{2} = 7$$

$$\overline{股} = \frac{天 + 地 + \sqrt{地^2 - 2\,天地 - 天^2}}{2} = 24$$

$$地 = \overline{玄} = 25$$

$$天 = \overline{全}$$

$$等^2 = \frac{又}{\overline{又}} = 又\frac{\overline{玄}}{勾股天} = 又\frac{地}{\dfrac{天^2 + 2\,地天}{2}} = \frac{又 \cdot 地}{\left(\frac{天}{2} + 地\right)天^2} = 4$$

平方に是をひらき等数を得る．

$$\overline{勾}等 = 定勾$$

$$\overline{股}等 = 定股$$

$$\overline{玄}等 = 定玄$$

故に本術の如し．
汎数を以其真数を割等数冪を得る也．若其数一ヶを得る時は勾股弦に等数なき也．故に汎数を以直（じき）に定数とすべし．是変換術の定則也．

$\boxed{134}$ 爰に紙二枚にて茶袋を作る．其容る茶の代銀七匁也．今又紙八枚にて茶袋を作る 但格好前に同じ 其容る茶代銀何ほどゝ問．
答曰今作る茶袋に入茶代銀五十六匁
術曰 $8 \div 2 = 4 = 甲$，$\sqrt{甲} = 2$，$2 \times 7 \times 4 = 56$
【術解】前後袋の格好おなじと云ゆへ，仮に袋の形ち立方（りつほう）形（ぎやう）にして其術意を示す．

仮に紙一枚の面積を S とする．立方体の面積は 2S．6 で割って $\dfrac{2S}{6}$ = 立方体の一面積

平方に開き $\dfrac{\sqrt{2S}}{\sqrt{6}}$ = 方面

$$古立方積 = \frac{2S\sqrt{2}\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$$

是を対換して

$$新立方積 = \frac{8S\sqrt{8}\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$$

比例 古立方積 : 古代銀 = 新立方積 : 今代銀 により

$$今代銀 = \frac{古代銀 \times 新立方積}{古立方積} = \frac{8\sqrt{8}古代銀}{2\sqrt{2}} = 甲\sqrt{甲}古代銀$$

$\boxed{135}$ 立方あり．甲積一，乙積八，丙積二十七，丁積六十四，逐てかくの如し．戊己庚辛壬積幾何を問．但招差法を用ひずして荅ん事を乞

答曰戊積百二十五　己積二百十六　庚積三百四十三　他これを畧す．

術曰 丁 $= 3($丙$+ 2 -$ 乙$) +$ 甲，　戊 $= 3($丁$+ 2 -$ 丙$) +$ 乙

【術解】此題は招差の題なれども甲乙丙丁と順に云ゆへ歩索趕趁其外人々の思ひよる心に仍て品々術あるゆへ題辞に招差を用ひずして荅ん事を乞もの也．但甲乙丙丁と逐て順にいはざれば此術用ひられずとしるべし．是略術なれば也．先頭に云数を置，爰に於て先二位を設く．

天　地

天地を以，適等を計り設く

$$(\text{丙} - \text{乙})\,\text{天} + \text{地} + \text{甲} = \text{丁}$$

19 天 $+$ 地 $= 63$　剰一術により　63 を 19 で割った余り 6 を地とする．天 $= 3$

ゆえに 丁 $= 3($丙$-$ 乙$) + 6 +$ 甲

対換して

$$\text{戊} = 3(\text{丁} - \text{丙}) + 6 + \text{乙}$$

$$\text{己} = 3(\text{戊} - \text{丁}) + 6 + \text{丙}$$

逐て此の如く是を求む故に本術のごとし．

$\boxed{136}$ 蔵に米を貯るあり．其石数をしらず．初日一石を出す．次の日三石を出す．又次の日七石を出す．又其次の日十一石を出す．追てかくのごとく日々相増て米を出す．三十日に至て出し尽たり．貯米何ほどゝ問．但招差法を用ひずして荅ん事を乞

答曰貯米一千七百一十二石

術曰 $3 - 1 = 2 =$ 甲，$(30 - 1)^2 \times$ 甲 $+ 30 = 1712 =$ 貯米

【術解】此題も亦招差の題なれども一日二日三日四日と限数圭朶数を以するゆへ異術品々あり．故に招差法を用ひずして答ん事を乞うといへども，先招差法に仍て其数を求め其変化いかんを試る事左の如し．

$$\begin{cases} \text{一日貯米} = 1 \\ \text{二日貯米} = 1 + 3 = 4 \\ \text{三日貯米} = 1 + 3 + 7 = 11 \\ \text{四日貯米} = 1 + 3 + 7 + 11 = 22 \end{cases}$$

日数を以限数とし，貯米和を以元積として四行五列の式を作る．

貯米 $=$ 元積 $= y$，日数 $=$ 限数 $= x$ とし，$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ と仮定して，a, b, c, d を決める．(招差法)

$$\begin{cases} 1 = a + b + c + d \quad \text{甲} \\ 4 = 2a + 4b + 8c + 16d \quad \text{乙} \\ 11 = 3a + 9b + 27c + 81d \quad \text{丙} \\ 22 = 4a + 16b + 64c + 256d \quad \text{丁} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{乙}-\text{甲より} \quad 3=a+3b+7c+15d \quad \text{戊} \\ \text{丙}-\text{乙より} \quad 7=a+5b+19c+65d \quad \text{己} \\ \text{丁}-\text{丙}\quad\text{より} \quad 11=a+7b+37c+175d \quad \text{庚} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{戊}-\text{甲} \quad 2=2b+6c+14d \quad \text{辛} \\ \text{己}-\text{戊} \quad 4=2b+12c+50d \quad \text{壬} \\ \text{庚}-\text{己} \quad 4=2b+18c+110d \quad \text{癸} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{壬}-\text{辛} \quad 2=6c+36d \quad \text{子} \\ \text{癸}-\text{壬} \quad 0=6c+60d \quad \text{丑} \end{cases}$$

$(\text{丑}-\text{子})\div 2$ より　$-1=12d$　三乗差

$\text{丑}-5\times\text{三乗差}$　より　$5=6c$ 立差

$(\text{辛}-\text{立差})\times 6-7\times\text{三乗差}$　より　$-11=12b$　平差

$12\,\text{甲}-\text{三乗差}-\text{平差}-2\times\text{立差}$　より　$14=12a$　定差

よって

$$y=\frac{1}{12}\left(14x-11x^2+10x^3-x^4\right)$$

しかし，これでは $x=9$ のとき $y=-3$ となるので不適.
右の術に仍て試る所，日数八日迄は正積を得るといへども九日以上は負積となるゆへ題意に背く．故に此術用ひられず．又直差法に仍て是を試る．其法左の如し．四行五列の式を設く．
$y=a+bx+cx^2+dx^3$ と仮定する．

$$\begin{cases} 1=a+b+c+d \quad \text{甲} \\ 4=a+2b+4c+8d \quad \text{乙} \\ 11=a+3b+9c+27d \quad \text{丙} \\ 22=a+4b+16c+64d \quad \text{丁} \end{cases}$$

同様にして，

$0=d$　立差

$2=c$　平差

$-3=b$　定差

$2=a$　直差

故に $y=2-3x+2x^2$

右平定直の三差を以題の諸数を試るに皆脗合 (ふんごう) を得．仍て三十日の貯米を求るに正積を得るゆへ，此題別に変数なく，此術相応なるをしるといへども，招差を用ひずして答ん事を請ゆへ，別に適等を求る事左の如し．但右の如く四行五列の式を作り，直差法に仍て術を施す時は，立差空を得る故一日二日三日の出米を用ひ四日の出米を省き，術を施す時は変数品々あり，故に立差空を得るといへども，四日の出米も捨る事なら

ざる也.
歩索術に仍て日々出米の形を作る.

$$初日出米 = 1$$

$$次日出米 = 1 + 2$$

$$三日出米 = 1 + 2 + 2 \times 2$$

$$四日出米 = 1 + 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2$$

$$五日出米 = 1 + 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2$$

逐て累加して貯米を得る.

$$初日貯米 = 1$$

$$次日貯米 = 2 + 2$$

$$三日貯米 = 3 + 4 \times 2$$

$$四日貯米 = 4 + 9 \times 2$$

$$五日貯米 = 5 + 16 \times 2$$

是を変じ

$$初日貯米 = 1$$

$$次日貯米 = 2 + 2^1 \times 1$$

$$三日貯米 = 3 + 2^2 \times 2$$

$$四日貯米 = 4 + 3^2 \times 2$$

$$五日貯米 = 5 + 4^2 \times 2$$

$$次日出米 - 初日出米 = 2 = 甲$$

上位を見て是をくゝリ

$$貯米 = 日数 + (日数 - 1)^2 \times 甲$$

故に本術のごとし.

$\boxed{137}$ 今甲の取銀十匁，乙の取銀十五匁，丙の取銀二十九匁，丁の取銀七十八匁，戊の取銀二百七十四匁，己の取銀一貫百七匁．逐て此の如し，庚辛壬癸の取銀何ほどゝ問． 但招差法を用ひずして荅ん事を乞
答曰庚取銀四貫七百三十三匁　　辛取銀二十貫六百五十八匁壬取銀九十貫八百二十六匁　癸取銀四百貫三百五

十九匁
術曰 甲 $+$ 丙 $=$ 子

$$(丁+乙)乙-子丙=法$$

$$\frac{戊乙-丁丙}{法}=天$$

$$\frac{天子-丁}{乙}=地$$

$$庚=(己+丁)天-地戊$$

$$辛=(庚+戊)天-地己$$

$$壬=(辛+己)天-地庚$$

$$癸=(壬+庚)天-地辛$$

是も亦招差の題なれども甲乙丙丁と順に云ゆへ，別術あるゆへ，題に招差を用ひずして答ん事を乞もの也．
先二位を設く
天　　地
推量て矩合二件を求む

$$(丙+甲)天+乙地-丁=0 \quad 前矩合$$

$$(丁+乙)天+丙地-戊=0 \quad 后矩合$$

これを解いて

$$天=\frac{戊乙-丁丙}{(丁+乙)乙-(甲+丙)丙}=7$$

$$地=\frac{天(甲+丙)-丁}{乙}=-13$$

或曰此三題本術に至て題辞を遍用ひずして荅数を得る也．しからば不用の辞ははぶきて可ならんか．予荅曰しからば是をはぶく時は異術品々ありて其荅数一定(いちじやう)せず．仍て先求め得る所の術を以ひそかに其余る処の数を求めてらし合せて吻合を得る術を以定術とする也．故に余辞といへども捨べきにあらず．

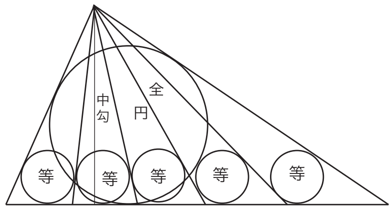
点竄指南録巻之二 終

算法点窟指南録巻之三

武江　阪部勇左衛門廣胖　著

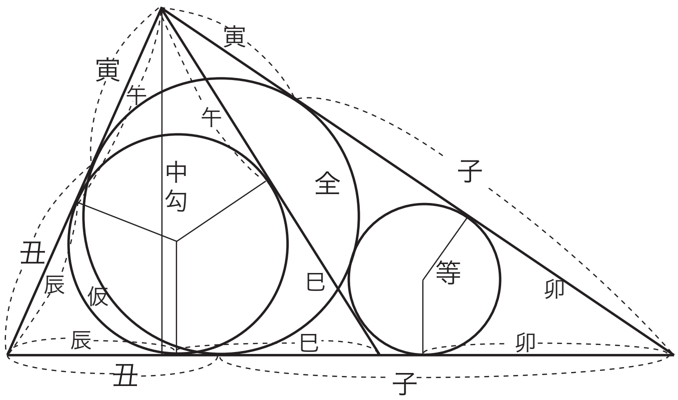
馬場金之丞正督　訂

$\boxed{138}$ 三角形内に等円を図のように入れる．(図は等円五個) 中勾と全円径が与えられたとき，等円の箇数に随て等円径を得る術を問う．



術曰 等円径 $= \left(1 - \sqrt[n]{1 - \dfrac{\text{全}}{\text{中}}}\right)$ 中勾　　$(n = \text{等円個数})$

【術解】



$\dfrac{\text{全}}{2} : \text{子} = \dfrac{\text{等}}{2} : \text{卯}$ より 卯 $= \dfrac{\text{等子}}{\text{全}}$

対換して 辰 $= \dfrac{\text{仮丑}}{\text{全}}$

$$2\,\text{三斜積} = \text{全}\,(\text{子} + \text{丑} + \text{寅}) \cdots ①$$

$$\text{右三斜和} = 2(\text{子} + \text{丑} + \text{寅} - \text{辰})$$

よって

$$2\,\text{右三斜積} = (\text{子} + \text{丑} + \text{寅} - \text{辰})\,\text{等}$$

対換して

$$2\,\text{左三斜積} = (\text{子} + \text{丑} + \text{寅} - \text{卯})\,\text{仮}$$

$$\therefore\quad 2\,\text{三斜積} = 2\,\text{右三斜積} + 2\,\text{左三斜積} = (\text{子} + \text{丑} + \text{寅})\,\text{等} + (\text{子} + \text{丑} + \text{寅})\,\text{仮} - \frac{\text{仮丑等}}{\text{全}} - \frac{\text{等子仮}}{\text{全}} \cdots ②$$

①②より

$$全(子+丑+寅)-(子+丑+寅)等-(子+丑+寅)仮+\frac{仮丑等}{全}ⓘ+\frac{等子仮}{全}ⓘ=0$$

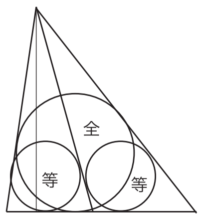
$$ⓘ=\frac{(丑+子)仮等}{全}=\frac{大仮等}{全}=\frac{中大仮等}{中全}=\frac{2S仮等}{中全}=\frac{仮等}{中}(子+丑+寅)\text{ を代入して}$$

$$全(子+丑+寅)-(子+丑+寅)等-(子+丑+寅)仮+\frac{仮等}{中}(子+丑+寅)=0$$

$$\therefore\quad 全中-等中-仮中+仮等=0$$

$$全中-等中+(等-中)仮=0\qquad(原式)$$

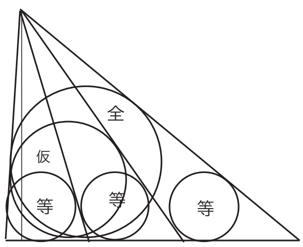
○等円二箇者



原式で 仮 $=$ 等 として $全中-2中等+等^2=0$ 　(二空数)

$$\therefore\quad 等=中-\sqrt{中^2-全中}=\left(1-\sqrt{1-\frac{全}{中}}\right)中$$

○等円三箇者



(二空数) で 全 $=$ 仮 として $仮中-2中等+等^2=0$
原式と維乗して仮を消去すると

$$中(全中-等中)-(等-中)(等^2-2中等)=0$$

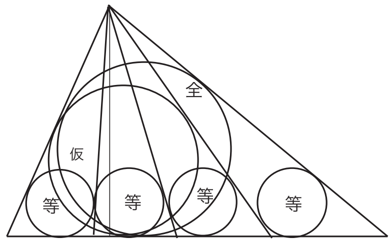
$$等^3-3中等^2+3中^2等-全中^2=0\qquad(三空数)$$

$$(等-中)^3+中^3-全中^2=0$$

$$等-中=-\sqrt[3]{中^3-全中^2} \quad (等<中)$$

$$\therefore \quad 等=\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{全}{中}}\right)中$$

○等円四箇者



(三空数) で 全 = 仮 として $等^3-3中等^2+3中^2等-仮中^2=0$
原式と維乗して仮を消去すると

$$(等^3-3中等^2+3中^2等)(等-中)+中^2(全中-等中)=0$$

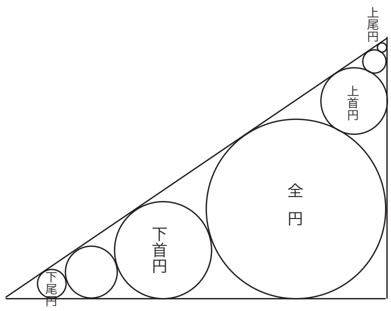
$$等^4-4中等^3+6中^2等^2-4中^3等+全中^3=0$$

$$(中-等)^4-中^4+全中^3=0$$

$$中-等=\sqrt[4]{中^4-全中^3}$$

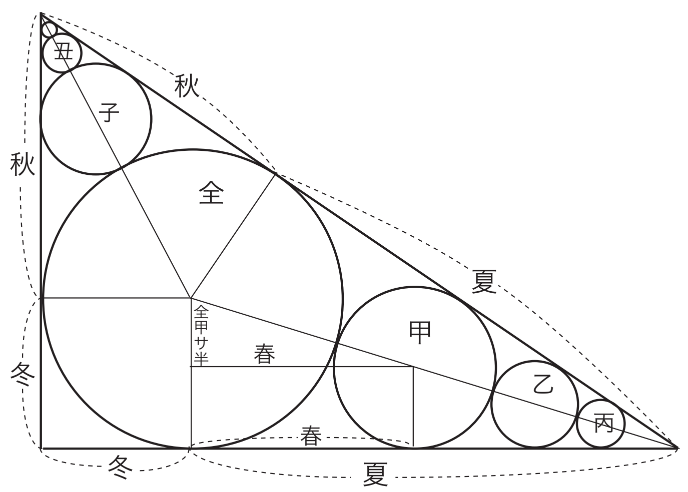
$$\therefore \quad 等=\left(1-\sqrt[4]{1-\frac{全}{中}}\right)中$$

$\boxed{139}$ 直角三角形内に，図の如く全円を隔て上下に等しい個数の累円をいれる．(図は六個)　一番上の円径と一番下の円径，および上下円個数が与えられたとき全円径は幾らか．



術曰 $乾=\sqrt[n]{\frac{下}{上}}$, $坤=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)(1+乾)$, $全円径=\left(坤+\sqrt{坤^2+乾}\right)^n 上径$　(n は上下円個数)

【術解】



$\text{春} = \sqrt{\text{全甲}}$

$$(\text{秋} + \text{冬})^2 + (\text{冬} + \text{夏})^2 = (\text{秋} + \text{夏})^2$$

$$\text{夏冬} + \text{秋冬} + \text{冬}^2 = \text{秋夏} \cdots ①$$

$\dfrac{\text{全}}{2} : \text{夏} = \dfrac{\text{全} - \text{甲}}{2} : \text{春}$ より $\text{夏} = \dfrac{\text{全春}}{\text{全} - \text{甲}} = \dfrac{\text{全}\sqrt{\text{全甲}}}{\text{全} - \text{甲}}$

$$\text{秋} = \frac{\text{全}\sqrt{\text{全子}}}{\text{全} - \text{子}}$$

$$\text{冬} = \frac{\text{全}}{2}$$

これらを①へ代入して

$$\frac{\text{全}\sqrt{\text{全甲}}}{\text{全} - \text{甲}}\frac{\text{全}}{2} + \frac{\text{全}\sqrt{\text{全子}}}{\text{全} - \text{子}}\frac{\text{全}}{2} + \frac{\text{全}^2}{4} = \frac{\text{全}\sqrt{\text{全子}}}{\text{全} - \text{子}}\frac{\text{全}\sqrt{\text{全甲}}}{\text{全} - \text{甲}}$$

$\sqrt{\text{全}} = x$ として

$$x^4 + 2(\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}})x^3 - (\text{子} + \text{甲} + 4\sqrt{\text{子甲}})x^2 - 2(\text{子}\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}}\text{甲})x + \text{甲子} = 0(\text{原式})$$

$$\left\{x^2 + (\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}})x - \sqrt{\text{甲子}}\right\}^2 - 2(\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}})^2 x^2 = 0$$

$$x^2 + (\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}})x - \sqrt{\text{甲子}} = \sqrt{2}(\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}})x$$

$$x^2 - \text{天}\,(\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}})x - \sqrt{\text{甲子}} = 0 \quad (n = 2\ \text{のとき}) \qquad \boxed{\text{天} = \sqrt{2} - 1}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\text{天}\,(\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}}) + \sqrt{\text{天}^2(\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{子}})^2 + 4\sqrt{\text{甲子}}}}{2} = \left(\text{坤} + \sqrt{\text{坤}^2 + \text{乾}}\right)\sqrt{\text{子}}$$

従って，

$$全 = \left(坤 + \sqrt{坤^2 + 乾}\right)^2 子$$

$n = 4$ のとき $\sqrt[4]{全} = y$ とすると

$$\sqrt{甲} = \sqrt[4]{全乙} = \sqrt[4]{乙}y$$

$$\sqrt{子} = \sqrt[4]{全丑} = \sqrt[4]{丑}y$$

よって

$$y^4 - 天\left(\sqrt[4]{乙} + \sqrt[4]{丑}\right)y^3 - \sqrt[4]{乙}\sqrt[4]{丑}y^2 = 0$$

$$\therefore \quad y^2 - 天\left(\sqrt[4]{乙} + \sqrt[4]{丑}\right)y - \sqrt[4]{乙}\sqrt[4]{丑} = 0$$

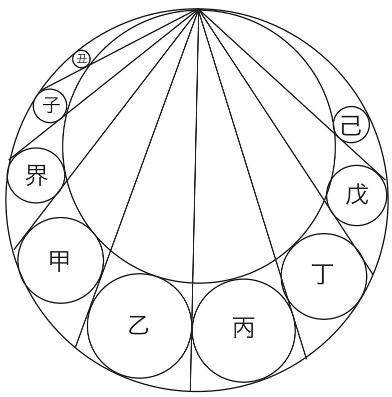
$n = 6$ のとき

$$z^2 - 天\left(\sqrt[6]{丙} + \sqrt[6]{寅}\right)z - \sqrt[6]{丙}\sqrt[6]{寅} = 0$$

$\boxed{140}$ $\sqrt{m\,甲^2 + 乙^2}$ が整数となる甲，乙を求めよ．(m は因法)
術曰　甲 $= 2$ 上下，乙 $= m$ 下$^2 -$ 上^2

$\boxed{141}$ $\sqrt{(甲^2 - 乙^2) \times m}$ が整数となる甲，乙を求めよ．(m は因法)
術曰 冪数 (平方数) を t^2 とする．甲 $= t^2 + m$, 乙 $= t^2 - m$

$\boxed{142}$ 図のように大円の中に小円と甲乙丙などの累円が入っている．各累円は大円，小円及び大円と小円の接点から出る線に接している．大円径，小円径，界円径がわかっているとき，累円径を得る術を問う．



術曰 大径 $\cdot$ 小径 $:=$ 天 $:=$ 界率，大$^2 +$ 小$^2 :=$ 地，$\dfrac{地}{天} :=$ 人

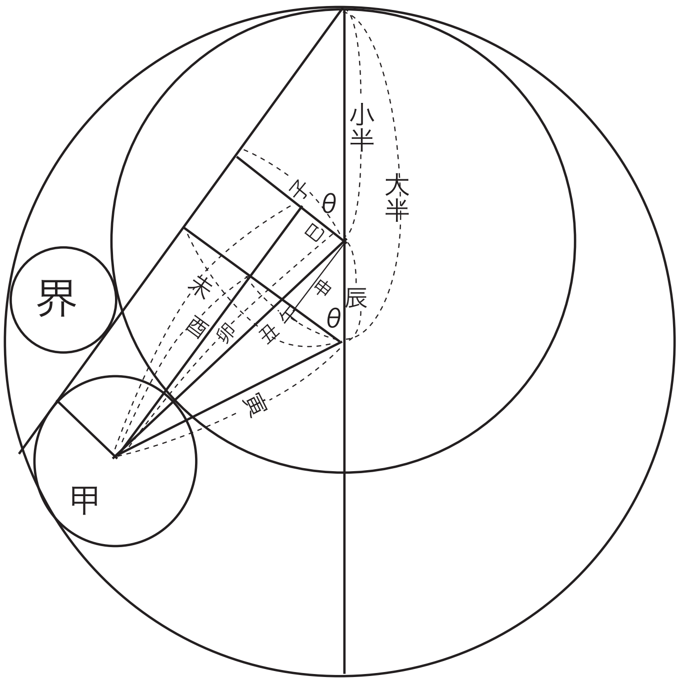
$$\frac{地 \pm \sqrt{(大 - 小 - 界)(大 - 小)(大 + 小)}}{2} := \frac{子率}{甲率}$$

$$\frac{子率}{甲率} \times 人 - 界率 := \frac{丑率}{乙率}$$

$$\frac{丑率}{乙率} \times 人 - \frac{子率}{甲率} := \frac{寅率}{丙率}$$

$\frac{\text{寅率}}{\text{丙率}}\times\text{人}-\frac{\text{丑率}}{\text{乙率}}:=\frac{\text{卯率}}{\text{丁率}}$

$$\text{其円径}=\left(\frac{\text{天}}{\text{其率}}\right)^2\times\text{界}$$



【術解】率 $=\dfrac{\text{子}}{\frac{\text{小}}{2}}=\cos\theta$ とする.

$$\text{丑}=\frac{\text{大}}{2}\text{率}$$

$$\text{寅}=\frac{\text{大}}{2}-\frac{\text{甲}}{2}$$

$$\text{卯}=\frac{\text{小}}{2}+\frac{\text{甲}}{2}$$

$$\text{辰}=\frac{\text{大}}{2}-\frac{\text{小}}{2}$$

$$\text{巳}=\text{子}-\frac{\text{甲}}{2}=\frac{\text{小}}{2}\text{率}-\frac{\text{甲}}{2}$$

$$\text{午}=\text{丑}-\frac{\text{甲}}{2}=\frac{\text{大}}{2}\text{率}-\frac{\text{甲}}{2}$$

$$\text{未}^2=\text{卯}^2-\text{巳}^2\qquad(\text{未}=\text{酉}+\text{申})\cdots①$$

$$\text{申}^2=\text{辰}^2-(\text{丑}-\text{子})^2=\text{辰}\sin\theta=\left(\frac{\text{大}}{2}-\frac{\text{小}}{2}\right)\sin\theta$$

$$\text{酉}^2=\text{寅}^2-\text{午}^2=\left(\frac{\text{大}}{2}-\frac{\text{甲}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{大}}{2}\cos\theta-\frac{\text{甲}}{2}\right)^2$$

①をちょっとだけ現代的に書くと

$$\left(\sqrt{\left(\frac{大}{2}-\frac{甲}{2}\right)^2-\left(\frac{大}{2}\cos\theta-\frac{甲}{2}\right)^2}+\left(\frac{大}{2}-\frac{小}{2}\right)\sin\theta\right)^2=\left(\frac{小}{2}+\frac{甲}{2}\right)^2-\left(\frac{小}{2}\cos\theta-\frac{甲}{2}\right)^2\cdots②$$

これより率 $(\cos\theta)$ を得る式をもとむ

$$\left\{(大-小)^2甲+4(大-小)\,大小\right\}\cos^2\theta-2(大-小)(大+小)\,甲\cos\theta+(大+小)^2甲-4(大-小)\,大小=0\cdots前式$$

是を対換して

$$\left\{(大-小)^2界+4(大-小)\,大小\right\}\cos^2\theta+2(大-小)(大+小)\,界\cos\theta+(大+小)^2界-4(大-小)\,大小=0\cdots后式$$

この后式は②の甲を界に対換した次の③より得られる．(＋，ーに注意)

$$\left(\sqrt{\left(\frac{大}{2}-\frac{界}{2}\right)^2-\left(\frac{大}{2}\cos\theta+\frac{界}{2}\right)^2}+\left(\frac{大}{2}-\frac{小}{2}\right)\sin\theta\right)^2=\left(\frac{小}{2}+\frac{界}{2}\right)^2-\left(\frac{小}{2}\cos\theta+\frac{界}{2}\right)^2\cdots③$$

后式 $-$ 前式 より

$$\sqrt{界}(大-小)\cos\theta+\sqrt{界}(大+小)+\left\{\sqrt{甲}(大-小)\cos\theta-\sqrt{甲}(大+小)\right\}=0\cdots定一式$$

后 $\times$ 甲 $-$ 前 $\times$ 界 より

$$大小\,(甲-界)\cos^2\theta+甲界\,(大+小)\cos\theta-大小\,(甲-界)=0\cdots二式$$

定一式と二式より維乗して $\cos\theta$ を消去すると $\sqrt{甲}:=X$ を得る式

$$\left(天^2+\frac{1}{4}(大+小)^2(大-小)\,界\right)X^2-天地\sqrt{界}X+天^2界=0 \qquad (天=大小，地=大^2+小^2)$$

按に此式は $\sqrt{甲}$ と $\sqrt{子}$ と交商也.

$$平積\,(判別式)=\frac{1}{4}\left\{(大^2+小^2)^2-4\,大^2小^2-(大+小)^2(大-小)\,界\right\}=\frac{1}{4}(大-小-界)(大-小)(大+小)^2$$

$$X=\sqrt{甲}=\frac{天\sqrt{界}}{\dfrac{地}{2}-\sqrt{平積}}\quad,\quad\sqrt{子}=\frac{天\sqrt{界}}{\dfrac{地}{2}+\sqrt{平積}}$$

$$\frac{地}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(大-小-界)(大-小)}(大+小):=甲率$$

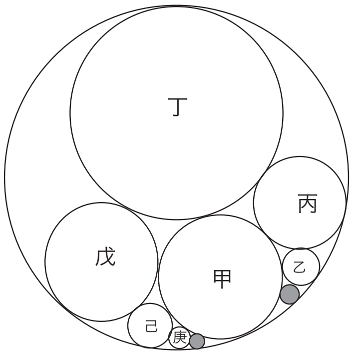
$$\therefore\quad 甲径=\left(\frac{天}{甲率}\right)^2界$$

一円を送り是を対換して

$$\sqrt{乙}=\frac{天\sqrt{甲}}{\dfrac{地}{2}-\sqrt{平積}}$$

$$\sqrt{界} = \frac{天\sqrt{甲}}{\frac{地}{2} + \sqrt{平積}}$$

$\boxed{143}$ 今図の如き円が有り，累円甲，乙，丙，・・・を入れる．外円径一百五十三寸，甲円径六十八寸，乙円径一十七寸のとき，累円径は各々幾らか．



答曰　丙円径三十六寸，　丁円径七十六寸五分，戊円径六十八寸，己円径三十〇寸六分，庚円径一十四寸 四十一分寸之三十八，辛円径八寸五分，此他畧之．

術曰 $天 := \dfrac{外}{甲}$

$$地 := 天 - 1$$

$$乙方 := \frac{外}{乙}$$

$$丙方 := 地 + 乙方 - 2\sqrt{乙方 \times 地 - 天}$$

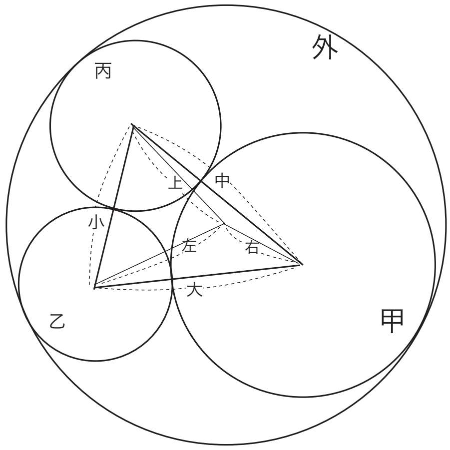
$$丁方 := 2(丙方 + 地) - 乙方$$

$$戊方 := 2(丁方 + 地) - 丙方$$

逐如此求之，$各円径 = \dfrac{外}{各方}$

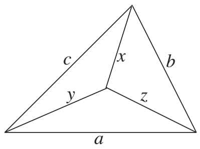
【術解】 $大斜 = \dfrac{甲 + 乙}{2}$，$中斜 = \dfrac{甲 + 丙}{2}$，$小斜 = \dfrac{乙 + 丙}{2}$

$右斜 = \dfrac{外 - 甲}{2}$，$左斜 = \dfrac{外 - 乙}{2}$，$上斜 = \dfrac{外 - 丙}{2}$



六斜術を使う (『点竄指南録』では六斜術を導く計算を書いているが省略する)

$$(y^2+z^2-a^2)^2x^2+(x^2+z^2-b^2)^2y^2+(x^2+y^2-c^2)^2z^2=(y^2+z^2-a^2)(x^2+z^2-b^2)(x^2+y^2-c^2)-4x^2y^2z^2$$



$a=$ 大斜, $b=$ 中斜, $c=$ 小斜, $x=$ 上斜, $y=$ 左斜, $z=$ 右斜 として上の六斜術に代入して，丙の二次方程式にする．

$$\text{乙}^2\text{外}^2\text{甲}^2+\text{丙}(-2\,\text{乙}^2\text{外}^2\text{甲}+2\,\text{乙}^2\text{外甲}^2-2\,\text{乙外}^2\text{甲}^2)+\text{丙}^2(\text{乙}^2\text{外}^2+2\,\text{乙}^2\text{外甲}-2\,\text{乙外}^2\text{甲}+\text{乙}^2\text{甲}^2+2\,\text{乙外甲}^2+\text{外}^2\text{甲}^2)=0\cdots ①$$

これは丙径と黒径との交商式なり． $\dfrac{\text{外}}{\text{甲}}:=\text{天}$, $\text{天}-1:=\text{地}$, $\dfrac{\text{外}}{\text{乙}}:=\text{乙方}$ とすると

$$1-2(\text{地}+\text{乙方})Y+\left\{-2\,\text{地}\cdot\text{乙方}+(\text{天}+1)^2+\text{乙方}^2\right\}Y^2=0$$

此開出商は $\dfrac{\text{丙}}{\text{外}}$ 也 亦 $\dfrac{\text{黒}}{\text{外}}$ 也. $\left(Y=\dfrac{X}{\text{外}}\right)$

$$\text{平積 (判別式)}=(\text{地}+\text{乙方})^2-\left\{-2\,\text{地}\cdot\text{乙方}+(\text{天}+1)^2+\text{乙方}^2\right\}=4(\text{地}\cdot\text{乙方}-\text{天})$$

$$\text{丙径}=\frac{\text{外}}{\text{乙方}+\text{地}-\sqrt{\text{平積}}}$$

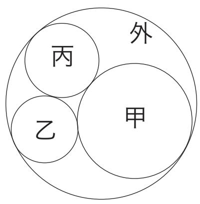
$$\text{黒径}=\frac{\text{外}}{\text{乙方}+\text{地}+\sqrt{\text{平積}}}$$

一円を送り是を対換して

$$\text{丁径}=\frac{\text{外}}{\text{丙方}+\text{地}-\sqrt{\text{平積}}}$$

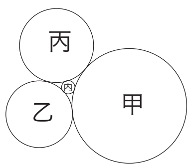
$$\text{乙径}=\frac{\text{外}}{\text{丙方}+\text{地}+\sqrt{\text{平積}}}$$

デカルトの定理



$$2\left(\frac{1}{\text{甲}^2}+\frac{1}{\text{乙}^2}+\frac{1}{\text{丙}^2}+\frac{1}{\text{外}^2}\right)=\left(\frac{1}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{乙}}+\frac{1}{\text{丙}}-\frac{1}{\text{外}}\right)^2\cdots ②$$

$$2\left(\frac{1}{\text{甲}^2}+\frac{1}{\text{乙}^2}+\frac{1}{\text{丙}^2}+\frac{1}{\text{内}^2}\right)=\left(\frac{1}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{乙}}+\frac{1}{\text{丙}}+\frac{1}{\text{内}}\right)^2\cdots ③$$



デカルトの定理②を使っても①が得られる．

$\boxed{試数}$ $天 = \dfrac{外}{甲} = \dfrac{153}{68} = 2.25$

$地 = 天 - 1 = 2.25 - 1 = 1.25$

$乙方 = \dfrac{外}{乙} = \dfrac{153}{17} = 9$

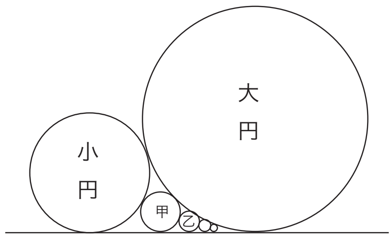
$丙方 = 地 + 乙方 - 2\sqrt{乙方 \times 地 - 天} = 1.25 + 9 - 2\sqrt{9 \times 1.25 - 2.25} = 1.25 + 9 - 6 = 4.25$

$\therefore\quad 丙径 = \dfrac{外}{丙方} = \dfrac{153}{4.25} = 36$

$丁方 = 2(丙方 + 地) - 乙方 = 2 \times 4.25 + 2 \times 1.25 - 9 = 2$

$\therefore\quad 丁径 = \dfrac{外}{丁方} = \dfrac{153}{2} = 76.5$

$\boxed{144}$ 今図の如く，大小円が交わる隙間に累円甲，乙，丙,・・・をいれる．大円径三十六寸，小円径九寸のとき，各累円径は幾らか．



答曰　甲円径四寸，乙円径二寸二分五厘，丙円径一寸四分四厘，丁円径一寸，戊円径四十九分寸之三十六，此他畧之．

術曰　$其円径 = \dfrac{大}{\left(\sqrt{\dfrac{大}{小}} + n\right)^2}$　　　(n は累円数)

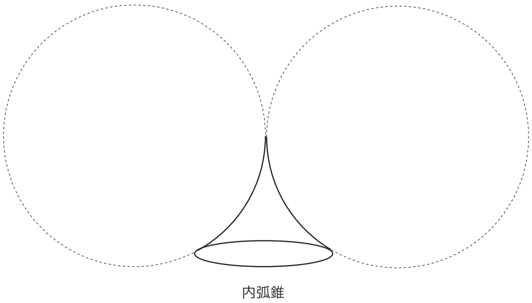
【術解】 $\dfrac{1}{\sqrt{天}} + \dfrac{1}{\sqrt{小}} = \dfrac{1}{\sqrt{甲}}$ $\sqrt{甲}$ を得る式

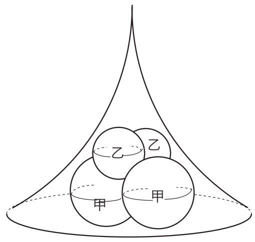
$$\sqrt{甲} = \frac{\sqrt{天}\sqrt{小}}{\sqrt{天} + \sqrt{小}} = \frac{\sqrt{天}}{1 + \dfrac{\sqrt{天}}{\sqrt{小}}}$$

小を甲に対換して $\sqrt{甲}$ を代入し，$\sqrt{乙}$ を得る式

$$\sqrt{乙} = \frac{\sqrt{天}}{1 + \dfrac{\sqrt{天}}{\sqrt{甲}}} = \frac{\sqrt{天}}{1 + \sqrt{天}\dfrac{\sqrt{天} + \sqrt{小}}{\sqrt{天}\sqrt{小}}} = \frac{\sqrt{天}}{2 + \dfrac{\sqrt{天}}{\sqrt{小}}}$$

$\boxed{145}$ 今内弧錐内に図の如く累球を容れる．但し 2 球毎に同球である．錐経と錐高が与えられたとき，各球径を問う．





答曰 天 $:= \dfrac{\text{錐径}}{2}$

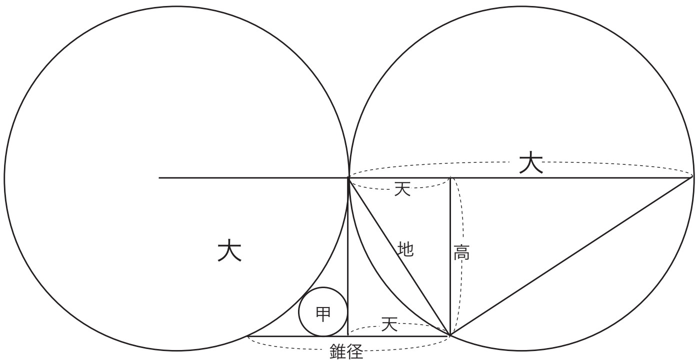
$\text{地} := \sqrt{\text{天}^2 + \text{高}^2}$

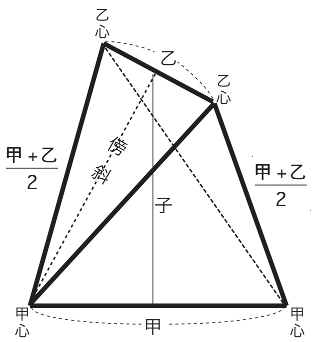
$\text{人} := \dfrac{\text{地}}{\text{天} + \text{高} - \text{地}}$

$\text{球数} = n \qquad (\text{甲球} = 1,\ \text{乙球} = 2,\ \cdots)$

$\text{其球径} = \dfrac{\text{地}}{\left(\dfrac{n-1}{\sqrt{2}} + \text{人}\right)^2 \text{天}}$

【術解】





錐の半径を天とする． $\text{地}^2 = \text{天}^2 + \text{高}^2$

天 : 地 = 地 : 大 より 大 $= \dfrac{\text{地}^2}{\text{天}} \quad \therefore \quad \sqrt{\text{天}} = \dfrac{\text{地}}{\sqrt{\text{大}}}$

$\sqrt{\text{甲天}} = \text{高} - \dfrac{\text{甲}}{2}$ だから，大を消して $X = \sqrt{\text{甲}}$ を得る式は

$2\,\text{高}\sqrt{\text{天}} - 2\,\text{地}\,X - \sqrt{\text{天}}X^2 = 0$

$X = \dfrac{\text{天} + \text{高} - \text{地}}{\sqrt{\text{天}}}$

$$定甲商 := \frac{\sqrt{天}}{甲方} \qquad \boxed{\frac{地}{天+高-地} := 人 := 甲方}$$

$$傍斜^2 = \left(\frac{甲+乙}{2}\right)^2 - \left(\frac{乙}{2}\right)^2 = \frac{甲^2+2\,甲乙}{4}$$

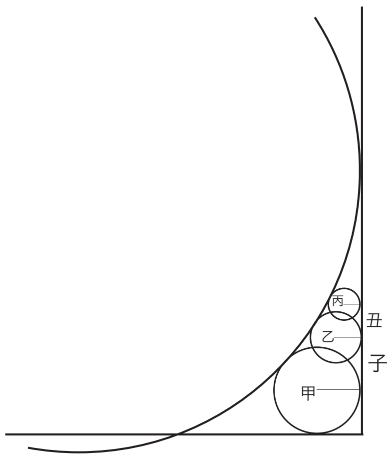
$$子^2 = 傍斜^2 - \left(\frac{甲}{2}\right)^2 = \frac{甲乙}{2}, \qquad \therefore \quad 子 = \frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{2}}$$

一方　$子 = \sqrt{甲天} - \sqrt{乙天}$　　　ゆえに，$Y = \sqrt{乙}$ を得る式は

$$\sqrt{天} - \left(\frac{\sqrt{天}}{\sqrt{甲}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) Y = 0$$

すなわち

$$\sqrt{天} - (人 + \frac{1}{\sqrt{2}}) Y = 0$$



甲→乙，乙→丙に対換して $丑 = \dfrac{\sqrt{乙丙}}{\sqrt{2}} = \sqrt{乙天} - \sqrt{丙天}$

$\sqrt{丙} = Z$ を得る式は

$$\sqrt{天} - \left(\frac{\sqrt{天}}{\sqrt{乙}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) Z = 0$$

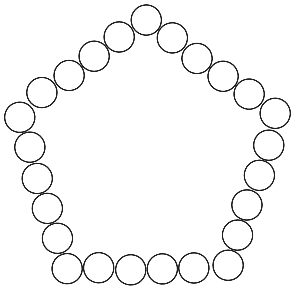
すなわち

$$\sqrt{天} - (人 + \frac{2}{\sqrt{2}}) Z = 0$$

$\sqrt{丁} = W$ を得る式は

$$\sqrt{天} - (人 + \frac{3}{\sqrt{2}}) W = 0$$

$\boxed{146}$ 今図のように碁子が並んでいる．(図は 1 面に碁子 6 コで五角形) 原数 (碁子数) はわからない．角数と原数を 1 面の碁子数で割った余りが与えられたとき，原数を得る術を問う．但 1 面の碁子数は角数より大きいとする．(薬師算)



術曰 (角數 + 余り − 1) × 角數 = 原數

【術解】1 面の碁子數 = x

$$原數 = 角數\,x - 角數 = (角 - 1)x + x - 角$$

よって，原数を x で割った商は 角 − 1 で 余り = x − 角

$\therefore \quad x = 角 + 余り$

よって，原數 = 角數 x − 角數 = (角數 + 余り − 1) × 角數

$\boxed{147}$ 今原數があり，その數はわからない．原數から奇数を累減すると余り 1，偶数を累減すると余りは 3 となった．原數は幾らか．(偶奇算)

答曰原数五個

術曰 原数 = (後余 − 前余)^2 + 前余 = $(3-1)^2 + 1 = 5$

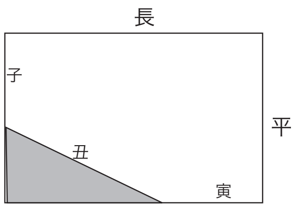
【術解】$\begin{cases} 前余 = 原数 - n^2 \cdots ① \\ 後余 = 原数 - n(n+1) \cdots ② \end{cases}$

$$① - ② より前余 - 後余 = n$$

$$原数 = 前余 + n^2 = 前余 + (前余 - 後余)^2$$

適盡法

$\boxed{148}$ 今図の如く長方形の一隅を截る．子一寸，丑二寸，寅一寸八分のとき，面積を最大にする長の長さを求めよ．(『続神壁算法』にあり)



答曰長三寸

術曰 長 = x ，x − 寅 := 乾

$$4\,子^2(丑^2 - 乾^2) = 寄左$$

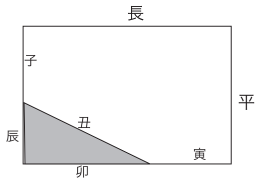
$$(2\,乾 \cdot x - 丑^2)^2 = 寄左$$

ゆえに，開方式

$$-丑^4+4\,丑^2子^2-4\,子^2寅^2+(-4\,丑^2寅+8\,子^2寅)x+(4\,丑^2-4\,子^2-4\,寅^2)x^2+8\,寅\,x^3-4x^4=0$$

を得，三乗方に之を開き長を得て合問.

【術解】



長 $=x$，面積 $=S$ とする.

$$卯=x-寅$$

$$辰^2=丑^2-(x-寅)^2$$

$$S=(子+辰)x-\frac{1}{2}辰\cdot卯$$

左右に分けて

$$辰\,(x+寅)=2(S-子\,x)$$

自乗して

$$辰^2(x+寅)^2=4(S-子\,x)^2$$

$$丑^2寅^2-寅^4-4S^2+(2\,丑^2寅+8\,子\,S)x+(丑^2-4\,子^2+2\,寅^2)x^2-x^4=0\cdots原矩合$$

原矩合を置き適盡法則に仍て，

$$2\,丑^2寅+8\,子\,S+2(丑^2-4\,子^2+2\,寅^2)x-4x^3=0\cdots后矩合$$

原矩合と后矩合より S を消去して (終結式)

$$(寅+x)^2\left\{丑^4-4\,丑^2子^2+4\,子^2寅^2+(4\,丑^2寅-8\,子^2寅)x+(-4\,丑^2+4\,子^2+4\,寅^2)x^2-8\,寅\,x^3+4x^4\right\}=0$$

数に換え

$$-12.96-14.4x-0.96x^2+14.4x^3-4x^4=0$$

$$-3.24-3.6x-0.24x^2+3.6x^3-x^4=0$$

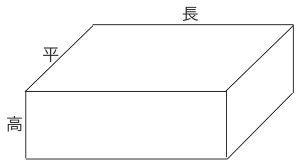
$$(x-3)(x-1.8)(x^2+1.2x+0.6)=0$$

故に本術のごとし.

適盡法

$\boxed{149}$ 今図の如く直方体がある．(長 + 平) × 長 = 96 寸 = 只，平 + 高 = 9 寸 = 又 のとき，体積を最大にする長は幾らか.

答曰長八寸，平四寸，高五寸



術曰 長 $=x$ とする．$(x^2+只)^2=$ 左寄

$$(4x+又\times 2)x^3=左寄$$

ゆえに開方式

$$只^2+2只x^2-2又x^3-3x^4=0$$

を得，三乗方に之を開き長を得て合問.
【術解】 平 $=\dfrac{只}{x}-x$

$$V=体積=x平高=x\left(\frac{只}{x}-x\right)\left(又-\frac{只}{x}-x\right)$$

$$-只^2+(又只-V)x+2只x^2-又x^3-x^4=0\cdots原矩合$$

適盡法則に仍て

$$又只-V+4只x-3又x^2-4x^3=0\cdots前矩合$$

原矩合と前矩合より V を消去して (終結式)

$$只^2+2只x^2-2又x^3-3x^4=0$$

を得る．左右に是を分け

$$只^2+2只x^2+x^4=2又x^3+4x^4$$

相消式とす．故に本術のごとし.

数に換え

$$9216+192x^2-18x^3-3x^4=0$$

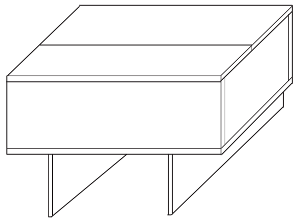
$$-3(-8+x)(384+48x+14x^2+x^3)=0$$

$$\therefore\quad x=8\qquad\qquad 384+48x+14x^2+x^3=0 \text{ は負解と虚解}$$

適盡法
$\boxed{150}$ 今長が 313.4 寸，幅 6 寸，厚 1 寸の板がある．図のような箱を作る．只云板の幅を箱の深さとする．又云足と横は等しいとする．このとき，体積を最大にする横は幾らか．但し竪割を許さず．横は之を截る毎に鋸道二分を損す．(『神壁算法』にあり)

答曰箱横 18 寸

術曰 (板長 − 5 鋸道) ÷ 2 := 天



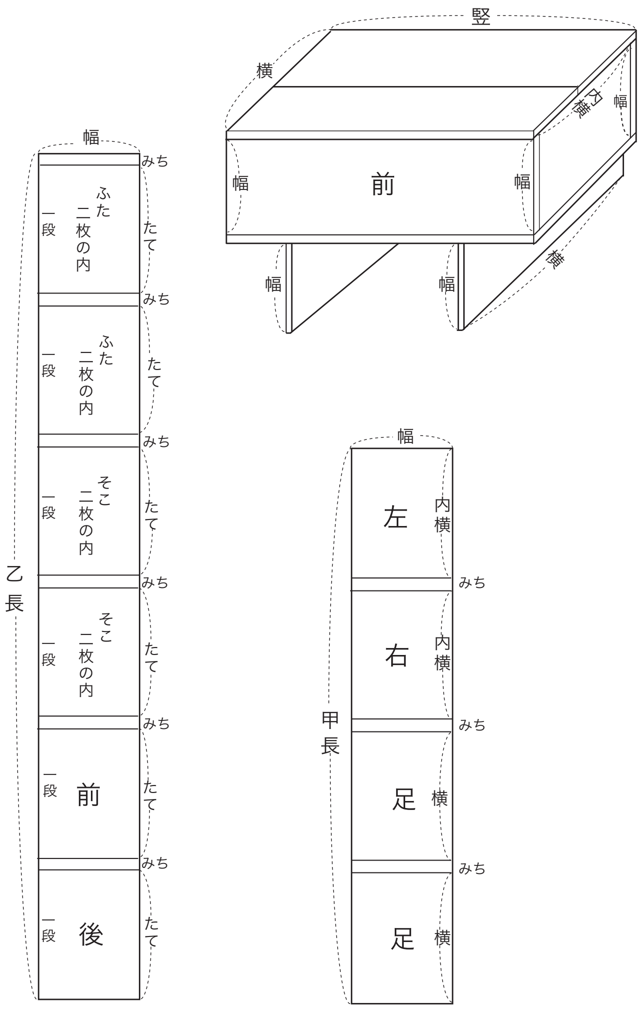
$$2\,厚 + 幅 := 地$$

$$\frac{天地}{(地 + 幅 + 鋸道)\,幅} = 14.6666\cdots\cdots = 15(不尽収之)$$

$$\sqrt{\frac{天地}{(地 + 幅 + 鋸道)\,幅}} = \sqrt{15} = 3.8729\cdots\cdots = 3(不尽棄之)$$

$$横 = 幅\sqrt{\frac{天地}{(地 + 幅 + 鋸道)\,幅}} = 幅 \times 3 = 6 \times 3 = 18$$

【術解】



題に云竪に截事をゆるさずと．しかる時は蓋は二枚か三枚か又は四枚五枚にもあれ，端はなき事明なり．仍て

今假に二枚剥の象を以解義をなす．横 $= x$, 体積 $= V$ とする．

$$\frac{x}{\text{幅}} = \text{幅段數} = \text{底段數}$$

$$\text{乙段數} = \frac{2x}{\text{幅}} + 2$$

$$\text{内横} = x - 2\,\text{厚}$$

$$\text{甲長} = 4x - 4\,\text{厚} + 3\,\text{道}$$

$$\text{乙長} = \text{長} - 4x + 4\,\text{厚} - 3\,\text{道}$$

$$\text{道} + \text{竪} = \frac{\text{長} - 4x + 4\,\text{厚} - 3\,\text{道}}{\text{乙段}}$$

$$\text{竪} = \frac{\text{長} - 4x + 4\,\text{厚} - 3\,\text{道}}{\text{乙段}} - \text{道}$$

$$\text{内竪} = \frac{\text{長} - 4x + 4\,\text{厚} - 3\,\text{道}}{\text{乙段}} - \text{道} - 2\,\text{厚}$$

$$V = \text{内竪} \times \text{内横} = \left(\frac{\text{長} - 4x + 4\,\text{厚} - 3\,\text{道}}{\text{乙段}} - \text{道} - 2\,\text{厚}\right)(x - 2\,\text{厚})$$

$$10\,\text{厚幅道} - 2\,\text{厚幅長} - 2\,\text{幅}\,V + (8\,\text{厚}^2 + 8\,\text{厚幅} + 4\,\text{厚道} - 5\,\text{幅道} + \text{幅長} - 2V)x + (-4\,\text{厚} - 4\,\text{幅} - 2\,\text{道})x^2 = 0 \cdots \text{原矩合}$$

適盡法則に仍て

$$(8\,\text{厚}^2 + 8\,\text{厚幅} + 4\,\text{厚道} - 5\,\text{幅道} + \text{幅長} - 2V) + 2(-4\,\text{厚} - 4\,\text{幅} - 2\,\text{道})x = 0 \cdots \text{前矩合}$$

原矩合と前矩合より V を消去して (終結式)

$$(-8\,\text{厚}^2\text{幅} - 8\,\text{厚幅}^2 + 6\,\text{厚幅道} + 5\,\text{幅}^2\text{道} - 2\,\text{厚幅長} - \text{幅}^2\text{長}) + 4(2\,\text{厚} + 2\,\text{幅} + \text{道})\,\text{幅}\,x + 2(2\,\text{厚} + 2\,\text{幅} + \text{道})x^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\text{平積} &= (2\,\text{厚} + 2\,\text{幅} + \text{道})^2\text{幅}^2 - 2(2\,\text{厚} + 2\,\text{幅} + \text{道})(-8\,\text{厚}^2\text{幅} - 8\,\text{厚幅}^2 + 6\,\text{厚幅道} + 5\,\text{幅}^2\text{道} - 2\,\text{厚幅長} - \text{幅}^2\text{長})\\ &= 2\,\text{幅}\,(2\,\text{厚} + \text{幅})(2\,\text{厚} + 2\,\text{幅} + \text{道})(4\,\text{厚} + 4\,\text{幅} - 3\,\text{道} + \text{長})\end{aligned}$$

終結式を天，地，人を使ってかくと　$\boxed{\text{人} = \text{地} + \text{幅} + \text{道}}$

$$(\text{天地幅} + 2\,\text{人厚幅}) - 2\,\text{人幅}\,x - \text{人}\,x^2 = 0$$

人幅で割って

$$\left(\frac{\text{天地}}{\text{人}} + 2\,\text{厚}\right) - 2x - \frac{x^2}{\text{幅}} = 0$$

だから

$$\text{平積} = \frac{1}{\text{幅}}\left(\frac{\text{天}}{\text{人}} + 1\right)\text{地}$$

となり，

$$\text{横} = \text{幅}\sqrt{\text{平積}} - \text{幅}$$

数に換え

$$-540+12x+x^2=0, \qquad (-18+x)(30+x)=0, \qquad \therefore \quad x=18$$

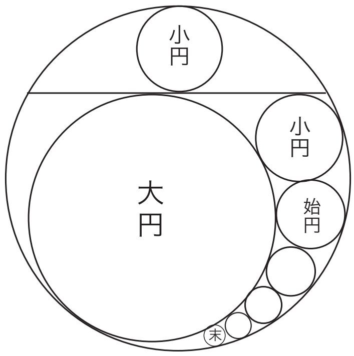
これで答は合うが，術文と合わない．術文の〈不尽収之〉〈不尽棄之〉とは何か．何故此題の術に限りて不尽の事を云か

$$平積 = ㋑\frac{天地}{人幅} + \boxed{㋺\frac{2厚}{幅} + ㋩1}$$

此㋺は一ヶにたらず．㋩を加へて一ヶ余となるゆへ此㋺㋩の二位をすてゝ㋑を直に平積とするゆへ其数よりはすくなしとしるゆへ不尽をおさめて平積実とする也．

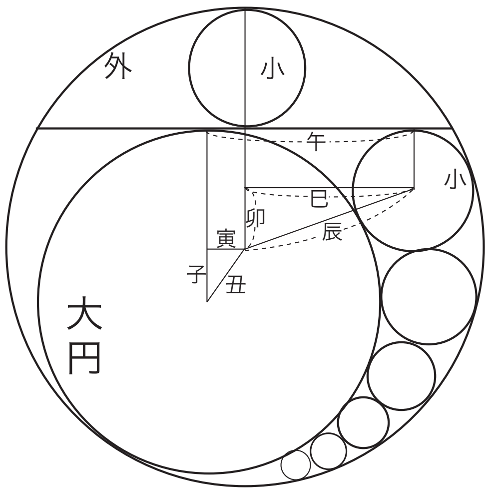
平方に開き内方半をげんじて $\sqrt{平積}-1$
かくの如く平商の内一ヶをげんずへき理なれとも平商も其数より少しすくなきゆへ不尽をすてゝ一ヶをげんするにかゆる也．故に本術のごとし．

$\boxed{151}$ 今円内に弦を隔てて大円 1 個，小円 2 個，累円その総計を知らず．(図は 5 箇をかく) 大円径 100 寸，小円径 25 寸，末円径 4 寸であるとき累円総計は幾らか．



答曰総計 9 個

【術解】



$$子 = 小 + \frac{大}{2} - \frac{外}{2}$$

$$丑 = \frac{外}{2} - \frac{大}{2}$$

$$卯 = \frac{外}{2} - \frac{3}{2}小$$

$$辰 = \frac{外}{2} - \frac{小}{2}$$

$$午 = \sqrt{大小}$$

$$寅 = \sqrt{丑^2 - 子^2} = \sqrt{外大 - 大小 - 小^2}$$

$$巳 = 午 - 寅 = \sqrt{大小} - \sqrt{外大 - 大小 - 小^2}$$

これらを $卯^2 + 巳^2 = 辰^2$ へ代入して

$$\left(\frac{外}{2} - \frac{3}{2}小\right)^2 + \left(\sqrt{大小} - \sqrt{外大 - 大小 - 小^2}\right)^2 = \left(\frac{外}{2} - \frac{小}{2}\right)^2$$

展開整理して

$$4\,外大 = (2\,大 + 小)^2$$

143 番でやったように，(デカルトの円公式，六斜術)

$$甲 = \frac{外}{小方 + 地 + \sqrt{平積}}$$

ここで，$小方 = \dfrac{外}{小}$，　$地 = \dfrac{外}{大} - 1$

$$平積 = 4\,小方 \cdot 地 - 4\frac{外}{大} = \frac{外小}{大^2} \qquad \left(\because \quad 外 = \frac{(2\,大 + 小)^2}{4\,大}\right)$$

$$\therefore \quad 甲 = \frac{外}{小方 + 地 + \dfrac{\sqrt{外小}}{大}} \qquad \cdots(前式)$$

甲と小は交商だから

$$小 = \frac{外}{甲方 + 地 - \dfrac{\sqrt{外甲}}{大}}$$

すなわち

$$小方 = 甲方 + 地 - \frac{\sqrt{外甲}}{大}$$

ゆえに

$$乙方 = 甲方 + 地 + \frac{\sqrt{外甲}}{大} = 甲方 + 地 + (甲方 + 地 - 小方) = 2\,甲方 + 2\,地 - 小方$$

同當解中逐て方級を求る術理を推て

$$丙方 = 2\,乙方 + 2\,地 - 甲方$$

$$丁方 = 2\,丙方 + 2\,地 - 乙方$$

$$戊方 = 2\,丁方 + 2\,地 - 丙方$$

順に代入して

$$乙方 = 2\,甲方 + 2\,地 - 小方$$

$$丙方 = 3\,甲方 + 6\,地 - 2\,小方$$

$$丁方 = 4\,甲方 + 12\,地 - 3\,小方$$

$$戊方 = 5\,甲方 + 20\,地 - 4\,小方$$

逐て此ごとし．方を見るに　甲方の係数は円数 (n)，地の係数は 円数 -1 を底とする圭垜積 $(1+2+3+\cdots(n-1))$ の 2 倍，小方の係数は 円数 -1

従って，

$$末方 = n\,甲方 + n(n-1)\,地 - (n-1)\,小方$$

$$\frac{外}{末} = n\frac{外}{甲} + n(n-1)\left(\frac{外}{大} - 1\right) - (n-1)\frac{外}{小} \quad (後式)$$

前式と後式より甲を消去すると

$$\begin{aligned}&4\,大^3小 + 4\,大^2小^2 + 大小^3 - 4\,大^3末 - 4\,大^2小末 - 大小^2末\\&\qquad - 2\,小\sqrt{大小}(2\,大 + 小)\,末\,n - 4\,大小^2末\,n^2 - 小^3末\,n^2 = 0\end{aligned}$$

数字になおして

$$-1701 + 36n + 17n^2 = 0$$

$$(-9+n)(189+17n) = 0$$

$$\therefore \quad n = 9$$

$\boxed{152}$ 7 文字から重複を許して 5 文字とって並べるとき，並べ方の総数は幾何．(全部同じ文字ではない)

題解云，2 文字をとって 5 つに並べる，3 文字をとって 5 つに並べる，4 文字をとって 5 つに並べる，5 文字をとって 5 つに並べる，この 4 通りの場合の数を合計した変数也．

術日 $7^5 - 7 = 16800$

【術解】此題本法の適等なし故に歩索術を以是を施す．たとへば，字数二，連数三は

122	
211	
121	
212	
112	
221	
111	虚数
222	虚数

虚実合八変

此題二字相乗よりはじまるゆへ，一字をつらぬる者は不用なりといへども逐索の易（やすき）がゆへに假に是を加へ求るなり．即白字の分は虚数なり．

$\boxed{153}$ 7 文字から重複を許して 5 文字取る組合せの総数は幾何．

術曰 ${}_7H_5 = {}_{7+5-1}C_5 = {}_{11}C_5 = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$

【術解】此題も前題の如く本法の適等なし故に歩索術を用ゆ．

たとへば，字数四，連数三は

111
222
333
444
112
113
114
221
223
224
331
332
334
441
442
443
123
124
134
234

合二十変

$\boxed{154}$ 今 10 種類の薬がある．この中から何種類かをとって混ぜて 1 つの薬を処方するとき，210 通りの処方薬ができた．また，選ぶ種類の数を 1 つ増やすと 252 通りの薬ができた．選び出した薬の数は幾らか．

答曰最初は 4 種類，後は 5 種類

術曰 $\dfrac{10}{\dfrac{252}{210}+1} = 4$ (不尽常棄之)

【術解】10 箇のものから n の取り方の総数は ${}_{10}C_n = \dfrac{10 \cdot 9 \cdots (11-n)}{n!}$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdots (11-n)}{n!} = 210 \cdots ①$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdots (10-n)}{(n+1)!} = 252 \cdots ②$$

② ÷①より

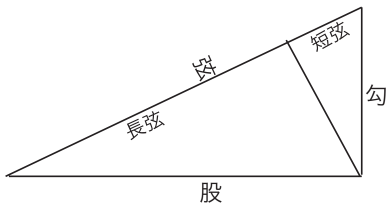
$$\frac{11-n}{n+1}=\frac{252}{210}$$

$$\left(\frac{252}{210}+1\right)n=10$$

$$n=\frac{10}{\frac{252}{210}+1}=4$$ 故に本術の如し．

歟題術

$\boxed{155}$ 今図の如き勾股がある．勾かまたは股のどちらかの長さが与えられている．長弦かまたは短弦のどちらかの長さがあたえられている．弦の長さはいくらか．



〔今有如図勾股内容中勾不知勾歟股歟其寸一十五寸又云不知長弦歟短弦歟其寸九寸問弦如何〕

術曰 弦 $=x$ として 開方式 $(x^2-只^2)$ 只$^2=(x-又)$ 又 x^2 を立て，立方に之を開き弦を得る．

【術解】按に此題は題数に四変あり．

只云数を勾とし，又云数を長弦とする者 一変

只云数を股とし，又云数を長弦とする者 一変

只云数を勾とし，又云数を短弦とする者 一変

只云数を股とし，又云数を短弦とする者 一変

此の如く四変あり．故に別々に適等を求る時は空数四件を得る也．其四件の空数遍相乗して定空数とし是を以弦を得る式を求る時はいづれの数を題に用ひても其数を得る也．此類の題いづれも是に准じて術路を求むべし．

第一 只云数を勾と見，又云数を長弦と見て術を起す．

弦 : 勾 = 勾 : 短弦 より 短弦 $=\dfrac{勾^2}{弦}$ だから 弦 $-$ 長弦 $=\dfrac{勾^2}{弦}$ すなわち

$$只^2-弦^2+弦\cdot長弦=0\cdots(一矩合)$$

第二 只云数を股と見，又云数を長弦と見て術を起す．

股 : 長弦 = 弦 : 股 より 股^2 = 弦 $\cdot$ 長弦 だから

$$只^2-弦\cdot長弦=0\cdots(二矩合)$$

一矩合 $\times$ 二矩合 より

$$只^4-弦^2長^2-弦^2只^2+弦^3長=0\cdots前矩合$$

対換して

$$只^4-弦^2短^2-弦^2只^2+弦^3短=0\cdots 后矩合$$

前矩合では長が又云数，后矩合では短が又云数だから，

$$只^4-弦^2又^2-弦^2只^2+弦^3又=0\cdots 前矩合$$

$$只^4-弦^2又^2-弦^2只^2+弦^3又=0\cdots 后矩合$$

此前后矩合相乗して定矩合を求る也．然るに此矩合前后とも同象なるがゆへに相乗せず直に此矩合一件を以弦を得る式を求る也．弦を得る式

$$只^4-(又^2+只^2)弦^2+又弦^3=0$$

数を推て是を示す．下式の如し．各弦五寸を得る也．

$$81-19.24x^2+3.2x^3=0 \quad (勾=3，長弦=3.2)$$

$$256-26.24x^2+3.2x^3=0 \quad (股=4，長弦=3.2)$$

$$81-12.24x^2+1.8x^3=0 \quad (勾=3，短弦=1.8)$$

$$256-19.24x^2+1.8x^3=0 \quad (股=4，短弦=1.8)$$

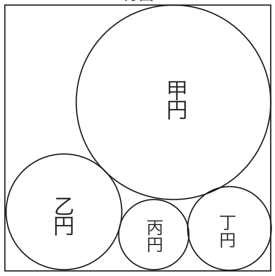
左右に分け

$$只^2弦^2-只^4=又弦^3-又^2弦^2$$

故に本術のごとし．

歟題術

$\boxed{156}$ 今正方形内に図のように 4 円を容れる．甲円径か乙円径か丁円径かどれかわからないが，その円径が与えられている．方面は幾らか．



術曰 $\boxed{赤=0.5+\sqrt{0.75}(\sqrt{2}-1)}$ $\boxed{白=赤^2}$ $\boxed{青=\sqrt{2}-1}$ $\boxed{黄=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$ $\boxed{黒=(\sqrt{2}-赤)^2}$

$x=$ 方面 とする．

$$云数-黒\,x:=寄位$$

$$(黄\, x - 云数)^2 \times 寄位 := 寄左$$

開方式

$$(白 - 黄)^2 x^2 \times 寄位 = 寄左$$

を得，之を立方に開き方面を得て合問.

【術解】按に此題も前の類題なり．只云数を甲円径と見て 矩合一件
又乙円径と見て 矩合一件
又丁円径と見て 矩合一件
右三件の矩合相乗して方面を得る式を求る時はいづれの円径を題に用ひても真数を得る也.
先假に方面を有として甲乙丙丁の四円を求む.

$$子 = \sqrt{甲丁}$$

$$丑 = \sqrt{乙丙}$$

$$寅 = \sqrt{丙丁}$$

$$2\,方 = 甲 + 丁 + 2\sqrt{甲丁}$$

$$\sqrt{2\,方} = \sqrt{甲} + \sqrt{丁} \cdots (一矩合)$$

$$卯 = 寅 + \frac{丁}{2} - \frac{甲}{2} = \sqrt{丙丁} + \frac{丁}{2} - \frac{甲}{2}$$

$$辰 = 子 + \frac{丁}{2} - \frac{丙}{2} = \sqrt{甲丁} + \frac{丁}{2} - \frac{丙}{2}$$

$卯^2 + 辰^2 = \left(\dfrac{甲}{2} + \dfrac{丙}{2}\right)^2$ へ代入して

$$丁^2 + 丁丙 + 2\,丁\sqrt{丁丙} + 丁甲 - 丙甲 - 2\sqrt{丁丙}甲 + 2\,丁\sqrt{丁甲} - 2\,丙\sqrt{丁甲} = 0$$

$$\left(\sqrt{甲丁} + 丁 - \sqrt{甲丙} + \sqrt{丙丁}\right)^2 - 2\,甲丙 = 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{甲丁} + 丁 - \sqrt{甲丙} + \sqrt{丙丁} - \sqrt{2\,甲丙} = 0 \cdots (二矩合)$$

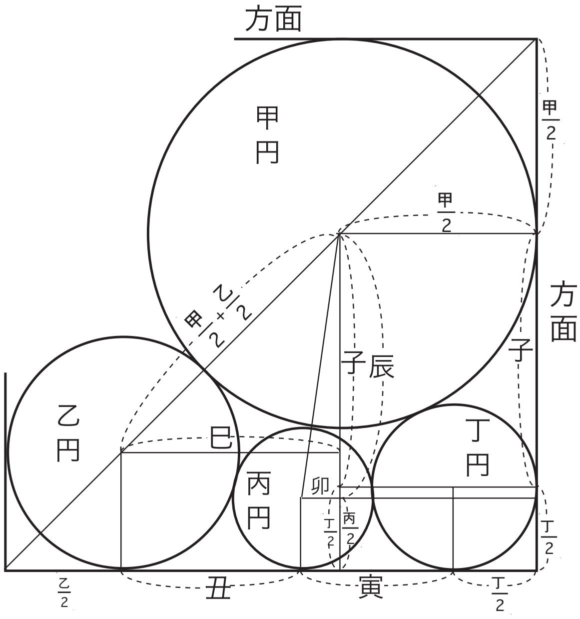
$方 = 丑 + 寅 + \dfrac{乙}{2} + \dfrac{丁}{2}$ だから

$$2\,方 = 2\sqrt{乙丙} + 2\sqrt{丙丁} + 乙 + 丁 \cdots (三矩合)$$

$巳 = 方 - \dfrac{乙}{2} - \dfrac{甲}{2}$ で，$\sqrt{2}巳 = \dfrac{甲}{2} + \dfrac{乙}{2}$ だから

$$\sqrt{2}\left(方 - \frac{乙}{2} - \frac{甲}{2}\right) = \frac{甲}{2} + \frac{乙}{2}$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{2}方 - 角甲 - 角乙 = 0 \cdots (四矩合) \qquad \boxed{角 = \sqrt{2} + 1}$$



(二矩合) $-$ (一矩合) $\times\sqrt{丁}$ より

$$\sqrt{丁}\sqrt{丙}+\sqrt{2}\sqrt{丁}\sqrt{方}-\sqrt{丙}\sqrt{甲}-\sqrt{2}\sqrt{丙}\sqrt{甲}\cdots 二式$$

(三矩合) $-$ (二矩合) より

$$\sqrt{丁}\sqrt{丙}+2\sqrt{丙}\sqrt{乙}+乙-2\,方-\sqrt{丁}\sqrt{甲}+\sqrt{丙}\sqrt{甲}+\sqrt{2}\sqrt{丙}\sqrt{甲}\cdots 三式$$

(一矩合) と二式より丁を消去

$$-\sqrt{丙}\sqrt{方}-\sqrt{2}方+\sqrt{2}\sqrt{丙}\sqrt{甲}+\sqrt{丙}\sqrt{甲}+\sqrt{方}\sqrt{甲}=0\cdots(五矩合)$$

(一矩合) と三式より丁を消去

$$2\sqrt{丙}\sqrt{乙}+乙+\sqrt{2}\sqrt{丙}\sqrt{方}-2\,方+\sqrt{2}\sqrt{丙}\sqrt{甲}-\sqrt{2}\sqrt{方}\sqrt{甲}+甲=0\cdots(六矩合)$$

(六矩合) $\times$ 角 $+$ (四矩合) $-$ (五矩合) より

$$\sqrt{丙}\sqrt{乙}+\sqrt{丙}\sqrt{方}-\sqrt{方}\sqrt{甲}=0\cdots 六式$$

六式と五矩合より丙を消去

$$\sqrt{2}\sqrt{乙}\sqrt{方}+\sqrt{2}方-\sqrt{乙}\sqrt{甲}-甲-\sqrt{2}甲=0\cdots 七矩合$$

七矩合と四矩合より乙を消去

$$3\,方^2-2\sqrt{2}方^2+4\,方^{3/2}\sqrt{甲}-4\sqrt{2}方^{3/2}\sqrt{甲}+3\,方甲+\sqrt{2}\sqrt{方}甲^{3/2}-2\,甲^2-\sqrt{2}甲^2=0$$

逐上 $\sqrt{方}$ をはぶき $\left(X=\dfrac{\sqrt{甲}}{\sqrt{方}}\right)$

$$3-2\sqrt{2}-4(\sqrt{2}-1)X+3X^2+\sqrt{2}X^3-(\sqrt{2}+2)X^4=0$$

$$\left\{3-2\sqrt{2}+(1-2\sqrt{2})X+(2+2\sqrt{2})X^2-(2+\sqrt{2})X^3\right\}(X+1)=0$$

$$\left\{1-\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})X-(2+\sqrt{2})X^2\right\}(X-\sqrt{2}+1)(X+1)=0$$

$$\therefore\quad 1-\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})X-(2+\sqrt{2})X^2=0$$

$$\therefore\quad X=0.5+\sqrt{0.75}(\sqrt{2}-1):=\text{赤}$$

$$\therefore\quad \text{甲}=\left\{0.5+\sqrt{0.75}(\sqrt{2}-1)\right\}^2\text{方}:=\text{白方}$$

精要算法下巻三十番之別術也

$\boxed{\text{赤}=0.5+\sqrt{0.75}(\sqrt{2}-1)}$ $\boxed{\text{白}=\text{赤}^2}$ $\boxed{\text{青}=\sqrt{2}-1}$ $\boxed{\text{黄}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$ $\boxed{\text{黒}=(\sqrt{2}-\text{赤})^2}$

$$\text{白方}-\text{甲}=0\cdots(\text{甲空数})$$

$$2\,\text{黄方}-\text{白方}-\text{乙}=0\cdots(\text{乙空数})$$

$$-\text{丁}+\text{黒方}=0\cdots(\text{丁空数})$$

題に曰只云甲円径か乙円径か丁円径かしらずと云．故に甲乙丁の三円各只云数にかへ

$$\text{白方}-\text{只}=0\cdots(\text{甲空数})$$

$$2\,\text{黄方}-\text{白方}-\text{只}=0\cdots(\text{乙空数})$$

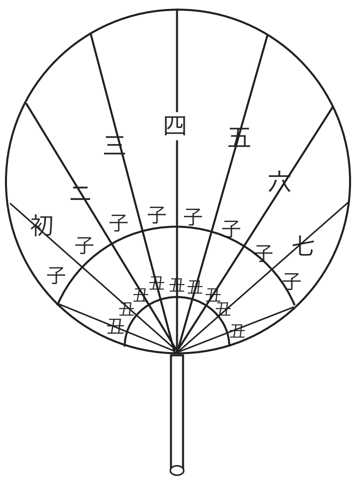
$$-\text{只}+\text{黒方}=0\cdots(\text{丁空数})$$

甲空数×乙空数×丁空数より

$$-(\text{白}-\text{黄})^2\text{方}^2(\text{只}-\text{黒方})+(\text{黄方}-\text{只})^2(\text{只}-\text{黒方})=0$$

五明算法

$\boxed{157}$ 今図のような団扇がある．団扇径，子，丑が与えられたとき，各線の長さを得る術を問う．但し，各線の偶奇多少に拘らない術を請う．



術曰 $\dfrac{\text{子}}{\text{丑}} := \text{乾}$

$$2 - \text{乾}^2 := \text{坤}$$

$$\text{初線} = \frac{\text{乾}\sqrt{(\text{坤}+2)(\text{径}^2 - \text{丑}^2)} + \text{丑坤}}{2}$$

$$\text{二線} = \text{初線} \cdot \text{坤} - \text{丑}$$

$$\text{三線} = \text{二線} \cdot \text{坤} - \text{初線}$$

逐如此求之合問

【術解】$\text{寅} = \dfrac{\text{子}^2}{2\,\text{丑}}$ (三斜の短股を得る術/余弦定理)

$$\text{辰} = \text{丑} - \text{寅} = \text{丑} - \frac{\text{子}^2}{2\,\text{丑}}$$

$$\text{中勾}^2 = \text{子}^2 - \text{寅}^2 = \text{子}^2 - \frac{\text{子}^4}{4\,\text{丑}^2}$$

$\text{面} \cdot \text{丑} = \text{中勾} \cdot \text{径}$ (円中三斜の矩合/正弦定理)

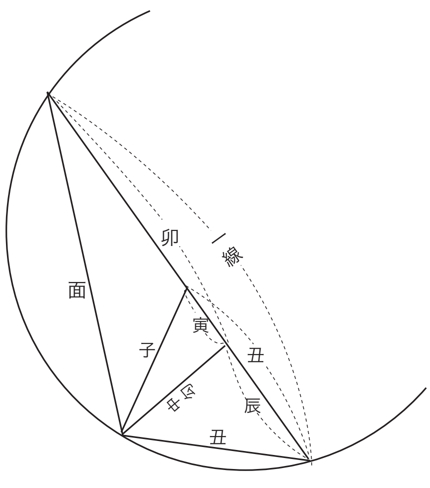
$$\text{面}^2 = \frac{\text{子}^2\text{径}^2}{\text{丑}^2} - \frac{\text{子}^4\text{径}^2}{4\,\text{丑}^4}$$

$$\text{卯}^2 = \text{面}^2 - \text{中勾}^2 = \frac{\text{子}^2\text{径}^2}{\text{丑}^2} - \frac{\text{子}^4\text{径}^2}{4\,\text{丑}^4} - \text{子}^2 + \frac{\text{子}^4}{4\,\text{丑}^2} = \frac{(\text{径}^2 - \text{丑}^2)\,\text{未}^2\text{子}^2}{4\,\text{丑}^2}$$

$$\text{卯} = \frac{\sqrt{\text{径}^2 - \text{丑}^2}\,\text{未子}}{2\,\text{丑}} \qquad \boxed{\text{未}^2 = 4 - \frac{\text{子}^2}{\text{丑}^2}}$$

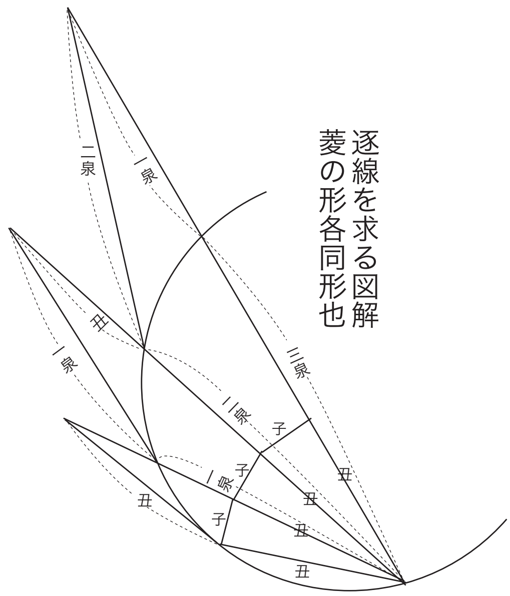
$$\text{一線} = \text{卯} + \text{辰} = \frac{\sqrt{\text{径}^2 - \text{丑}^2}\,\text{未子}}{2\,\text{丑}} + \text{丑} - \frac{\text{子}^2}{2\,\text{丑}} = \frac{\sqrt{\text{径}^2 - \text{丑}^2}\,\text{未乾}}{2} + \frac{\text{坤丑}}{2}$$

$$\boxed{\text{乾} = \frac{\text{子}}{\text{丑}}, \qquad \text{坤} = 2 - \text{乾}^2}$$



2 辰 = 菱長 (菱形の長い方の対角線),　丑 = 菱面 (菱形の一辺) とする．

$$\frac{2\,辰}{丑} = 2 - \frac{子^2}{丑^2} = \frac{菱長}{菱面} = 坤$$



二泉 = 一泉 · 坤 − 丑

三泉 = 二泉 · 坤 − 一泉

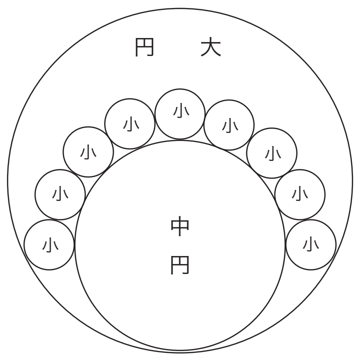
四泉 = 三泉 · 坤 − 二泉

五泉 = 四泉 · 坤 − 三泉

逐て此のごとし

丑 + 二泉 = 一泉 · 坤 一泉 + 三泉 = 二泉 · 坤 二泉 + 四泉 = 三泉 · 坤 逐て此のごとくし故に上位のごとし

$\boxed{158}$ 今大円の中に図のように中円一個と小円数個を容れる．(假に九個の図)　中円径と小円径が与えられたとき，小円個数に随って大円径を求める術を問う．



術曰 $天 := 中 + 小$，$地 := \dfrac{小}{天}$，$子 := 1$，$丑 := 4(子 - 地^2)$，$寅 := \dfrac{(丑 - 子)^2}{子}$，$卯 := \dfrac{(寅 - 子)^2}{丑}$，$辰 := \dfrac{(卯 - 子)^2}{寅}$

以下小円数奇偶による術

奇数のときは $大径 = \dfrac{中}{\dfrac{中}{小} - 地 \cdot 支} + 中$

$$偶数のときは\ 大径 = \left(\frac{2\,小}{\sqrt{天^2 - \left(小 \times \begin{cases} 二個のとき子 \\ 四個のとき\ (子 - 丑) \\ 六個のとき\ (丑 - 寅) \\ \vdots \end{cases} \right)^2 + (中 - 小)}} + 子 \right) \times 中径$$

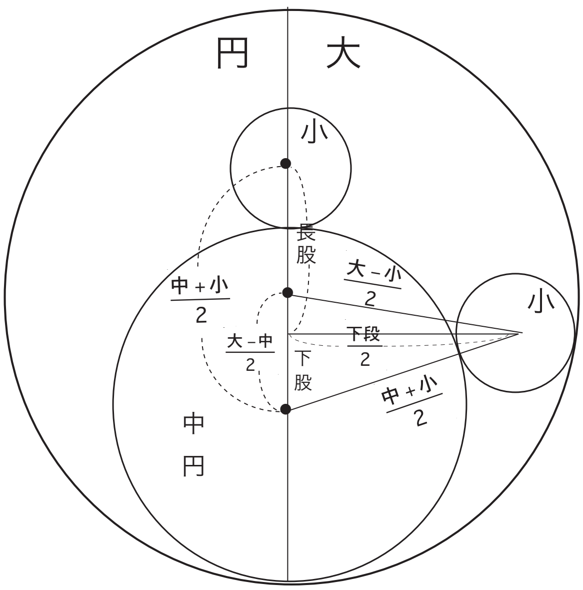
【術解】双股弦の術 (余弦定理) により

$$下股 \cdot (大 - 中) = \left(\frac{大 - 中}{2}\right)^2 + \left(\frac{中 + 小}{2}\right)^2 - \left(\frac{大 - 小}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad 下股 = \frac{-大中 + 中^2 + 中小 + 大小}{2(大 - 中)}$$

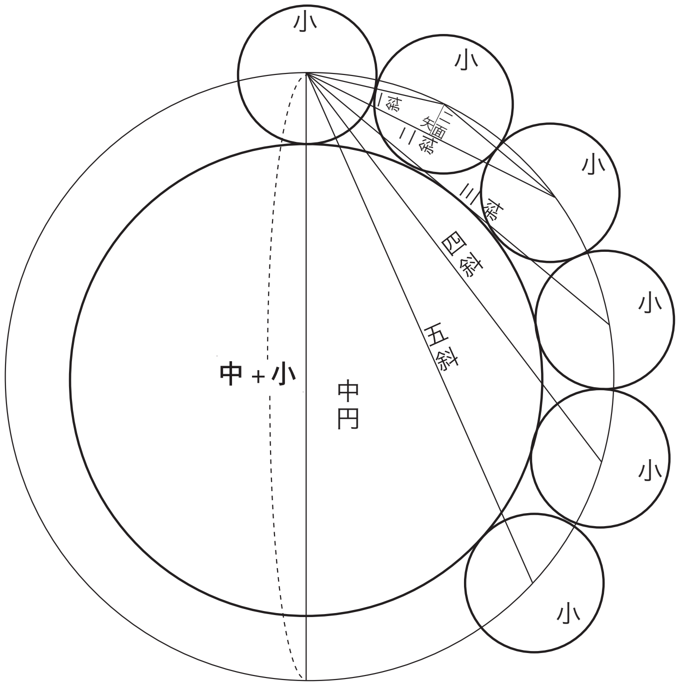
$$長股 = \frac{中 + 大}{2} - 下股 = 中 - \frac{中小}{大 - 中} \cdots 乾$$

$$下段^2 = \left(\frac{中 + 小}{2}\right)^2 - 下股^2 = \frac{4\,大^2中小 - 4\,大中^2小 - 4\,大中小^2}{(大 - 中)^2} \cdots 坤$$



〈円中三斜の中勾を求める術〉(正弦定理) により

$$\text{二面矢} = \frac{\text{小}^2}{\text{中} + \text{小}}$$



$$\text{二斜}^2 = 4(\text{小}^2 - \text{二面矢}^2) = 4\,\text{小}^2 - \frac{4\,\text{小}^4}{(\text{中} + \text{小})^2}$$

$$\text{三斜} = \frac{\text{二斜}^2 - \text{小}^2}{\text{小}}$$

$$\text{四斜} = \frac{\text{三斜}^2 - \text{小}^2}{\text{二斜}}$$

$$\text{五斜} = \frac{\text{四斜}^2 - \text{小}^2}{\text{三斜}}$$

$$\text{六斜} = \frac{\text{五斜}^2 - \text{小}^2}{\text{四斜}}$$

これを自乗して

$$\text{三斜}^2 = \frac{(\text{二斜}^2 - \text{小}^2)^2}{\text{小}^2}$$

$$\text{四斜}^2 = \frac{(\text{三斜}^2 - \text{小}^2)^2}{\text{二斜}^2}$$

$$\text{五斜}^2 = \frac{(\text{四斜}^2 - \text{小}^2)^2}{\text{三斜}^2}$$

$$\text{六斜}^2 = \frac{(\text{五斜}^2 - \text{小}^2)^2}{\text{四斜}^2}$$

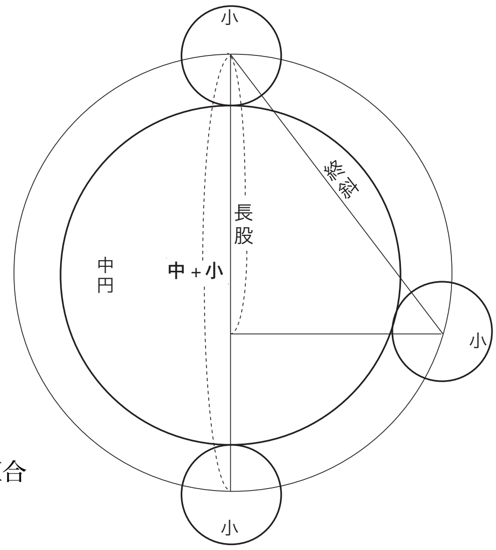
各是をくくり

$$一斜^2 = 小^2子, \quad 二斜^2 = 小^2丑, \quad 三斜^2 = 小^2寅, \quad 四斜^2 = 小^2卯, \quad 五斜^2 = 小^2辰, \quad 六斜^2 = 小^2巳$$

$\boxed{子 := 1}$ $\boxed{天 := 中 + 小}$ $\boxed{地 = \dfrac{小}{中 + 小}}$ $\boxed{丑 := 4 - \dfrac{4\,小^2}{(中 + 小)^2}}$ $\boxed{定丑 := 4\,子 - 4\,地^2}$ $\boxed{寅 := \dfrac{(子 - 丑)^2}{子}}$
$\boxed{卯 := \dfrac{(子 - 寅)^2}{丑}}$ $\boxed{辰 := \dfrac{(子 - 卯)^2}{寅}}$ $\boxed{巳 := \dfrac{(子 - 辰)^2}{卯}}$

■小円数奇数者

終斜冪は
小円三ヶをいるゝ時は $小^2子 = 一斜^2$
小円五ヶをいるゝ時は $小^2丑 = 二斜^2$
小円七ヶをいるゝ時は $小^2寅 = 三斜^2$
逐て此のごとし



$$長股 = \frac{終斜^2}{中 + 小}$$

乾と相消遍く大中差を乗じ

$$中 - \frac{中小}{大 - 中} = \frac{終斜^2}{中 + 小}$$

$$中\,(大 - 中) - 中小 - \frac{終斜^2(大 - 中)}{中 + 小} = 0 \cdots 奇数通矩合$$

$終斜^2$ を代入して

$$中\,(大 - 中) - 中小 - \frac{小^2子\,(大 - 中)}{中 + 小} = 0 \cdots 三個矩合$$

$$\therefore \quad 大 = \frac{中}{\dfrac{中}{小} - 地子} + 中$$

五ヶを容式

$$大 = \frac{中}{\dfrac{中}{小} - 地丑} + 中$$

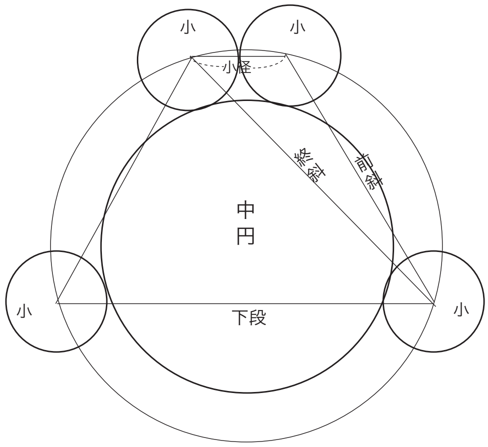
七ヶを容式

$$大 = \frac{中}{\dfrac{中}{小} - 地寅} + 中$$

逐て此のごとし

■小円数偶数者

$$下段^2 = \frac{(終斜^2 - 前斜^2)^2}{小^2}$$



小円二ヶをいるゝ時は $小^2 = 下段^2$

小円四ヶをいるゝ時は $小^2(子 - 丑)^2 = 下段^2$

小円六ヶをいるゝ時は $小^2(丑 - 寅)^2 = 下段^2$

小円八ヶをいるゝ時は $小^2(寅 - 卯)^2 = 下段^2$

逐て此の如く　各相消数とす.

坤と相消

$$\frac{4\,大^2中小 - 4\,大中^2小 - 4\,大中小^2}{(大 - 中)^2} = 小^2$$

遍小径をはぶき，除象を乗じ

$$4\,大^2中 - 4\,大中^2 - 大^2小 - 2\,大中小 - 中^2小 = 0 \cdots 二ヶ矩合$$

$$4\,中大^2 - (子 - 丑)^2小大^2 + 2(子 - 丑)^2中小大 - 4\,中^2大 - 4\,中小大 - (子 - 丑)^2中^2小 = 0 \cdots 四ヶ矩合$$

$$4\,中大^2 - (丑 - 寅)^2小大^2 + 2(丑 - 寅)^2中小大 - 4\,中^2大 - 4\,中小大 - (丑 - 寅)^2中^2小 = 0 \cdots 六ヶ矩合$$

大径を得る式

$$-中^2小 - (2\,中小 + 4\,中^2)\,大 + (4\,中 - 小)\,大^2 = 0 \cdots 二ヶを容式$$

$$-(子 - 丑)^2中^2小 + \left\{2(子 - 丑)^2中小 - 4\,中^2 - 4\,中小\right\}大 + (4\,中 - (子 - 丑)^2小)\,大^2 = 0 \cdots 四ヶを容式$$

商に中を立て

$$-4\,中^2小 + (4\,中^2 - 4\,中小)(大 - 中) + (4\,中 - 小)(大 - 中)^2 = 0 \cdots 二ヶを容変式$$

$$-4\,中^2小 + (4\,中^2 - 4\,中小)(大 - 中) + \left\{4\,中 - (子 - 丑)^2小\right\}(大 - 中)^2 = 0 \cdots 四ヶを容変式$$

各逐上中径二段をはぶき是をくゝり

$$-小 + 2(中 - 小)X + (4\,中 - 小)X^2 = 0 \cdots 二ヶを容定式$$

$$-小 + 2(中 - 小)X + \left\{4\,中 - (子 - 丑)^2小\right\}X^2 = 0 \cdots 四ヶを容定式$$

この解は $X = \dfrac{大 - 中}{2\,中}$ $\qquad \boxed{天 := 中 + 小}$

$$二ヶを容平積 = 天^2 - 小^2$$

$$四ヶを容平積 = 天^2 - (子 - 丑)^2 小^2$$

$$六ヶを容平積 = 天^2 - (丑 - 寅)^2 小^2$$

$$八ヶを容平積 = 天^2 - (寅 - 卯)^2 小^2$$

偶数の通式

$$-小 + \left\{\sqrt{平積} + (中 - 小)\right\} X = 0$$

$$\therefore \quad 大 = (2X + 子)\ 中$$

【番外　衰垜・方垜求積法】

衰垜積を求る法　各底子三ヶを用て術理をしめす

圭垜 (積) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{1}{2} n(n+1)$

三角衰垜 (積) $\displaystyle\sum 圭垜 = \sum \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{3!} n(n+1)(n+2)$

再乗衰垜 (積) $\sum 三角衰垜 = \sum \dfrac{1}{6} n(n+1)(n+2) = \dfrac{1}{4!} n(n+1)(n+2)(n+3)$

三乗衰垜 (積) $\sum 再乗衰垜 = \sum \dfrac{1}{4!} n(n+1)(n+2)(n+3) = \dfrac{1}{5!} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

四乗衰垜 (積) $\sum 三乗衰垜 = \sum \dfrac{1}{5!} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \dfrac{1}{6!} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$

実数と約法とに必等数あり．是を省時はいづれも約法一を得ると雖通術の意味解しがたきゆへ次に出す術文の如し．若其用に泣(のぞみ)て其積を求る時は乗除の等数を省て求る時は捷径なり．

方垜積を求る法

先図式に仍て段数をもとむ

平方垜	1	1				
立方垜	1	4	1			
三乗方垜	1	11	11	1		
四乗方垜	1	26	66	26	1	
五乗方垜	1	57	302	302	57	1

n−1 乗方垜から n 乗方垜の作り方

n−1 乗方垜	1	a	b	c	d	$\cdots$	1
n 乗方垜	1	$n+2a$	$(n-1)a+3b$	$(n-2)b+4c$	$(n-3)c+5d$		1

諸方垜積を求る図式

平方垜　＝三角衰垜積 + 三角衰垜積
立方垜　＝再乗衰垜積 +4 再乗衰垜積 + 再乗衰垜積
三乗方垜＝三乗衰垜積 +11 三乗衰垜積 +11 三乗衰垜積 + 三乗衰垜積
四乗方垜＝四乗衰垜積 +26 四乗衰垜積 +66 四乗衰垜積 +26 四乗衰垜積 + 四乗衰垜積
五乗方垜＝五乗衰垜積 +57 五乗衰垜積 +302 五乗衰垜積 +302 五乗衰垜積 +57 五乗衰垜積 + 五乗衰垜積
底子甲　底子 甲 -1　底子 甲 -2　底子 甲 -3　底子 甲 -4　底子 甲 -5

仮令ば底子五の立方垜積は幾何．$(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=?)$
答曰　積二百二十五箇

底子 5 の再乗衰垜 $= \dfrac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 70$

底子 4 の再乗衰垜 $= \dfrac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 35$

底子 3 の再乗衰垜 $= \dfrac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 15$

立方垜積 $= 70 + 4\times35 + 15 = 225$

拾璣算法に右方垜段数を得る図式を著といへどもその〵〵衰垜の責を乗する事及其底子数替りある事をしるさず．故に方垜式を作りても其積を得る事あたはず．今爰に委曲に是をしるす事前條のごとし．

増約術

$\boxed{159}$ $\left\{45 + 45\cdot\dfrac{2}{5} + 45\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + 45\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 + \cdots + 24\right\}\left(1 + \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right)$

極数幾何．
答曰 極数 一百三十二個
術曰 極数 $= (45\times5\div(5-2)+24)\times4\div(4-1) = 132$

【術解】 $\dfrac{\text{原数}}{1-\text{増数}} = \text{極数}$　$\dfrac{\text{原数}\cdot\text{分母}}{\text{分母}-\text{分子}} = \text{極数}$

但増数一ヶ以上なる者は極数なし．故に本術のごとし．

増約術

$\boxed{160}$ $589\times\left\{\underline{1} + \underline{4}\left(\dfrac{1}{5}\right) + \underline{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + \underline{20}\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 + \underline{35}\left(\dfrac{1}{5}\right)^4 + \underline{56}\left(\dfrac{1}{5}\right)^5 + \cdots\right\}$ 極数幾何．

＿ は三角 (衰) 垜積数
三角 (衰) 垜積数とは，

$\underline{1}$,
$1+3=\underline{4}$,
$1+3+6=\underline{10}$
$1+3+6+10=\underline{20}$
$1+3+6+10+15=\underline{35}$
$1+3+6+10+15+21=\underline{56}$

$$\text{圭垜積}\begin{cases}1+2=3\\1+2+3=6\\1+2+3+4=10\\1+2+3+4+5=15\\1+2+3+4+5+6=21\end{cases}$$

答曰 極数 一線四百三十七個二百五十六箇之二百五十三

術曰 $\text{極数}=589\div\left(\dfrac{5-1}{5}\right)^4=1437\dfrac{253}{256}$

【術解】術意起源

$\text{極数}=\text{原}+\text{原}\cdot\text{増数}+\text{原}\cdot\text{増数}^2+\text{原}\cdot\text{増数}^3+\text{原}\cdot\text{増数}^4+\text{原}\cdot\text{増数}^5+\text{原}\cdot\text{増数}^6+\cdots:=\text{天}$

$\text{極数}\cdot\text{増数}=\text{原}\cdot\text{増数}+\text{原}\cdot\text{増数}^2+\text{原}\cdot\text{増数}^3+\text{原}\cdot\text{増数}^4+\text{原}\cdot\text{増数}^5+\text{原}\cdot\text{増数}^6+\text{原}\cdot\text{増数}^7\cdots:=\text{地}$

$\text{天}-\text{地}$ より $\text{極数}-\text{極数}\cdot\text{増数}=\text{原数}$

故に $\text{極数}=\dfrac{\text{原数}}{\text{甲}}$ $\boxed{\text{甲}=1-\text{増数}}$

假令ば増数を以是を増に圭垜数 (1，2，3，4，5，6，・・・) をかけんとする時は其極数の象

$\text{極数}=\text{原}+2\,\text{原}\cdot\text{増}+3\,\text{原}\cdot\text{増}^2+4\,\text{原}\cdot\text{増}^3+5\,\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots$

是を分

$$\text{木}=\text{原}+\text{原}\cdot\text{増}+\text{原}\cdot\text{増}^2+\text{原}\cdot\text{増}^3+\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots=\frac{\text{原}}{\text{甲}}$$

$$\text{火}=\text{原}\cdot\text{増}+\text{原}\cdot\text{増}^2+\text{原}\cdot\text{増}^3+\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots=\frac{\text{原}\cdot\text{増}}{\text{甲}}$$

$$\text{土}=\text{原}\cdot\text{増}^2+\text{原}\cdot\text{増}^3+\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots=\frac{\text{原}\cdot\text{増}^2}{\text{甲}}$$

$$\text{金}=\text{原}\cdot\text{増}^3+\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots=\frac{\text{原}\cdot\text{増}^3}{\text{甲}}$$

$$\text{水}=\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots=\frac{\text{原}\cdot\text{増}^4}{\text{甲}}$$

$$\therefore\quad \text{極数}\cdot\text{甲}=\text{原}+\text{原}\cdot\text{増}+\text{原}\cdot\text{増}^2+\text{原}\cdot\text{増}^3+\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots=\frac{\text{原}}{\text{甲}}$$

故 $\text{極数}\cdot\text{甲}=\dfrac{\text{原}}{\text{甲}}$

$\text{極数}\cdot\text{甲}^2=\text{原数}$

又圭垜積 (1，3，6，10，15，21，・・・) を以是を増其極数の象（かたち）

$\text{極数}=\text{原}+3\,\text{原}\cdot\text{増}+6\cdot\text{増}^2+10\,\text{原}\cdot\text{増}^3+15\,\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots$

是を分

$$\text{木}=\text{原}+2\,\text{原}\cdot\text{増}+3\,\text{原}\cdot\text{増}^2+4\,\text{原}\cdot\text{増}^3+5\,\text{原}\cdot\text{増}^4+\cdots=\frac{\text{原}}{\text{甲}^2}$$

$$火 = 原\cdot増 + 2\,原\cdot増^2 + 3\,原\cdot増^3 + 4\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増}{甲^2}$$

$$土 = 原\cdot増^2 + 2\,原\cdot増^3 + 3\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増^2}{甲^2}$$

$$金 = 原\cdot増^3 + 2\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増^3}{甲^2}$$

$$水 = 原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増^4}{甲^2}$$

故 $極数\cdot甲^3 = 原数$

此理を推て逐て是をもとむる也.

極数の形

$増約極数 = \dfrac{原数}{甲}$

$増約圭垛数和極数 = \dfrac{原数}{甲^2}$

$増約圭垛積和極数 = \dfrac{原数}{甲^3}$

$増約三角衰垛積和極数 = \dfrac{原数}{甲^4}$

$増約再乗衰垛積和極数 = \dfrac{原数}{甲^5}$

$増約三乗衰垛積和極数 = \dfrac{原数}{甲^6}$

逐て此のごとし

爰に於て本題極数の象をみるに

$原 + 4\,原\cdot増 + 10\,原\cdot増^2 + 20\,原\cdot増^3 + 35\,原\cdot増^4 + 56\,原\cdot増^5 + \cdots$ $\boxed{増 = \dfrac{1}{5}}$

三角衰垛適等に仍て極数を求 $極数 = \dfrac{原}{甲^4} = \dfrac{原\cdot 5^4}{(5-1)^4}$ 故に本術のごとし

■若題辞余増に圭垛数冪 (1, 4. 9, 16, 25, ・・・) を以する時は

$$極数 = 原 + 4\,原\cdot増 + 9\,原\cdot増^2 + 16\,原\cdot増^3 + 25\,原\cdot増^4 + \cdots$$

是を分

$$原 + 3\,原\cdot増 + 6\,原\cdot増^2 + 10\,原\cdot増^3 + 15\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原}{甲^3}$$

$$原\cdot増 + 3\,原\cdot増^2 + 6\,原\cdot増^3 + 10\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増}{甲^3}$$

圭垛積和の法をもちゆ

$$極数 = \frac{原}{甲^3} + \frac{原\cdot増}{甲^3}$$

■又圭垜数再乗冪 (1，8，27，64，・・・) を以する時は

$$極数 = 原 + 8\,原\cdot増 + 27\,原\cdot増^2 + 64\,原\cdot増^3 + 125\,原\cdot増^4 + \cdots$$

分之

$$原 + 4\,原\cdot増 + 10\,原\cdot増^2 + 20\,原\cdot増^3 + 35\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原}{甲^4}$$

$$4\,原\cdot増 + 4(4\,原\cdot増^2) + 10(4\,原\cdot増^3) + 20(4\,原\cdot増^4) + \cdots = \frac{4\,原\cdot増}{甲^4}$$

$$原\cdot増^2 + 4\,原\cdot増^3 + 10\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増^2}{甲^4}$$

三角垜積和の法を用ゆ

$$極数 = \frac{原}{甲^4} + \frac{4\,原\cdot増}{甲^4} + \frac{原\cdot増^2}{甲^4}$$

逐て此の如く極数を求む左図のごとし

圭垜	$\frac{原}{甲^2}$	
平方垜	$\frac{原}{甲^3} + \frac{原\cdot増}{甲^3}$	圭垜数冪 1,4,9,16,25,36
立方垜	$\frac{原}{甲^4} + \frac{4\,原\cdot増}{甲^4} + \frac{原\cdot増^2}{甲^4}$	圭垜数再乗冪 1,8,27,64
三乗方垜	$\frac{原}{甲^5} + \frac{11\,原\cdot増}{甲^5} + \frac{11\,原\cdot増^2}{甲^5} + \frac{原\cdot増^3}{甲^5}$	圭垜数三乗冪 1,16,81,256,625
四乗方垜	$\frac{原}{甲^6} + \frac{26\,原\cdot増}{甲^6} + \frac{66\,原\cdot増^2}{甲^6} + \frac{26\,原\cdot増^3}{甲^6} + \frac{原\cdot増^4}{甲^6}$	圭垜数四乗冪和極数
五乗方垜	$\frac{原}{甲^7} + \frac{57\,原\cdot増}{甲^7} + \frac{302\,原\cdot増^2}{甲^7} + \frac{302\,原\cdot増^3}{甲^7} + \frac{57\,原\cdot増^4}{甲^6} + \frac{原\cdot増^5}{甲^7}$	圭垜数五乗冪和極数

逐て此ごとし．毎級の段数を求る法六枚目にある故にりやくす.

■又平方垜積和 (1，5，14，30，55，・・・) を以する時は

$$極数 = 原 + 5\,原\cdot増 + 14\,原\cdot増^2 + 30\,原\cdot増^3 + 55\,原\cdot増^4 + \cdots$$

是を分

$$原 + 4\,原\cdot増 + 9\,原\cdot増^2 + 16\,原\cdot増^3 + 25\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原}{甲^3} + \frac{原\cdot増}{甲^3}$$

$$原\cdot増 + 4\,原\cdot増^2 + 9\,原\cdot増^3 + 16\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増}{甲^3} + \frac{原\cdot増^2}{甲^3}$$

$$原\cdot増^2 + 4\,原\cdot増^3 + 9\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増^2}{甲^3} + \frac{原\cdot増^3}{甲^3}$$

$$原\cdot増^3 + 4\,原\cdot増^4 + \cdots = \frac{原\cdot増^3}{甲^3} + \frac{原\cdot増^4}{甲^3}$$

$$原\cdot増^4\cdots=\frac{原\cdot増^4}{甲^3}+\frac{原\cdot増^5}{甲^3}$$

是をくくり

$$極数=\frac{乙}{甲^3}+\frac{乙\cdot増}{甲^3}+\frac{乙\cdot増^2}{甲^3}+\frac{乙\cdot増^3}{甲^3}+\frac{乙\cdot増^4}{甲^3} \qquad \boxed{乙=原+原\cdot増}$$

$$極数\cdot甲^4=乙$$

逐て此の如く極数を求む左図のごとし

平方垜	$\frac{原}{甲^4}+\frac{原\cdot増}{甲^4}$
立方垜	$\frac{原}{甲^5}+\frac{4\,原\cdot増}{甲^5}+\frac{原\cdot増^2}{甲^5}$
三乗方垜	$\frac{原}{甲^6}+\frac{11\,原\cdot増}{甲^6}+\frac{11\,原\cdot増^2}{甲^6}+\frac{原\cdot増^3}{甲^6}$
四乗方垜	$\frac{原}{甲^7}+\frac{26\,原\cdot増}{甲^7}+\frac{66\,原\cdot増^2}{甲^7}+\frac{26\,原\cdot増^3}{甲^7}+\frac{原\cdot増^4}{甲^7}$
五乗方垜	$\frac{原}{甲^8}+\frac{57\,原\cdot増}{甲^8}+\frac{302\,原\cdot増^2}{甲^8}+\frac{302\,原\cdot増^3}{甲^8}+\frac{57\,原\cdot増^4}{甲^7}+\frac{原\cdot増^5}{甲^8}$

逐て此の如く実数は圭垜数冪和に変る事なし．法数は圭垜数冪和の法数に甲一乗を増のみなり．
諸垜積増約の術源此のごとくし．他是にならひしるべし．

【番外　損約術解】
本題損約術を闕，初学の為に題を設て術及解義を詳にす．(損約術とは $a-ar-ar^2-ar^3-\cdots$ の極数を求める術のこと．r を損数という)

$$極数=\frac{原数\cdot(1-2\,損数)}{1-損数}$$

一ヶを置，内損数を減る事ならぬ時は術行れず．故に損数二分之一以上なる者は極数なしと云

假令ば原数六百七十三個，損数五厘で立方垜積数 (一，九，三十六，百，・・・) を掛けたときの極数を問う．

$$\left(673-1\cdot673\cdot0.05-9\cdot673\cdot0.05^2-36\cdot673\cdot0.05^3-\cdots=300\frac{295554}{2476099}\right)$$

$$極数=原-原\cdot損-原\cdot損^2-原\cdot損^3-原\cdot損^4-\cdots$$

$$\frac{原}{甲}=原+原\cdot損+原\cdot損^2+原\cdot損^3+原\cdot損^4+\cdots \qquad \boxed{甲=1-損数}$$

$$\therefore\quad -\frac{原}{甲}+2\,原=原-原\cdot損-原\cdot損^2-原\cdot損^3-原\cdot損^4-\cdots$$

遍甲を乗じ

$$-原+2\,原\cdot甲=極数\cdot甲$$

本問は

$$極数 = 原 - 9\,原\cdot損 - 36\,原\cdot損^2 - 100\,原\cdot損 - 225\,原\cdot損 - \cdots$$

此形は再乗垜積である

$$増約極数 = \frac{原}{甲^5} + \frac{4\,原\cdot損}{甲^5} + \frac{原\cdot損^2}{甲^5}$$

$$損数極数 = 2\,原 - 増約極数 = 2\,原 - \frac{原}{甲^5} - \frac{4\,原\cdot損}{甲^5} - \frac{原\cdot損^2}{甲^5}$$

本術

$$極数 = \frac{2\,甲^5 - (1 + 4\,損 + 損^2)\,原}{甲^5}$$

$\boxed{161}$ 今十乗衰垜積九十一個有り．底子は幾らか．(『精要算法』巻之下第 44 問にあり)
答曰 底子三個

術曰 $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{91 \times 479001600}}} - 5.5 = 3$(不尽収之/小数点以下切り上げ)

【術解】$\dfrac{1}{12!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)(n+10)(n+11) = 91 \cdots ①$

$$\begin{aligned}&39916800n + 120543840n^2 + 150917976n^3 + 105258076n^4 + 45995730n^5 + 13339535n^6\\&\qquad + 2637558n^7 + 357423n^8 + 32670n^9 + 1925n^{10} + 66n^{11} + n^{12} = 91 \times 12!\end{aligned}$$

$$12! = 479001600 = 23100 \times 12^4$$

此式十一乗方にひらき底子を得るといへども此術にては顆盤にて得がたし．底子元来(もとより)不尽なき事明なり．故に顆盤術を求る事左のごとし．

$$\sqrt[12]{91 \times 12!} = 12\sqrt[4]{天} := 立方実 \qquad \boxed{天 = 23100\cdot積}$$

$$n = \sqrt[3]{立方実} - 5.5 \qquad (不尽収之)$$

5.5 を引く根拠は
$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)(n+10)(n+11)$ を $(n+5.5)^6$ と見て

$$n = \sqrt[12]{積\cdot 12!} - 5.5 = \sqrt[3]{12\sqrt[4]{天}} - 5.5$$

$n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ のとき

$$(n+4.5)^{12} < n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)(n+10)(n+11) < (n+5.5)^{12}$$

が成り立つので

$$n+4.5 < \sqrt[12]{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)(n+10)(n+11)} < n+5.5$$

$$n-1 < \sqrt[12]{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)(n+10)(n+11)} - 5.5 < n$$

$$\therefore \quad n = \left\lceil \sqrt[12]{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)(n+10)(n+11)} - 5.5 \right\rceil$$

$\boxed{162}$ 今，奇零平方垜積か偶零平方垜積のどちらかわからない者と九因再乗垜積が各々一つづつある．その平方垜積を九因再乗垜積で割ると二千四百一十五分箇之二となる．ただし底子は各々同数である．このとき底子は幾らか．

奇零平方垜積とは底子が奇数で，仮如へば底子三では三十五 ($1^2+3^2+5^2=35$) をその積とする．
偶零平方垜積とは底子が偶数で，仮如へば底子六では五十六 ($2^2+4^2+6^2=56$) をその積とする．
九因再乗垜積とは仮如へば底子三では九十をその積とする．($1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot2+1\cdot1\cdot3+1\cdot2\cdot2+1\cdot2\cdot3+1\cdot3\cdot3+2\cdot2\cdot2+2\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot3+3\cdot3\cdot3=90$) (1,2,3 の 3 個から重複を許して 3 個とった組合せの 3 数の積の総和，掛け算九九表 (九因歌) のイメージからの命名か?)
答曰底子二十箇

術曰 $\text{底子} = \left[\sqrt[3]{\dfrac{\text{分母} \times 8}{\text{分子}}} - 1 \right]$

【術解】 $\text{奇零平方垜積} = 1^2+3^2+5^2+\cdots+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \text{分子}$

$\text{偶零平方垜積} = 2^2+4^2+6^2+\cdots+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \text{分子}$

$\text{九因再乗垜積} = \dfrac{1}{48}(n^6+7n^5+17n^4+17n^3+6n^2) = \dfrac{1}{48}n^2(n+1)^2(n+2)(n+3) = \text{分母}$

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)}{\dfrac{1}{48}n^2(n+1)^2(n+2)(n+3)} = \frac{2}{2415}$$

$$n(n+1)(n+3) = 4 \times 2415 := \text{天} \qquad \boxed{\text{天} = \frac{8 \times \text{分母}}{\text{分子}}}$$

$$n^3+4n^2+3n = 9660$$

$$(n+1)^3 + n^2 = 9660 + 1$$

左辺の n^2 と右辺の 1 を棄て

$$(n+1)^3 = 9660$$

$$n = \left[\sqrt[3]{9660} - 1 = 21.29\cdots - 1 \right] = 20$$

実級と廉級にて棄る事なき時は底子を得ると雖両級にて一算を棄るゆへ其数より少し大数を得る也．故に不尽是を棄る也．くわしく数を挙て是をしめす．

底子	分母	分子	天	$[\sqrt[3]{天}]$	不満
3	90	10	72	4	8
19	1389850	1330	8360	20	360
20	1859550	1540	9660	21	399
100	22327438750	171700	1040300	101	9999

故に本術のごとし

九因垜積の計算

$$1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots+1\cdot n+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2\cdot n+3\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+3\cdot n+\cdots+n\cdot n$$

$$=1\cdot 1+2(1+2)+3(1+2+3)+4(1+2+3+4)+\cdots+n(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(1+2+3+\cdots+k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)^2(3n+1)$$

$$=\frac{1}{24}(3n^4+10n^3+9n^2+2n):=\text{九}\,(n,2)$$

九因再乗垜積の計算

$$1\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 2+1\cdot 1\cdot 3+\cdots+1\cdot 1\cdot n+1\cdot 2\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\cdots+1\cdot 2\cdot n+1\cdot 3\cdot 3+1\cdot 3\cdot 4+\cdots 1\cdot 3\cdot n+\cdots+1\cdot n\cdot n$$
$$+2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 3+2\cdot 2\cdot 4+\cdots 2\cdot 2\cdot n+2\cdot 3\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+2\cdot 3\cdot n+\cdots+2\cdot n\cdot n$$
$$+3\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3\cdot 4+3\cdot 3\cdot 5+\cdots+3\cdot 3\cdot n+3\cdot 4\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+3\cdot 4\cdot n+\cdots 3\cdot n\cdot n+$$
$$\vdots$$
$$+n\cdot n\cdot n$$

$$=1\cdot\text{九}\,(1,2)+2\cdot\text{九}\,(2,2)+3\cdot\text{九}\,(3,2)+4\cdot\text{九}\,(4,2)+\cdots+n\cdot\text{九}\,(n,2)$$

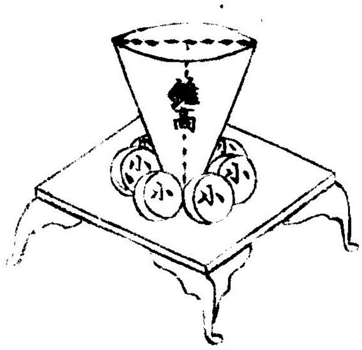
$$=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\text{九}\,(k,2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{24}(3k^5+10k^4+9k^3+2k^2)$$

$$=\frac{1}{24}\left\{\frac{3}{12}n^2(1+n)^2(-1+2n+2n^2)+\frac{10}{30}n(1+n)(1+2n)(-1+3n+3n^2)+\frac{9}{4}n^2(1+n)^2\right.$$
$$\left.+\frac{2}{6}n(1+n)(1+2n)\right\}$$

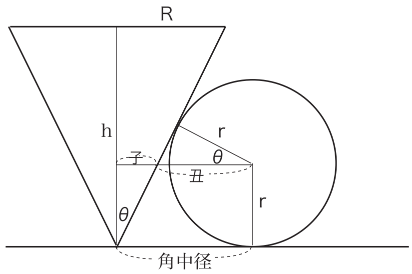
$$=\frac{1}{48}n^2(1+n)^2(2+n)(3+n)$$

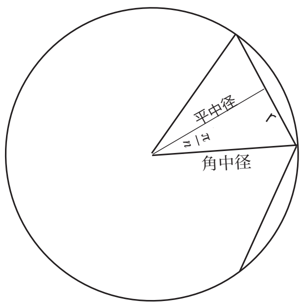
$\boxed{163}$ 今盤上に立てたる円錐の麓に小球数個をもってこれを圍む．但し小球は互いに接し，錐傍，盤面にも接する．錐径と錐高が与えられたとき，小球の総計を問う．



術曰 小球総計 $= \left\lceil \dfrac{錐径 \times \pi}{錐高} \right\rceil$ 　　但し．7 以下のときは 1 を加え，3 に満たないときは 3 を加える

【術解】 $\dfrac{錐径}{2} = R$, $\dfrac{小径}{2} = r$, 錐高 $= h$, 小球惣数 $= n$ とする．





$$子 : r = R : h \text{ より } 子 = \frac{rR}{h}$$

$$丑 = \frac{r}{\cos\theta} = \frac{r\sqrt{R^2+h^2}}{h}$$

$$角中径 = 子 + 丑 = \frac{rR}{h} + \frac{r\sqrt{R^2+h^2}}{h}$$

ところで一方

$$角中径 = \frac{r}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

だから

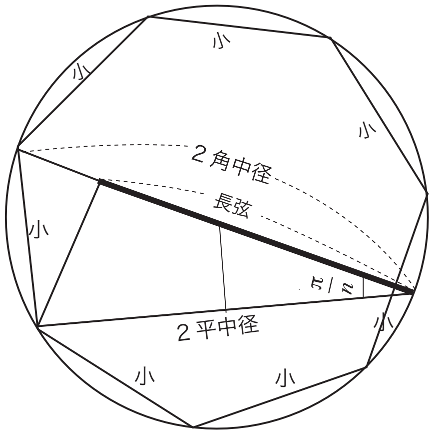
$$\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{h} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{R}{h}$$

自乗して 〔$角中率 = \dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$，$平中率 = \dfrac{1}{2\tan\frac{\pi}{n}}$〕

$$1 = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}} - \frac{2R}{h\sin\frac{\pi}{n}}$$ 〔この式は原本の 4 角中率^2 − 2 錐径 · 角中率 − 高 = 0 に相当する．22 丁右 7 行目〕

$$\therefore\quad \frac{2R}{h} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} - \sin\frac{\pi}{n} = \frac{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \fallingdotseq \frac{n}{\pi}$$ 〔$錐径 = \dfrac{2高\cdot平中率^2}{角中率}\cdots$①に相当〕

$$\therefore\quad n \fallingdotseq \frac{錐径}{錐高}\pi$$



長弦 : 2 平 = 2 平 : 2 角 より $長弦 = \dfrac{2平^2}{角}\cdots$②

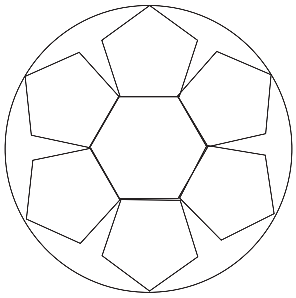
① ② より $\dfrac{錐径}{高} = 長弦率$

按に角数乃小球ヶ数多き時は長玄いよゝゝ長し．長玄愈長き時は虚円径に近し．故に直に長玄を虚円径と見て円周法を乗じて虚円周を求め即小球箇数とす．数を推て加減を試る事左のごとし．

角数級	長玄因円周法級
3	0.906899
4	2.221441
5	3.49821
6	4.7123876
7	5.877549
8	7.0071418

故に三ヶ者不尽収之加二個，四ヶ五ヶ六ヶ七ヶ者不尽収之加一個，
八ヶ以上者不尽収而巳．故に本術のごとし．

$\boxed{164}$ 今図のように円内に五角形を環状に容れる．但し，3 個以上で偶奇に拘わらない．図は仮に 6 個とする．円径と五角形の一辺の長さが与えられたとき，五角形の総数を問う．



術曰 総数 $= \left(\dfrac{\text{円径}}{\text{角面}} - 3\right)\pi$　　　(不尽は 14 以上は切り捨て，以下は切り上げる)

【術解】円径 $=$ 2(五角角中径 $+$ 五角平中径) $+$ 2 内平中径

五角形三ヶを容る時は三角平中径率を内平中径率と云．四ヶをいるゝ時は四角平中径率を内平中径率と云．他是にならへ．

五角面を得る式

$$-\text{円径} + 2(\text{五角角中径率} + \text{五角平中径率} + \text{内平中径率})\,\text{面} = 0$$

$$\frac{\text{円径}}{\text{面}} = 2(\text{五角角中径率} + \text{五角平中径率} + \text{内平中径率}) = \text{五角面 1 寸に就ての円径也}$$

$$\frac{\text{円径}}{\text{面}} - 3 \fallingdotseq \text{内円径}$$

$$\frac{\text{円径}}{\text{面}}\pi - 3\pi \fallingdotseq \text{内円周}$$

此三ヶを減る意は外円径より内円径は凡角面三段ばかりも少なりと見て三ヶを減る也．故に真の内円径にあらずして近き数也．

是即ヶ数に近き数也．故に加減を試るなり．

個数	個数に近き数
3	2.0578
6	5.6855
12	11.9686
13	12.98998
14	14.00825
15	15.02406
20	20.07928
1000000	1000000.24403

故本術一十四ヶ以上不尽弃之，以下者収之．得角形総数．

$\boxed{165}$ 今銀十六貫五百三十七匁六分借人あり．年二割半の利足で，毎年銀八貫目を返す．何年で返尽せるか．若し，年数に端数がでるときは日数に拘わらず一年の利を加える．
答曰三箇年一百一日四分日之一で返尽くす．
術曰 $(((16537.6 \times 1.25 - 8000) \times 1.25 - 8000) \times 1.25 - 8000) \times 1.25 - 8000 = 2250$
$\dfrac{2250}{8000} \times 360 = 101.25$ (一年=360 日)

$\boxed{166}$ 今原銀二百四十目二厘有り，これに毎日納銀七拾三匁六分三厘を納める．この銀が五百一匁三分六厘になるごとに函に入れていく．函に入らない銀が一匁より小さくなるときの納銀の日数は幾らか．
答曰 納日数六百三十日　函の外の余り四分四厘

$|P + ax - by| < 1$ を解くことを累約術という．本問は納銀日数を x ，函の数を y とするとき，
$0 < 240.02 + 73.63x - 501.36y < 1$ をみたす整数 $x,\ y$ を求める問題である．

零約術 (互除法) による．

$$501.36 = 6(\text{甲}) \times 73.63 + 59.58 \qquad \text{甲} = 6$$

$$73.63 = 1(\text{乙}) \times 59.58 + 14.05 \qquad \text{子} = \text{甲乙} + 1 = 7$$

$$59.58 = 4(\text{丙}) \times 14.05 + 3.38 \qquad \text{丑} = \text{子丙} + \text{甲} = 34$$

$$14.05 = 4(\text{丁}) \times 3.38 + 0.53 \qquad \text{寅} = \text{丑丁} + \text{子} = 143$$

$$240.02 = 4 \times 59.58 + 1.7 \qquad (4+1) \times \text{甲} = 30(\text{甲日数}) \qquad 59.58 - 1.7 = 57.88(\text{朒})$$

$$57.88 = 4 \times 14.05 + 1.68 \qquad (4+1) \times \text{子} = 35(\text{乙日数}) \qquad 14.05 - 1.68 = 12.37(\text{盈})$$

$$12.37 = 3 \times 3.38 + 2.23 \qquad (3+1) \times \text{丑} = 136(\text{丙日数}) \qquad 3.38 - 2.23 = 1.15(\text{朒})$$

$$1.15 = 2 \times 0.53 = 0.09 \qquad (2+1) \times \text{寅} = 429(\text{丁日数}) \qquad 0.53 - 0.09 = 0.44(\text{盈/函外余})$$

$$\text{納日数} = \text{甲日数} + \text{乙日数} + \text{丙日数} + \text{丁日数} = 30 + 35 + 136 + 429 = 630$$

若し題辞函外の奇一匁に近しと云時は納日数三万五千七百七十九日にして函外奇九分九厘と成術も亦別なり．

この注釈は〈$240.02 + 73.63x - 501.36y = 0.99$ は翦管術 (剰一術) で解く〉という意味であろう．

$\boxed{167}$ 今積一分二厘五毛有り．平方に之を開くと幾らか．九帰法に仍て答えよ．
答曰開出商 0.353553390593273762
術曰 初商 $= 0.4$

$$\text{次商} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{積}}{\text{初商}} + \text{初商}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.125}{0.4} + 0.4\right) = 0.35$$

$$\text{三商} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{積}}{\text{次商}} + \text{次商}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.125}{0.35} + 0.35\right) = 0.35357$$

以下この繰り返し．漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{積}{a_n} + a_n\right)$ について

$\sqrt{積} < \cdots < a_{n+1} < a_n$ だから収束し，その値は $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{積}$
初商は何でもよい．

初商より多位を設るに及ばず．此のごとく次第に多位を設くべし．若過て初商を設るに甚大数或小数を設けてもはじめの内真数に合事遅き．すでにて終に至てはかはる事なし．左に初商十ヶを設けて是を示す．

$$初商 = 10$$

$$次商 = \frac{1}{2}\left(\frac{積}{初商} + 初商\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.125}{10} + 10\right) = 5$$

$$三商 = \frac{1}{2}\left(\frac{積}{次商} + 次商\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.125}{5} + 5\right) = 2.5$$

$$四商 = \frac{1}{2}\left(\frac{積}{次商} + 次商\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.125}{2.5} + 2.5\right) = 1.2$$

$$五商 = \frac{1}{2}\left(\frac{積}{次商} + 次商\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.125}{1.2} + 1.2\right) = 0.6$$

$$六商 = \frac{1}{2}\left(\frac{積}{次商} + 次商\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.125}{0.6} + 0.6\right) = 0.4$$

$$七商 = \frac{1}{2}\left(\frac{積}{次商} + 次商\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.125}{0.4} + 0.4\right) = 0.35$$

以下前商数とおなじ故に畧す．

平方に限らず立方三乗四乗商より数十乗方の開出商を得るも此理におなじ．乗数を増ごとに除数と加数の少異ある而已 $\substack{\text{委く本術}\\\text{中にあり}}$ 因に立方商より五乗方迄の商数をいだしてこれをしるす．

開立方商 ($\sqrt[3]{0.125}$)

$$初商 = 0.51$$

$$次商 = \frac{1}{3}\left(\frac{積}{初商^2} + 2\times 初商\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{0.125}{0.51^2} + 2\cdot 0.51\right) = 0.5001$$

$$三商 = \frac{1}{3}\left(\frac{積}{次商^2} + 2\times 次商\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{0.125}{0.5001^2} + 2\cdot 0.5001\right) = 0.50000001$$

$$四商 = \frac{1}{3}\left(\frac{積}{三商^2} + 2\times 三商\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{0.125}{0.50000001^2} + 2\cdot 0.50000001\right) = 0.5000000000000001$$

開三乗方商 ($\sqrt[4]{0.125}$)

$$初商 = 0.6$$

$$次商 = \frac{1}{4}\left(\frac{積}{初商^3} + 3\times 初商\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{0.125}{0.6^3} + 3\cdot 0.6\right) = 0.59467$$

$\boxed{168}$ 今図のように円内に四円を容れる．外円径九寸，中円径四寸，大小円径各幾らか．開方を用いないで答えることを請う．

答曰大円径四寸五分　　小円径一寸八分

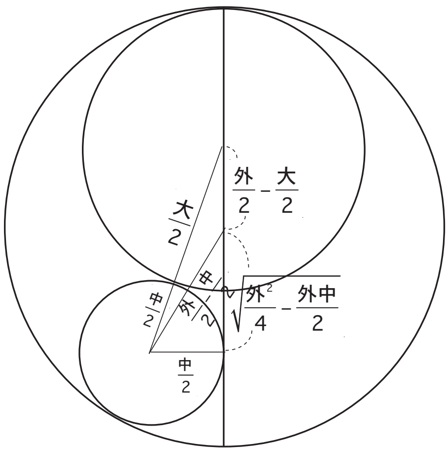
術曰　$子 = 4 \cdot \dfrac{外}{中} + 1, \qquad 丑 = 子 - 3$

$$大法 = \cfrac{子}{丑 - \cfrac{子}{丑 - \cfrac{子}{丑}}}, \qquad 小法 = 丑 - 大法$$

$$大円径 = \frac{外}{大法}, \quad 小円径 = \frac{外}{小法}$$

数百乗の開方式にて正負いかやうに交りても自在に其商を得る算顆術あり．開式新法と標題す．予が門人川井氏あらはす．若算顆術の通術をしらんと思ふ人は開式新法をみるべし．

【術解】



$$\left(\frac{中}{2}\right)^2 + \left(\frac{外}{2} - \frac{大}{2} + \sqrt{\frac{外^2}{4} - \frac{外}{2}中}\right)^2 = \left(\frac{中}{2} + \frac{大}{2}\right)^2$$

展開して大の二次方程式にする

$$外^2中 + (2\,外中 - 4\,外^2)\,大 + (中 + 4\,外)\,大^2 = 0$$

$$外^2 + \left(2\,外 - 4\frac{外^2}{中}\right)大 + \left(1 + 4\frac{外}{中}\right)大^2 = 0$$

$子 = 1 + 4\dfrac{外}{中}$，$丑 = 子 - 3$　とおくと

$$1 - 丑\frac{大}{外} + 子\left(\frac{大}{外}\right)^2 = 0$$

$子 - 丑\,X + X^2 = 0$　を川井久徳の『開式新法』の術で解く．　$X = \dfrac{外}{大}$

●『開式新法』の術 (逐次近似法)

実 $-$ 方 $X+X^2=0$ (中断式) の術

$$乙初商=\frac{実}{方} \qquad 甲初商=方-乙初商=方-\frac{実}{方}$$

$$乙次商=\frac{実}{甲初商}=\cfrac{実}{方-\cfrac{実}{方}} \qquad 甲次商=方-乙次商=方-\cfrac{実}{方-\cfrac{実}{方}}$$

$$乙三商=\frac{実}{甲次商}=\cfrac{実}{方-\cfrac{実}{方-\cfrac{実}{方}}} \qquad 甲三商=方-乙三商=方-\cfrac{実}{方-\cfrac{実}{方-\cfrac{実}{方}}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$大初商=\frac{子}{丑} \qquad 小初商=丑-大初商$$

$$大次商=\frac{子}{小初商} \qquad 小次商=丑-大次商$$

$$大三商=\frac{子}{小次商} \qquad 小三商=丑-大三商$$

逐て此の如く是を求む．止商を大方及小方とす．数を推て是を示す．

	大法級	小法級
初商	1.4	5.6
次商	1.78	5.22
三商	1.915	5.085
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
十商	1.99984	5.00016

$子=4\times\frac{9}{4}+1=10,\ 丑=子-3=7,\ 10-7X^2+X^2=0$ を解く

外円径を大 (小) 法で割れば大 (小) 円径を得る．故に本術のごとし．

【番外　綴術解】

夫綴術といふは算籌及顆盤を用ひずして筆算傍書を以平方商の象を紙上に得る術也．此術意を能會得せざれば円理の真術を得がたし．假に題を設て是を示す．

假如天及地と名づくる数あり．只云天若干，地若干，天冪地相併平方に開くの商を得る術いかんを問．但開方を用ひずして，是にこたへん事を乞．

但天冪数は地数より必大なりとす．若是に反る則は術なし．

商実方廉を各階級あるは算木にて開も同じ．其外に実級の内にも亦階級あり．是を混雑する時は括り方しれがたくして無益の労あり．故に図式に階級を分て是を示す．まぎれざるやうに心付べし．

($天^2>地$)

$\sqrt{天^2+地}=天\sqrt{1+\frac{地}{天^2}}$ $\qquad \boxed{人=2\,天}$ $\qquad \boxed{率=\frac{地}{2\,天^2}}$

$$= 天\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{地}{天^2}\right)-\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{地}{天^2}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{地}{天^2}\right)^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{地}{天^2}\right)^4+\cdots\cdots\right)$$

$$= 天+\frac{地}{人}-\frac{地^2}{人^3}+\frac{2\,地^3}{人^5}-\frac{5\,地^4}{人^7}+\frac{2\cdot 7\,地^5}{人^9}-\frac{2\cdot 3\cdot 7}{人^{11}}+\frac{3\cdot 4\cdot 11}{人^{13}}-\cdots\cdots$$

$$= 天+原\cdot 率-(一差)\frac{率}{2}+(二差)\frac{3\,率}{3}-(三差)\frac{5\,率}{4}+(四差)\frac{7\,率}{5}-(五差)\frac{9\,率}{6}+\cdots\cdots$$

$$\sqrt{天^2-地}=天\sqrt{1-\frac{地}{天^2}}$$

$$= 天-原\cdot 率-(一差)\frac{率}{2}-(二差)\frac{3\,率}{3}-(三差)\frac{5\,率}{4}-(四差)\frac{7\,率}{5}-(五差)\frac{9\,率}{6}-\cdots\cdots$$

> “平方綴術に開く”術
>
> $$\sqrt{1-h}=1-\frac{1}{2}h-\frac{1}{2\cdot 4}h^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}h^3-\cdots-\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}h^k-\cdots$$

綴術の法の如し．たとへ平方にひらくべきの数幾位ありとも最大の数を実の第一位におき，夫より数の多少に仍て次第に少数を下位に置べし．然らざれば真数を得ざる也〇扨初商を設るには右の最大数を平方に開き初商とする也．次商より以下は前図式の如くして自然に得る也．

例：$天=5$, $地=3$ で $率=\dfrac{地}{2\,天^2}=\dfrac{3}{50}=0.06$ として

$\sqrt{28}=\sqrt{25+3}=5+5\cdot 0.06-5\cdot 0.06\cdot 0.03=5.291$　(因みに$\sqrt{28}=5.29150\cdots$)

$\boxed{169}$ 次の方程式を開方 (平方根) を用いないで解け．

$$4656-400x+x^2=0$$

答曰多商三百八十八箇　少商一十二箇

術曰 $角=\dfrac{実}{法}=11.64,$　　$率=\dfrac{角}{法}=0.0291$

$亢=\dfrac{2}{2}率\cdot 角=0.338724,$　　$氐=\dfrac{6}{3}率\cdot 亢=0.0197137368$

$房=\dfrac{10}{4}率\cdot 氐=0.0014341743522,$　　$心=\dfrac{14}{5}率\cdot 房=0.001168565262$

$少商=角+亢+氐+房+心+\cdots$

$多商=法-少商$

若廉級数一ヶならざる時は遍廉級数にて除き得る数後実法と名け術を施すべし．

【術解】 $地-2\,天\,x+x^2=0$　　$\boxed{天=\dfrac{方}{2}=\dfrac{400}{2}=200 \qquad 地=4656}$

$平積=天^2-地$　　$\boxed{率=\dfrac{地}{2\,天^2}}$

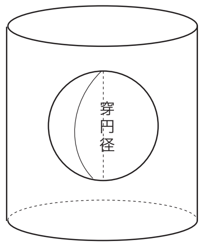
$$\sqrt{天^2-地}=天-原\cdot 率-(一差)\frac{率}{2}-(二差)\frac{3\,率}{3}-(三差)\frac{5\,率}{4}-(四差)\frac{7\,率}{5}$$

方半を加減して多少両商を得る．これ以後の率はこれまでの率の半分也．

$$\text{定多商} = \text{方} - \underset{\text{角}}{\text{方}\cdot\text{率}} - \underset{\text{亢}}{\frac{2}{2}\text{率}\cdot\text{角}} - \underset{\text{氐}}{\frac{6}{3}\text{率}\cdot\text{亢}} - \underset{\text{房}}{\frac{10}{4}\text{率}\cdot\text{氐}} - \underset{\text{心}}{\frac{14}{5}\text{率}\cdot\text{房}}$$

$$\text{定少商} = \underset{\text{角}}{\text{方}\cdot\text{率}} + \underset{\text{亢}}{\frac{2}{2}\text{率}\cdot\text{角}} + \underset{\text{氐}}{\frac{6}{3}\text{率}\cdot\text{亢}} + \underset{\text{房}}{\frac{10}{4}\text{率}\cdot\text{氐}} + \underset{\text{心}}{\frac{14}{5}\text{率}\cdot\text{房}}$$

$\boxed{170}$ 今円柱の中に円柱を穿ち去る．円柱径五寸，穿円径一寸のとき，穿去積はいくらか．
cf.『算法求積通考』巻四 $\boxed{68}$



答曰穿去積三寸九〇七二五六四三九一有奇

術曰 $\text{率} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\text{穿径}}{\text{柱径}}\right)^2$

$$\text{原} = \text{穿径}^2\text{柱径}$$

$$\text{一差} = \text{原}\cdot\text{率}$$

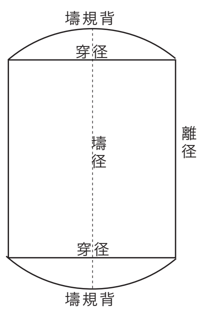
$$\text{二差} = \frac{1\cdot 3}{3}(\text{一差})\ \text{率}$$

$$\text{三差} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{6}(\text{二差})\ \text{率}$$

$$\text{四差} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{10}(\text{三差})\ \text{率}$$

$$\text{穿去積} = \frac{\pi}{4}\left\{\text{原} - (\text{一差}) - (\text{二差}) - (\text{三差}) - (\text{四差}) - \cdots\cdots\right\}$$

【術解】有形にて直に解をなす時は其解至て迂遠なり．故に変形して術解をなす．

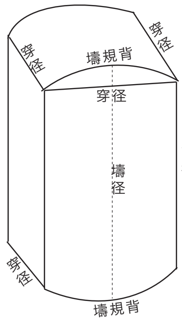


この面積を天とする．$\boxed{\text{墻径=円形，穿径=玄}}$

$$\text{天} = \text{穿径}\cdot\text{墻径} - \frac{1}{2\cdot 3}\text{原数}\cdot\text{率} - \frac{3}{4\cdot 5}\text{一差}\cdot\text{率} - \frac{3\cdot 5}{6\cdot 7}\text{二差}\cdot\text{率} - \frac{5\cdot 7}{8\cdot 9}\text{三差}\cdot\text{率} - \frac{7\cdot 9}{10\cdot 11}\text{四差}\cdot\text{率}$$

$$\boxed{\text{率} = \left(\frac{\text{穿}}{\text{墻}}\right)^2}$$

天 · 穿径 はこのような立体



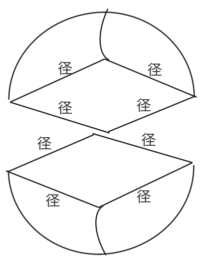
天 · 穿径 · 円積率 此傍書は此図を丸くしたる意也．眞の穿積よりは少なる理なり．然る時は天積表の差の除数を多くする時は真の穿責なり〇天責表の乗数は一三五三五七及除数二四六八は源綴術に生ず．三五七九は源垜術より生ず．即垜術の約法なり〇増約の掟に仍て截分数を底子とし，垜術に仍て其責を得る象を求め初一算を用ひ余は悉 (ことごとく) 是を弃 (すてる)

天表の除数三五七九は平方垜三乗垜五乗垜の約法也．然るに其約法を微し多からんと欲す．故に立方垜四乗垜六乗垜の約法に換て左のごとし．

$$\text{天}\cdot\text{穿径}\cdot\text{円積率} = \text{壔}\cdot\text{穿径}^2\cdot\text{円積率} - \frac{1}{2\cdot 4}\text{率}\cdot\text{原} - \frac{3}{4\cdot 6}\text{率}\cdot\text{一差} - \frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}\text{率}\cdot\text{二差}$$
$$- \frac{5\cdot 7}{8\cdot 10}\text{率}\cdot\text{三差} - \frac{7\cdot 9}{10\cdot 12}\text{率}\cdot\text{四差}\cdots ①$$

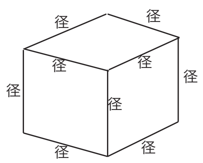
此の如く分母 即約法 を換る時は真の穿積を得る．其理左の如し．

壔径と穿径と同数なるときは穿積の形下の如し．

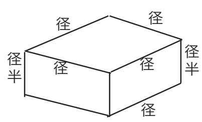


又球積を求る術を考へ見るに

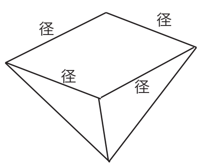
$径^3$ は其形



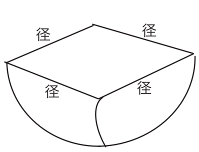
$\dfrac{径^3}{2}$ は其形



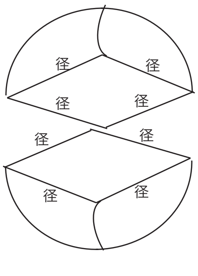
$\dfrac{径^3}{2\cdot 3}$ は其形



$\dfrac{2\,径^3}{2\cdot 3}$ は其形



$\dfrac{2\cdot 2\,\text{径}^3}{2\cdot 3}$ は其形



前図と全く同じ　$\boxed{\dfrac{2}{3}\text{径}^3\cdot\text{円積率}=\text{球の体積}}$

これを計算すると $\dfrac{2}{3}=0.66666\cdots$ である．

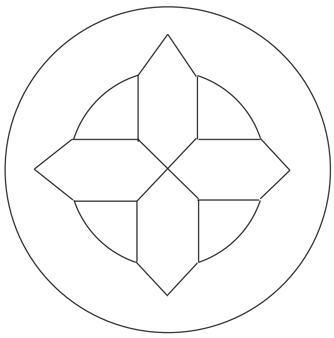
墻径と穿径と等し故に変して径再とす．(墻径=穿径のとき①は次のようになる)

$$\text{径}^3\cdot\text{円積率}-\frac{1}{2\cdot 4}\text{率}\cdot\text{原}-\frac{3}{4\cdot 6}\text{率}\cdot\text{一差}-\frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}\text{率}\cdot\text{二差}-\frac{5\cdot 7}{8\cdot 10}\text{率}\cdot\text{三差}$$

これを計算すると 0.66666$\cdots$ となり一致するので①が求める穿去積である．(結果は正しいがこの理屈は稚拙である) $\boxed{\text{あらためて 率}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\text{穿}}{\text{墻}}\right)^2\text{ として}}$

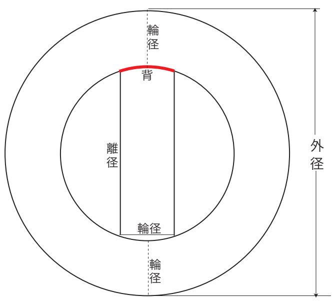
$$\text{穿去積}=\text{墻径}\cdot\text{穿径}^2\cdot\text{円積率}-\frac{1}{1}\text{率}\cdot\text{原}-\frac{1\cdot 3}{3}\text{率}\cdot\text{一差}-\frac{3\cdot 5}{6}\text{率}\cdot\text{二差}-\frac{5\cdot 7}{10}\text{率}\cdot\text{三差}\cdots ②$$

$\boxed{171}$ 今図のような十字環がある．外径 10 寸，輪軽は各々 1 寸であるとき体積は幾らか．
cf.『算法求積通考』巻五 $\boxed{93}$

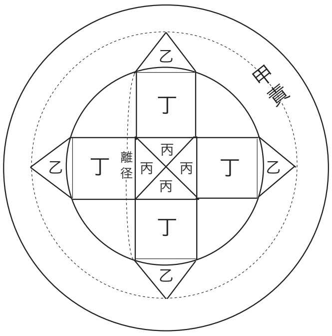


答曰積三十四寸三分有奇

術曰 積 $=\left\{3\left(\dfrac{\pi}{2}\times 2+1\right)(\text{外}-\text{輪})\dfrac{\pi}{4}+\text{離径}-\text{背}-\text{外}\right\}\text{輪}^2\times\dfrac{2}{3}$



【術解】

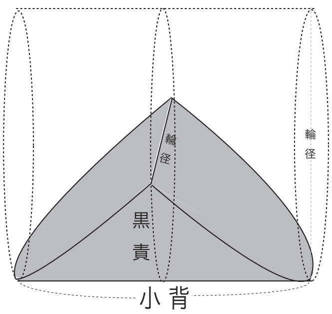


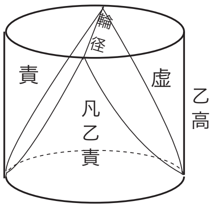
$$甲責 = 4\,輪^2(外 - 輪) \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$4\,丁責 = 4\,輪^2\frac{離 - 輪}{2}\frac{\pi}{4}$$

$$4\,丙 = 2\,輪^3\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}輪^3$$

各立起の図ゆへ画に其実を以する時は却て算法の意解しがたき所あり．故に円心又は環心より引べき線を覓面より引あり．能く察し見るべし．假如は黒責は鶏卵の黄身の如く，乙責は白身の如し〇乙責を以小背のかたより黒責をはさむ也．この図解は其乙責をとりのけて中の黒責を見る形なり．





$$黒責 = \frac{1}{6}輪^2 \cdot 小背$$

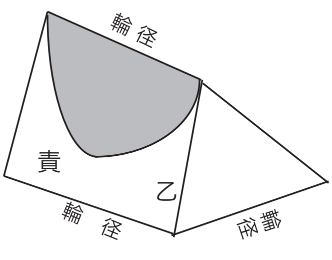
$$乙高 = \frac{1}{2}(外 - 輪 - 離)$$

$$円墻責 = 乙高 \cdot 輪^2\frac{\pi}{4}$$

$$虚責 = \frac{1}{3}乙高 \cdot 輪^2$$

$$凡乙責 = 円墻責 - 虚責$$

$$乙責 = 凡乙責 - 黒責$$



$$\begin{aligned}十字環積 &= 甲責 + 4\,乙責 + 4\,丙責 + 4\,丁責\\ &= \frac{1}{3}\left\{6\left(\frac{\pi}{4}\times 2+1\right)(外 - 輪)\,輪^2\,\frac{\pi}{4} + 2\,離\cdot輪^2 - 2\,外\cdot輪^2 - 2\,小背\cdot輪^2\right\}\end{aligned}$$

故に本術の如し

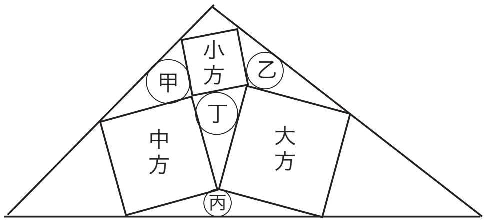
推数試之

$$離径 = \sqrt{63} = 7.937253933190$$

$$天 = 1.065286564928555 \qquad (\boxed{170}\,の帯直弧積の面積)$$

$$黒責 = 0.1775477608214,\quad 十字環責 = 34.2584217557,\quad 小背 = 1.02622649344525$$

$\boxed{172}$ 図のように三斜の中に三方と三円を入れる．甲円径五寸，乙円径四寸，丙円径三寸のとき，丁円径は幾らか．



答曰丁円径四寸七分八厘五毛一六三五九有奇

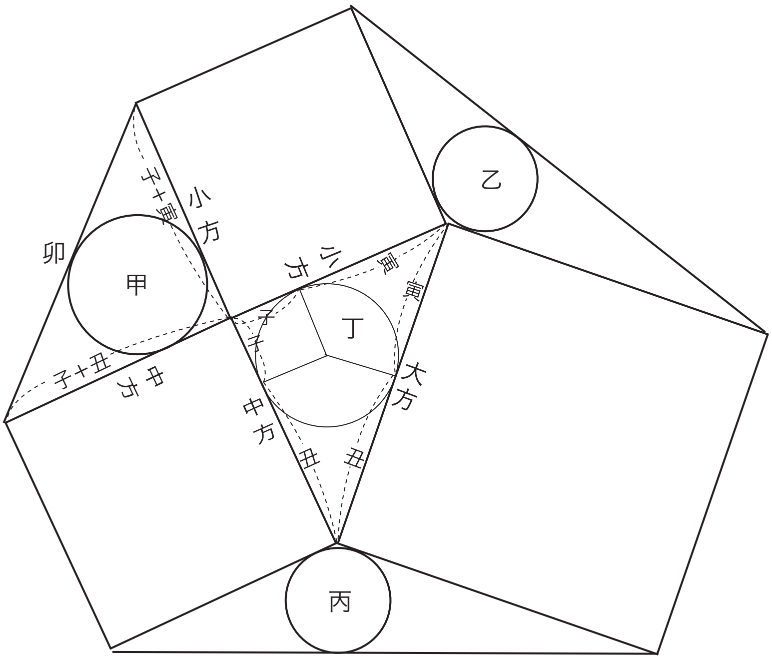
術曰仍レ圖布レ算ヲ

実	8
方	$-4\,丙^2 - 28\,丙乙 - 4\,乙^2 - 28\,丙甲 - 28\,乙甲 - 4\,甲^2$
初廉	$4\,丙^3乙 + 40\,丙^2乙^2 + 4\,丙乙^3 + 4\,丙^3甲 - 24\,丙^2乙甲 - 24\,丙乙^2甲 + 4\,乙^3甲 + 40\,丙^2甲^2$ $-24\,丙乙甲^2 + 40\,乙^2甲^2 + 4\,丙甲^3 + 4\,乙甲^3$
二廉	$3\,丙^4乙^2 - 22\,丙^3乙^3 + 3\,丙^2乙^4 - 10\,丙^4乙甲 + 18\,丙^3乙^2甲 + 18\,丙^2乙^3甲 - 10\,丙乙^4甲$ $+3\,丙^4甲^2 + 18\,丙^3乙甲^2 - 30\,丙^2乙^2甲^2 + 18\,丙乙^3甲^2 + 3\,乙^4甲^2 - 22\,丙^3甲^3$ $+18\,丙^2乙甲^3 + 18\,丙乙^2甲^3 - 22\,乙^3甲^3 + 3\,丙^2甲^4 - 10\,丙乙甲^4 + 3\,乙^2甲^4$
三廉	$4\,丙^5乙^3 - 8\,丙^4乙^4 + 4\,丙^3乙^5 - 4\,丙^5乙^2甲 + 4\,丙^4乙^3甲 + 4\,丙^3乙^4甲 - 4\,丙^2乙^5甲$ $-4\,丙^5乙甲^2 + 8\,丙^4乙^2甲^2 - 8\,丙^3乙^3甲^2 + 8\,丙^2乙^4甲^2 - 4\,丙乙^5甲^2 + 4\,丙^5甲^3 + 4\,丙^4乙甲^3$ $-8\,丙^3乙^2甲^3 - 8\,丙^2乙^3甲^3 + 4\,丙乙^4甲^3 + 4\,乙^5甲^3 - 8\,丙^4甲^4 + 4\,丙^3乙甲^4 + 8\,丙^2乙^2甲^4$ $+4\,丙乙^3甲^4 - 8\,乙^4甲^4 + 4\,丙^3甲^5 - 4\,丙^2乙甲^5 - 4\,丙乙^2甲^5 + 4\,乙^3甲^5$
隅	$丙^6乙^4 - 2\,丙^5乙^5 + 丙^4乙^6 - 2\,丙^6乙^2甲^2 + 2\,丙^5乙^3甲^2 + 2\,丙^3乙^5甲^2 - 2\,丙^2乙^6甲^2$ $+2\,丙^5乙^2甲^3 - 2\,丙^4乙^3甲^3 - 2\,丙^3乙^4甲^3 + 2\,丙^2乙^5甲^3 + 丙^6甲^4 - 2\,丙^3乙^3甲^4 + 乙^6甲^4$ $-2\,丙^5甲^5 + 2\,丙^3乙^2甲^5 + 2\,丙^2乙^3甲^5 - 2\,乙^5甲^5 + 丙^4甲^6 - 2\,丙^2乙^2甲^6 + 乙^4甲^6$

右者江戸関口水道町住

門人 石井善蔵保教考之

四乗方に之を開き，得る商に甲乙丙を連乗して丁円径を得て合問．



4 つの三角形は等積，等積の 4 倍を角とする．

$$小 = 子 + 寅,\ 中 = 子 + 丑,\ 大 = 丑 + 寅$$

$$2(中^2 + 小^2) - 大^2 = 卯^2 \quad (中線定理) \cdots ①$$

だから

$$4\,子^2 + 丑^2 + 寅^2 + 4\,子丑 + 4\,子寅 - 2\,丑寅 = 卯^2$$

面積の関係より

$$\frac{角}{甲} = 卯 + 中 + 小 = 2\,子 + 丑 + 寅 + 卯$$

$$\therefore \quad 卯 = \frac{角}{甲} - 2\,子 - 丑 - 寅 \cdots ②$$

② を ① へ代入して

$$角^2 - 4\,角甲子 - 2\,角甲丑 - 2\,角甲寅 + 4\,甲^2丑寅 = 0 \cdots 甲$$

是を対換して

$$角^2 - 4\,角乙寅 - 2\,角乙丑 - 2\,角乙子 + 4\,乙^2子丑 = 0 \cdots 乙$$

$$角^2 - 4\,角丙丑 - 2\,角丙寅 - 2\,角丙子 + 4\,丙^2子寅 = 0 \cdots 丙$$

面積の関係より

$$2\,子丁 + 2\,丑丁 + 2\,寅丁 - 角 = 0 \cdots 原$$

原 と 甲 より子を消去して

$$角^{2}丁 - 2\,角^{2}甲 + 2\,角甲丁寅 + (4\,甲^{2}丁寅 + 2\,角甲丁)\,丑 = 0 \cdots 前$$

原 と 乙 より子を消去して

$$角^{2}丁 - 角^{2}乙 - 2\,角丁乙寅 + (2\,角乙^{2} - 4\,乙^{2}丁寅)\,丑 - 4\,乙^{2}丁丑^{2} = 0 \cdots 中$$

原 と 丙 より子を消去して

$$-角^{2}丙 + 角^{2}丁 + 2\,角丙^{2}寅 - 4\,丙^{2}丁寅^{2} - (2\,角丙丁 + 4\,丙^{2}丁寅)\,丑 = 0 \cdots 后$$

前 と 中 より丑を消去して

実	$-丁^{2}乙^{2}角^{3} + 3\,丁乙^{2}甲角^{3} + 丁^{2}甲^{2}角^{3} - 丁乙甲^{2}角^{3} - 2\,乙^{2}甲^{2}角^{3}$
方 (寅)	$-2\,丁^{2}乙^{2}甲角^{2} - 2\,丁^{2}乙甲^{2}角^{2} + 4\,丁^{2}甲^{3}角^{2} - 4\,丁乙甲^{3}角^{2} + 4\,乙^{2}甲^{3}角^{2}$
廉 (寅^{2})	$4\,丁^{2}乙^{2}甲^{2}角 - 8\,丁^{2}乙甲^{3}角 - 12\,丁乙^{2}甲^{3}角 + 4\,丁^{2}甲^{4}角 - 4\,丁乙甲^{4}角$
禺 (寅^{3})	$8\,丁^{2}乙^{2}甲^{3} - 8\,丁^{2}乙甲^{4}$

$\cdots$ 地

前 と 后 より丑を消去して

実	$-丁丙角^{3} - 丁甲角^{3} + 3\,丙甲角^{3}$
方 (寅)	$-2\,丁丙^{2}角^{2} - 2\,丁丙甲角^{2} + 2\,丙^{2}甲角^{2} - 2\,丁甲^{2}角^{2} + 2\,丙甲^{2}角^{2}$
廉 (寅^{2})	$-4\,丙^{2}甲^{2}角$
禺 (寅^{3})	$8\,丁丙^{2}甲^{2}$

$\cdots$ 天

天 と 地 より角を消去して (寅も消去できた)

実	$8\,丙^{5}乙^{5}甲^{5}$
方 (丁)	$-4\,丙^{6}乙^{4}甲^{4} - 28\,丙^{5}乙^{5}甲^{4} - 4\,丙^{4}乙^{6}甲^{4} - 28\,丙^{5}乙^{4}甲^{5} - 28\,丙^{4}乙^{5}甲^{5} - 4\,丙^{4}乙^{4}甲^{6}$
廉 (丁^{2})	$4\,丙^{6}乙^{4}甲^{3} + 40\,丙^{5}乙^{5}甲^{3} + 4\,丙^{4}乙^{6}甲^{3} + 4\,丙^{6}乙^{3}甲^{4} - 24\,丙^{5}乙^{4}甲^{4} - 24\,丙^{4}乙^{5}甲^{4}$ $+4\,丙^{3}乙^{6}甲^{4} + 40\,丙^{5}乙^{3}甲^{5} - 24\,丙^{4}乙^{4}甲^{5} + 40\,丙^{3}乙^{5}甲^{5} + 4\,丙^{4}乙^{3}甲^{6} + 4\,丙^{3}乙^{4}甲^{6}$
禺 (丁^{3})	$3\,丙^{6}乙^{4}甲^{2} - 22\,丙^{5}乙^{5}甲^{2} + 3\,丙^{4}乙^{6}甲^{2} - 10\,丙^{6}乙^{3}甲^{3} + 18\,丙^{5}乙^{4}甲^{3} + 18\,丙^{4}乙^{5}甲^{3}$ $-10\,丙^{3}乙^{6}甲^{3} + 3\,丙^{6}乙^{2}甲^{4} + 18\,丙^{5}乙^{3}甲^{4} - 30\,丙^{4}乙^{4}甲^{4} + 18\,丙^{3}乙^{5}甲^{4} + 3\,丙^{2}乙^{6}甲^{4}$ $-22\,丙^{5}乙^{2}甲^{5} + 18\,丙^{4}乙^{3}甲^{5} + 18\,丙^{3}乙^{4}甲^{5} - 22\,丙^{2}乙^{5}甲^{5} + 3\,丙^{4}乙^{2}甲^{6} - 10\,丙^{3}乙^{3}甲^{6}$ $+3\,丙^{2}乙^{4}甲^{6}$
三乗 (丁^{4})	$-4\,丙^{6}乙^{4}甲 + 8\,丙^{5}乙^{5}甲 - 4\,丙^{4}乙^{6}甲 + 4\,丙^{6}乙^{3}甲^{2} - 4\,丙^{5}乙^{4}甲^{2} - 4\,丙^{4}乙^{5}甲^{2}$ $+4\,丙^{3}乙^{6}甲^{2} + 4\,丙^{6}乙^{2}甲^{3} - 8\,丙^{5}乙^{3}甲^{3} + 8\,丙^{4}乙^{4}甲^{3} - 8\,丙^{3}乙^{5}甲^{3} + 4\,丙^{2}乙^{6}甲^{3}$ $-4\,丙^{6}乙甲^{4} - 4\,丙^{5}乙^{2}甲^{4} + 8\,丙^{4}乙^{3}甲^{4} + 8\,丙^{3}乙^{4}甲^{4} - 4\,丙^{2}乙^{5}甲^{4} - 4\,丙乙^{6}甲^{4}$ $+8\,丙^{5}乙甲^{5} - 4\,丙^{4}乙^{2}甲^{5} - 8\,丙^{3}乙^{3}甲^{5} - 4\,丙^{2}乙^{4}甲^{5} + 8\,丙乙^{5}甲^{5} - 4\,丙^{4}乙甲^{6}$ $+4\,丙^{3}乙^{2}甲^{6} + 4\,丙^{2}乙^{3}甲^{6} - 4\,丙乙^{4}甲^{6}$
四乗 (丁^{5})	$丙^{6}乙^{4} - 2\,丙^{5}乙^{5} + 丙^{4}乙^{6} - 2\,丙^{6}乙^{2}甲^{2} + 2\,丙^{5}乙^{3}甲^{2} + 2\,丙^{3}乙^{5}甲^{2} - 2\,丙^{2}乙^{6}甲^{2}$ $+2\,丙^{5}乙^{2}甲^{3} - 2\,丙^{4}乙^{3}甲^{3} - 2\,丙^{3}乙^{4}甲^{3} + 2\,丙^{2}乙^{5}甲^{3} + 丙^{6}甲^{4} - 2\,丙^{3}乙^{3}甲^{4} + 乙^{6}甲^{4}$ $-2\,丙^{5}甲^{5} + 2\,丙^{3}乙^{2}甲^{5} + 2\,丙^{2}乙^{3}甲^{5} - 2\,乙^{5}甲^{5} + 丙^{4}甲^{6} - 2\,丙^{2}乙^{2}甲^{6} + 乙^{4}甲^{6}$

実	8
方	$-4丙^{2}-28丙乙-4乙^{2}-28丙甲-28乙甲-4甲^{2}$
廉	$4丙^{3}乙+40丙^{2}乙^{2}+4丙乙^{3}+4丙^{3}甲-24丙^{2}乙甲-24丙乙^{2}甲+4乙^{3}甲+40丙^{2}甲^{2}$ $-24丙乙甲^{2}+40乙^{2}甲^{2}+4丙甲^{3}+4乙甲^{3}$
隅	$3丙^{4}乙^{2}-22丙^{3}乙^{3}+3丙^{2}乙^{4}-10丙^{4}乙甲+18丙^{3}乙^{2}甲+18丙^{2}乙^{3}甲-10丙乙^{4}甲$ $+3丙^{4}甲^{2}+18丙^{3}乙甲^{2}-30丙^{2}乙^{2}甲^{2}+18丙乙^{3}甲^{2}+3乙^{4}甲^{2}-22丙^{3}甲^{3}$ $+18丙^{2}乙甲^{3}+18丙乙^{2}甲^{3}-22乙^{3}甲^{3}+3丙^{2}甲^{4}-10丙乙甲^{4}+3乙^{2}甲^{4}$
三乗	$4丙^{5}乙^{3}-8丙^{4}乙^{4}+4丙^{3}乙^{5}-4丙^{5}乙^{2}甲+4丙^{4}乙^{3}甲+4丙^{3}乙^{4}甲-4丙^{2}乙^{5}甲$ $-4丙^{5}乙甲^{2}+8丙^{4}乙^{2}甲^{2}-8丙^{3}乙^{3}甲^{2}+8丙^{2}乙^{4}甲^{2}-4丙乙^{5}甲^{2}+4丙^{5}甲^{3}+4丙^{4}乙甲^{3}$ $-8丙^{3}乙^{2}甲^{3}-8丙^{2}乙^{3}甲^{3}+4丙乙^{4}甲^{3}+4乙^{5}甲^{3}-8丙^{4}甲^{4}+4丙^{3}乙甲^{4}+8丙^{2}乙^{2}甲^{4}$ $+4丙乙^{3}甲^{4}-8乙^{4}甲^{4}+4丙^{3}甲^{5}-4丙^{2}乙甲^{5}-4丙乙^{2}甲^{5}+4乙^{3}甲^{5}$
四乗	$丙^{6}乙^{4}-2丙^{5}乙^{5}+丙^{4}乙^{6}-2丙^{6}乙^{2}甲^{2}+2丙^{5}乙^{3}甲^{2}+2丙^{3}乙^{5}甲^{2}-2丙^{2}乙^{6}甲^{2}$ $+2丙^{5}乙^{2}甲^{3}-2丙^{4}乙^{3}甲^{3}-2丙^{3}乙^{4}甲^{3}+2丙^{2}乙^{5}甲^{3}+丙^{6}甲^{4}-2丙^{3}乙^{3}甲^{4}+乙^{6}甲^{4}$ $-2丙^{5}甲^{5}+2丙^{3}乙^{2}甲^{5}+2丙^{2}乙^{3}甲^{5}-2乙^{5}甲^{5}+丙^{4}甲^{6}-2丙^{2}乙^{2}甲^{6}+乙^{4}甲^{6}$

この解は $\dfrac{丁}{甲乙丙}$

$甲=5,\ 乙=4,\ 丙=3$ として

$$8-1516X+20000X^{2}-28196X^{3}-752X^{4}+8836X^{5}=0$$

$$X=0.0797527265174693,\quad 丁=60X=4.785163591048158$$

他の解は

$丁=-122.48457581204,\ 丁=0.34215701077920,\ 丁=45.782197013605,\ 丁=76.6814411753$

【番外　加減代乗除表用例並小表】

夫加減代乗除表 対数表或假数表共云 蘭名ロガリチムと云 といふは真数と其数に対する假数といふものあり．右の表なくては術意を示しがたし．故に其表の内少しばかりを爰に著して其用法をしめす．乗除を初として平方，立方等の開除にいたる迄皆加減にて得る妙法也．寄せ算の少しも出来る人は此表の用法を能会得する時は天文，推歩，地理，渡海等のむつかしき術にいたる迄もたやすく得るの表なくて労を拯（たすくる）の表なれどもしる人稀なるはいまた我国にて印行（はんほん）になきゆへなり．若此表を写んと思ふ人は予が門をたゝくべし．詳なる用法をそへ貸與ふべき也．

真数	假数
1	00000000
2	03010300
3	04771213
101	20043214
102	20086002
103	20128372
201	23031961
202	23053514
203	23074960

此表省略して一より三百に至て止る．若一より以下の小数を云時は位を進（あげ）三百より以上

の多数を云時は位を退(さけ)用ゆ．然れども一十百の三位に数ある時は進退なりがたき故，此短少の表にては得がたし．

△相乗例

たとへは　甲三　乙十七　相乗して五十一を得る．

術曰查表求其假数 解曰甲三ならば真数三の所の下にある假数〇四七七一二一三を求めおく事也．乙も亦是におなじ．

真数	假数
甲 3	04771213
乙 17	12304489

右假数二位相併得一七〇七五七〇二相乘の假数とす．査表五十一を得る相乘数とす．

173 図のような直堡墻 (直方体) がある．長二十四寸五分，平一十四寸七分，高一十六寸二分である．米は幾ら容るか．乗除を用いないで答えることを請う．

答曰容米九斗

術曰加減代乗除表 (対数表) により假数をみると

升の方面 49	假方面 16901961
升の深 27	假深 14313638
長 245	假長 23891661
平 147	假平 21673173
高 162	假高 22095150

(1 升舛は $49 \times 49 \times 27 = 64827$)

$$16901961 \times 2 + 14313638 = 48117560$$

$$23891661 + 21673173 + 22095150 = 67659984$$

$$67659984 - 48117560 = 19542424$$

対数表より 90 升=9 斗を得る．

$$\left(\frac{24.5 \times 14.7 \times 16.2}{4.9 \times 4.9 \times 2.7} = 90 \right)$$

174 仮令は太陽の実引二宮一十八度三十八分，半径一千万，楕円両心差一十六万九千のとき，太陽距地心線は幾らか．

答曰 九百九十六万三千九百五十六

術曰 八線表 (三角比表) により実引の余弦は 0.1970870

(一宮 $= 30^\circ$ だから 二宮 $18^\circ 38$ 分 $= 78.633333^\circ$　で $\cos 78.633333^\circ = 0.1970870$)

$$\frac{\text{半径}^2 - \text{両心差}^2}{0.1970870 \times \text{両心差} + \text{半径}} = \text{地心線}$$

【術解】地球は太陽を一つの焦点として楕円軌道を描いているとする．甲の角を〈実引〉と呼んでいる．甲角が 78 度 38 分のとき地 (地心線) の長さを求める問題である．

$$\text{天} = 2 \times \text{中心差}$$

$$小勾 = 地 \cdot 甲角余弦$$

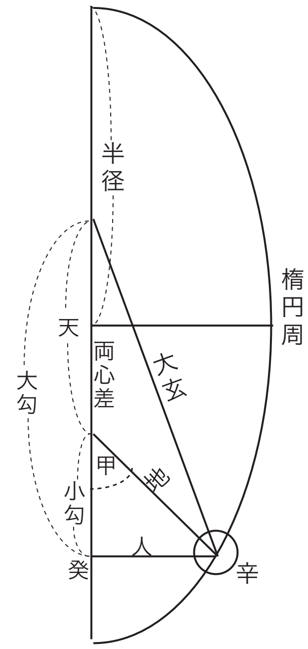
$$大玄 = 径 - 地$$

双股弦の術 $大玄^2 = 天^2 + 地^2 + 2\,天 \cdot 小勾$ に代入して

$$(径 - 地)^2 = (2 \times 中心差)^2 + 地^2 + 2(2 \times 中心差)(地 \cdot 甲角余弦)$$

これより，(半径 1，両心差 0.0169 として)

$$地 = \frac{半径^2 - 両心差^2}{甲角余弦 \times 両心差 + 半径} = \frac{1^2 - 0.0169^2}{0.1970870 \times 0.0169 + 1} = \frac{0.99971439}{1.0033307703} = 0.9963956$$

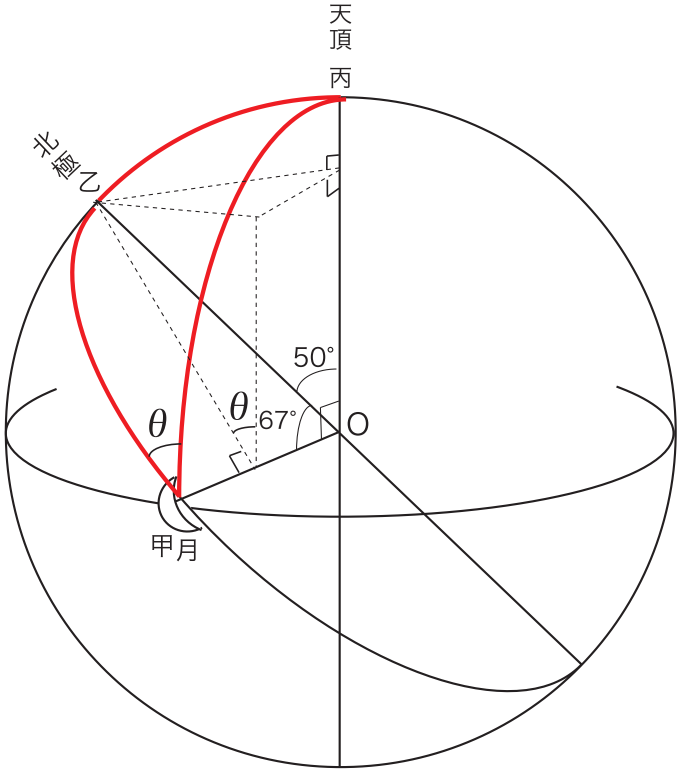


$\boxed{175}$ 今月帯食 (月食の状態で、月が欠けながら地平線上に昇り、または沈むこと) がある．月は北極を距たること 67 度，北極は天頂を距たること 50 度であるとき，赤経高弧交角はいくらか．
答曰 45 度 42 分 34 秒
術曰八線表 (三角比表) により $\sin 67^\circ = 0.9205049$, $\cos 50^\circ = 0.6427876$ を求める．

$$余弦 \times 半径 \div 正弦 = 0.6427876 \div 0.9205049 = 0.6982989 = 交角の余弦$$

八線表より 交角=45 度 42 分 34 秒
【術解】
月と北極の距 $=$ 甲乙 $= 67°$　北極と天頂の距 $=$ 乙丙 $= 50°$
月と天頂の距 $= 90°$
赤経高弧交角 $=$ 甲角 $= \theta$
球面三角形甲乙丙の余弦法則により，$\cos 50^\circ = \sin 67^\circ \cos\theta$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\cos 50^\circ}{\sin 67^\circ} = \frac{0.6427876}{0.9205049} = 0.6982989 \quad よって，\quad \theta = 45.70931^\circ$$



球面三角形の正弦法則

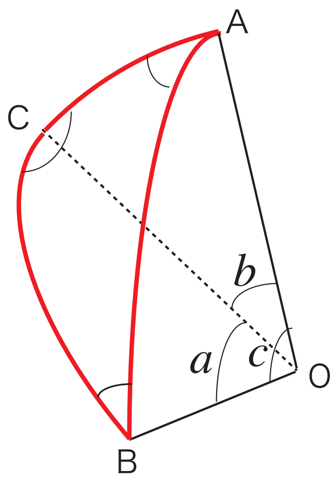
$$(1)\quad \frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin c}{\sin \mathrm{C}}$$

球面三角形の余弦法則

$$(2)\quad \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \mathrm{B}$$

$$(3)\quad \sin a \cos \mathrm{B} = \cos \mathrm{b} \sin \mathrm{c} - \sin \mathrm{b} \cos \mathrm{c} \cos \mathrm{A}$$

本問は (2) で $a = 67^\circ$, $b = 50^\circ$, $c = 90^\circ$, $\mathrm{B} = \theta$ としたもの.



【番外　弧三角比例解】

凡弧三角比例は暦算全書及同後編に出るが如く比例数多(あまた)ありて却て煩(わづらは)しく益寡(すくな)し．扨算を布(しく)に乗除は難(かた)く，加減は易し．仍て西人(せいひと)は線對数表を撰(えら)み加減にて得ん事を欲といへども三辺ありて角を求る法式は三角ありて辺を求る法は對数の一表を用て得る法をしらず．真数と對数との二表を交へ用ひ反覆して検査する事数次(すたび)にして得るの法あるのみ．今廣胖乗除を用ひずして對数の一表を以得る法を発明す．又八線表線名多くありて益なきゆへ正余の二弦と正余の二切とを用ひ残る四線は是を省き用ひざる．比例を作り約して九件とす．右九件の比例を或は置列(おきつらね)を互反し或は對換して用る時は弧三角形の辺角壹も得ざる事なし．去ながら象限九十度以上の辺角に至ては其象(かたち)に疑(うたがはし)き事ありて術を施しかたき事あり．故に預(あらかじめ)四寸計(ばかり)の小球を作り置て其球面に糸にても墨にても引て大抵の形を見るべし．假如術に仍て正玄 ○九五九一 八七八○ を得る時，對数表を査(さし)て見るに 二十三度 百五十七度　二百○三度 三百三十七度 此四件の正玄にあたる也．故に図象を照合て其相應の度を以答とする也○暦算推歩に蒞(のぞみ)て術を施に真数より對数は易しと云事を人々しらざるにはあらねども是迄悉對数にて得る術なきゆへ用ひざると見てたり．廣胖是を慟(なげ)き前編に對数表にて得がたきの二題を設て術を施し爰に其術を詳にして暦算の労を拯(たす)く．

$\boxed{\text{正弦比例}}$　∠C = 90° の球面三角形

① $\cos c = \cot \mathrm{A} \cot \mathrm{B}$

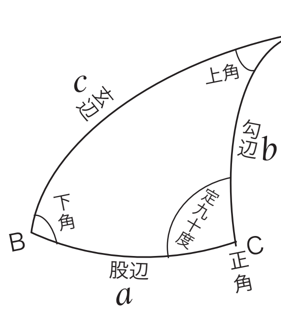
② $\sin B = \dfrac{\cos \mathrm{A}}{\cos a}$

③ $\sin B = \dfrac{\sin b}{\sin c}$

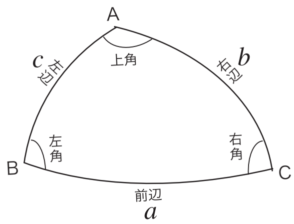
④ $\cos B = \dfrac{\tan a}{\tan c}$

⑤ $\tan B = \dfrac{\tan b}{\sin a}$

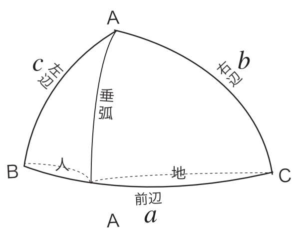
⑥ $\cos c = \cos a \cos b$



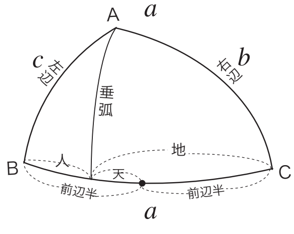
$\boxed{\text{斜弧比例}}$



① $\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} = \sin b \sin c$　　総正弦法 (正弦法則)

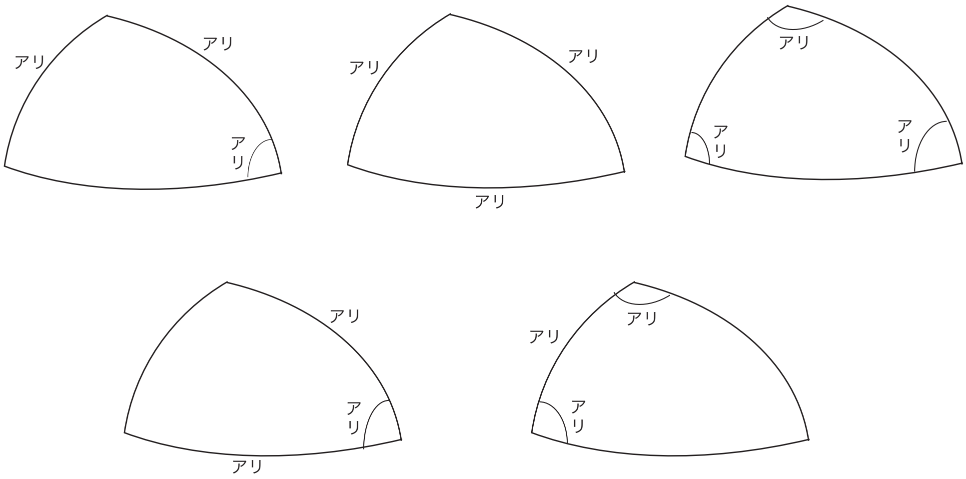


② $\cos b \cos \text{人} = \cos c \cos \text{地}$　　総余弦法



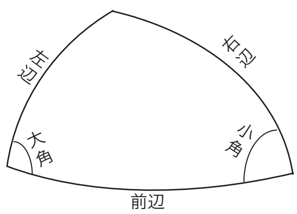
③ $\tan \dfrac{a}{2} \tan \text{天} = \tan \dfrac{b+c}{2} \tan \dfrac{b-c}{2}$　　総正切法

○斜弧比例用法　　(次の 5 つの場合について解きかたを述べている)



斜弧の法右五則の外に知る事なし.
若右辺九十度なる時は地も亦九十度なり右角は直に垂弧となるゆへ三辺ありて三角を求る時も三辺内何れの辺にても一辺九十度なる時は正弧の比例にて直に九十度の傍なる一角を得る也. 其他の三角は総正玄法にて是を得る也.
正弧は比例を直に用ゆ故に用法を別に示さず.

$\boxed{176}$ 今図のような斜弧三角形 (球面三角形) がある. 左辺六十五度, 右辺七十三度, 前辺一百一十四度であるとき, 大小角は各々幾らか. 乗除を用いないで答えよ.



答曰大角五十五度五十三分三十五秒
　　小角五十一度四十一分三十六秒
術曰八線対数表により

$$\log\tan\frac{73^\circ+65^\circ}{2}=0.4158226$$

$$\log\tan\frac{73^\circ-65^\circ}{2}=\overline{2}.8446437$$

$$\log\tan\frac{114^\circ}{2}=0.1874826$$

斜弧比例 ③ より

$$\log\tan\text{天}=0.4158226+\overline{2}.8446437-0.1874826=\overline{1}.0729837$$

これより 天 $= 6$ 度 44 分 48 秒

$$地 = 天 + \frac{前辺}{2} = 63 度 44 分 48 秒$$

$$人 = 前辺 - 地 = 50 度 15 分 12 秒$$

$$\log\tan 地 = \log\tan 63.74666666^\circ = 0.3069613$$

$$\log\tan 右辺 = \log\tan 73^\circ = 0.5146610$$

正弧比例 ④ より

$$\log\cos 小角 = 0.3069613 - 0.5146610 = \bar{1}.7923003$$

故に，小角 $= 51$ 度 41 分 36 秒

$$\log\tan 人 = \log\tan 50.25333333 = 0.0800893$$

$$\log\tan 左辺 = \log\tan 65^\circ = 0.3313275$$

正弧比例 ④ より

$$\log\cos 大角 = 0.0800893 - 0.3313275 = \bar{1}.7487618$$

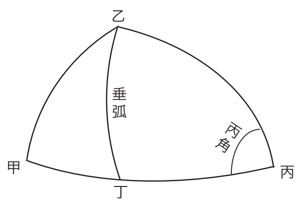
故に，小角 $= 55$ 度 53 分 35 秒

現代ならば $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ として半角法則 $\cos\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$ を使う．

$s = \dfrac{65+73+114}{2} = 126$

$$\cos\frac{小角}{2} = \sqrt{\frac{\sin 126 \sin 61}{\sin 114 \sin 73}} = \sqrt{\frac{0.89017 \times 0.874612}{0.93545 \times 0.9563047}} = 0.89996415475876$$

$\boxed{177}$ 今図のような斜弧三角形 (球面三角形) がある．甲丙辺一百〇八度四十九分二十三秒，乙丙辺五十八度，丙角一十九度〇二分三十五秒であるとき，甲乙辺は幾らか．乗除を用いないで答えよ．



答曰甲乙辺五十四度

術曰八線対数表により

$$\log\cos 丙角 = \bar{1}.9755576$$

$$\log\tan 乙丙辺 = 0.2042108$$

正弧比例 ④ より

$$\log\tan 丙丁辺 = \bar{1}.9755576 + 0.2042108 = 0.1797684$$

故に，丙丁辺 $=56$ 度 32 分

$$甲丁辺 = 甲丙辺 - 丙丁辺 = 52 度 17 分 23 秒$$

$$\log\cos 丙丁 = \bar{1}.7415075$$

$$\log\cos 乙丙 = \bar{1}.7242097$$

$$\log\cos 甲丁 = \bar{1}.7865165$$

斜弧比例 ② より

$$\log\cos 甲乙 = \bar{1}.7242097 + \bar{1}.7865165 - \bar{1}.7415075 = \bar{1}.7692187$$

よって，甲乙辺 $=54$ 度

$\boxed{178}$ 今納米がいくらか有る．第一戸から第七戸までの納米の合計は二万零六百石で，第十六戸と第十七戸の納米を合せて二千六百七十一石七分石之三である．各戸の納米は幾らか．但し，各戸の納米は分数 (不尽) になる．

答曰 第一戸納米九百六十三石一十九分石之三
第二戸納米一千八百一十二石一百三十三分石之七十九

他は之を略す．

術曰 第 n 戸納米 $=(271325-15125\times n)\times n \div 266$

【術解　招差法】戸数を以限数とし，其戸の納米を以元責として招差法に仍て差数を求る也．第 n 戸納米を a_n とし，$a_n = an+b$ と仮定する．n を限数，a_n を元積，b を直差，a を定差と云う．

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 = 20600 \\ a_{16}+a_{17} = 2671+\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} 28a+7b = 20600 \\ 33a+2b = \dfrac{18700}{7} \end{cases}$$

$$\therefore \quad a = -\frac{900}{7},\ b = \frac{24200}{7}$$

これを〈定差 900 負　直差 24200 正　約法 7〉という．このとき各積を求めると

$$a_1 = 3328 + \frac{4}{7},\ a_2 = 3200$$

しかし問題には〈各戸の納米数は分数になる〉とあるので，これは不適．

そこで $a_n = an^2 + bn$ とする．a を平差，b を定差と云う．同様にして，

$$\begin{cases} 140a + 28b = 20600 \\ 545a + 33b = \dfrac{18700}{7} \end{cases}$$

これを解いて $a = -\dfrac{15125}{266},\ b = \dfrac{271325}{266}$

これを〈平差 15125 負　定差 271325 正　約法 266〉という．右定平の二差を用て積を求め是を試る．

第一戸納米	$963\frac{3}{19}$	第二戸納米	$1812\frac{79}{132}$	第三戸納米	$2548\frac{41}{133}$	第四戸納米	$3170\frac{40}{133}$
第五戸納米	$3678\frac{4}{7}$	第六戸納米	$4073\frac{16}{133}$	第七戸納米	$4353\frac{18}{19}$	第八戸納米	$4521\frac{1}{19}$
第九戸納米	$4574\frac{58}{133}$	第十戸納米	$4514\frac{13}{133}$	第十一戸納米	$4340\frac{5}{133}$	第十二戸納米	$4052\frac{34}{133}$
第十三戸納米	$3650\frac{100}{133}$	第十四戸納米	$3135\frac{10}{19}$	第十五戸納米	$2506\frac{11}{19}$	第十六戸納米	$1763\frac{121}{133}$
第十七戸納米	$907\frac{69}{133}$						

此数全く題意に協(かな)ふ故に本術のごとし．

【番外　招差法解】

夫招差に累裁・方程の二枝あり．共に得る所の数おなじ．然れとも方程法は術理明かにして会得し易し．故(かゝるがゆへ)に方程法を以爰に示す．

招差は数を以其枝(し)をなす数の参差(まじはりたがひ)有て等からさる者是を求むに此法を用ゆ．

- 設題法 (題ヲ設(もうくる)法)

  一次相乗の題は限数及其元積各二段を云を限(かぎり)とす．

  二次相乗の題は限数及其元積各三段を云を限(かぎり)とす．

  三次相乗の題は限数及其元積各四段を云を限(かぎり)とす．

  四次相乗以上是にならへ．但此定則は直差と云者出来ざる以前の定(さだめ)なり．今は然らず．題数に仍て定則の外に各一段を増ざる時は変化あり．能是を試て題を設(もふ)くべし．

- 招差数法 (差数ヲ招ク法)

  一次相乗の術は定・平の二差をまねく．

  二次相乗の術は定・平・立の三差をまねく．

  三次相乗の術は定・平・立・三乗の四差をまねく．

  四次以上是にならへ．

- 元積を求むる法

一次相乗は
(平差 × 限数 ± 定差) × 限数 を約法を以て之を約すと元責が得られる.
二次相乗は
((立差 × 限数 ± 平差) × 限数 ± 定差) × 限数 を約法を以て之を約すと元責が得られる.
三次相乗は
(((三乗差 × 限数 ± 立差) × 限数 ± 平差) × 限数 ± 定差) × 限数 を約法を以て之を約すと元責が得られる.
四次以上是にならへ.

- 直差 (昔は找差 (かさ) と云う) 用る法
  一次相乗の術は直定の二差をまねく.
  二次相乗の術は直定平の三差をまねく.
  三次相乗の術は直定平立の四差をまねく.
  四次以上是にならへ.

- 同く元責を求む法
  一次相乗の法
  定差 × 限数 ± 直差 を約法を以て之を約すと元責が得られる.
  二次相乗の法
  (平差 × 限数 ± 定差) × 限数 ± 直差 を約法を以て之を約すと元責が得られる.
  三次相乗の法
  ((立差 × 限数 ± 平差) × 限数 ± 定差) × 限数 ± 直差 を約法を以て之を約すと元責が得られる.
  四次以上是にならへ.

按に直差の有無を云わざる時は右両術に仍て諸差数を求め，各題に云う限数を以法の如く其元責を求め，題にいふ責と是をくらべ其題数にかなふ術を以答術とす．扨如此両術を施(ほどこし)て其脗合 (ふんごう) する術を用る事迂遠なるを憂(うれへ)ける．拾璣算法に渾沌の一術を載．其法直差の有無に拘らずして得るの法にして捷術なるに似たれど共是を試るに左の如し．
甲限数 五　責 八十五 乙限数 九　責二百六十一
渾沌術に仍て得る数　直差一百三十五負　定差四十四正
此の如く各題に云限数を以是を試るに各其責密合す．

渾沌術：$A_n = (n-5) + 85$ とすると $A_5 = 85$，だから $B_n = A_n + 43(n-5)$ とすると $B_5 = 85$，$B_9 = 261$ となる．よって $B_n = 44n - 135$ が求める数列である．

又方程法に仍て 直差なき心にて是を試み 得る数
定差二正　平差三正　此(かく)の如く各題に云限数を以其責を試るに是も亦題に密合す．然る時は渾沌の術も益なし
○扨此(かく)の如く直差の有も無も各題に合事(あうこと)あり．此の如きの数に逢(あふ)時は定則の外に各一段を増て云べし．總(そうじ)て問(とひ)を設(もふく)る事難(かたし)といへとも別(べつし)て招差の題は容易ならず．よく〻〻前の両術に仍て是を試て変化なきようにすべし．

假如は 甲限数 五　其責 八十五　乙限数 九　其責 二百六十一
定平二差を問ふ．　定差 二正　平差 三正

假如は 甲限数 五　其責 八十五　乙限数 九　其責 二百六十一
直定二差を問ふ．　直差 一百三十五負　定差 四十四正

假如は 甲限数 三　其責 三十四　乙限数 五　其責 八十四　丙限数 九 其責 二百三十二　丁限数 一十二 其責 三百六十九ヶ六　各差は幾らかを問ふ．
定差 二百五十八正　平差 四百五十七正　立差 一十一負　約法 一百三十五

此題の如く差名を不云(いはざる)時は直差を用る術と直差なき術と両術を施し題に協(かな)ふ者を答術とする．

又直差を用ひざる法に仍て是を試れば左のごとし．
定差一百七十八万七千一百二十七正　平差八十六万七千九百一十〇正　立差三万三千一百六十九正
三乗差五十四負　約法四十一万三千六百四十
此数を以題に云積を試るに甲乙の責合といへども丙丁の責不合．故に此差数を用ひず．
〇若題に甲乙丙の三段を云て直定丙の三差を問時は
直差一十一負　定差九正　平差二正　此のことし
題に段数を多く云と寡(すくな)くいふとに仍て此の如く差の数変る事あり．又何程段数を増ても差数おなじ者あり．能(よく)々味(あじは)ふべし．

【参考】
『括要算法』の累裁招差法
假如一段限数七，元積六百三十七，二段限数十一元積九百五十七者

$a_n = an^2 + bn$ として $\begin{cases} a_7 = 637 \\ a_{11} = 957 \end{cases}$ を解く．

第一術日 (平差を求める術)

$$637 \div 7 = 91(\text{一段定積})$$

$$957 \div 11 = 87(\text{二段定積})$$

$$87 - 91 = -4(\text{一段平積実})$$

$$11 - 7 = 4(\text{一段平積法})$$

$$\text{実} \div \text{法} = -1(\text{平差} = a)$$

第二術曰 (定差を求める術)

$$91 - 7 \times (-1) = 98(\text{一段定積})$$

$$87 - 11 \times (-1) = 98(\text{二段定積})$$

よって 定差 $(b) = 98$

$\boxed{179}$ 今猪鹿多く田んぼを荒らす．猟師九百九十九人に九百九十九谷の狩を命じた．猟師が獲る数は各々異なる．猟師のうち十人は各々一谷ごとに一匹の獲物を獲る．猟師のうち二人は各々一谷ごとに三匹の獲物を獲る．猟師のうち三人は各々一谷ごとに五匹の獲物を獲る．猟師のうち四人は各々一谷ごとに七匹の獲物を獲る．猟師のうち五人は各々一谷ごとに九匹の獲物を獲る．このようにしていくとすると獲物の総数は幾らになるか．

答曰五千七百七十〇万一千二百四十一

術曰 $\sqrt{\text{人数} \times 8 - 71} = \text{天}$

$$\text{総数} = \{\{(2\,\text{天} - 3)\,\text{天} - 2\}\,\text{天} + 219\} \times \text{谷数} \div 24$$

【術解　招差法】このような規則でいくと， n 人が各々一谷ごとに $2n-1$ 匹の獲物を獲ることになる．

$10 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 44 = 999$ だから

$$\text{総数} = \left\{9 + \sum_{n=1}^{44} n(2n-1)\right\} \times 999 = \left\{9 + \frac{1}{6} \cdot 44 \cdot 45 \cdot (4 \cdot 44 - 1)\right\} \times 999 = (9+57750) \times 999 = 57701241$$

しかし，ここでは招差法でやっている．

まず，一谷で得る獲物の数 a_n は $a_n = 9 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + \cdots n(2n-1)$ で n はわからない． $a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ として $a_1 = 10$, $a_2 = 16$, $a_3 = 31$, $a_4 = 59$ となるように A，B，C，D を定めると，

$$\begin{cases} A + B + C + D = 10 \\ 8A + 4B + 2C + D = 16 \\ 27A + 9B + 3C + D = 31 \\ 64A + 16B + 4C + D = 59 \end{cases}$$

これを解いて， $A = 4$, $B = 3$, $C = -1$, $D = 54$, 約法 6

次に限数 n を $10 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 999$ となるように定める． $9 + \dfrac{1}{2}n(n+1) = 999(= \text{人数})$ を解くと 天 $= \sqrt{\text{人数} \times 8 - 71}$ として $n = \dfrac{\text{天} - 1}{2}(= 44)$ となるので，一谷で得る獲物の数は a_{44} で

$$a_{44} = \frac{4}{6}n^3 + \frac{3}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + \frac{54}{6} = \frac{2\,\text{天}^3 - 3\,\text{天}^2 - 2\,\text{天} + 219}{24} = \frac{((2\,\text{天} - 3)\,\text{天} - 2)\,\text{天} + 219}{24}$$

よって獲物の総数は

$$\frac{((2\,\text{天} - 3)\,\text{天} - 2)\,\text{天} + 219}{24} \times \text{谷数}$$

別に直差を交へざる招差に仍て試るに題に合はず．故に変数なしとす．

$\boxed{180}$ 今毎日米を納めるが，その数はわからない．初日の納米と次の日の納米の差は九俵である．又第三日の納米と第五日の納米の差は四十八俵である．又今日納めた米は一千俵に幾 (近) い．初日から今日まで幾日か．
答曰一十八日
術曰 日数 $=\left[\sqrt{1000 \div 3}\ \right]$
【術解　招差法】今日までの日数を限数 n とし，其日の納米俵数を元責 a_n として術を起こす也．
$a_n = An^2 + Bn$ とする．$a_2 - a_1 = 9,\ a_5 - a_3 = 48$ より

$$\begin{cases} 3A + B = 9 \\ 8A + B = 24 \end{cases}$$

これをといて $A = 3,\ B = 0$　よって　$a_n = 3n^2$，ここで，$a_{18} = 972,\ a_{19} = 1083$ であるが，1000 に近い方をとって $n = 18$ ，これは $\sqrt{\dfrac{1000}{3}}$ の不尽を棄てたもの．

解曰題辞一千俵に近と云．故に真の俵数は是より寡(すくなし)と見て不尽を棄る也．若内外の差別なく一千俵に近きを用るには此不尽を収棄して其数を試み近きを用ゆべし．右題意のときは術又不尽収棄時宜拠るとすべし．
○納俵数日々に減少すると見て術を試るに負を得て術行れず．又直差あるとき是を試るに是も亦術行れず．故に此術の外変数なしと治定(ちじやう)す．

$\boxed{181}$ 今大農家あり．人に命じて耕せり．耕長が日々巡察したところ，初日は一反三畝耕し，次日は一反四畝耕し，五日目は一町二反五畝耕し，七日目は四町六反九畝耕した．耕長疾(やまひ)になり数日間巡察しなかったが，疾が癒えて再び行察したところ，その日は七十一町二反五畝耕した．初日から今日まで幾日か．
答曰一十五日
術曰 $\left(\sqrt[3]{\text{最終日の反別} \times 9 - 125} + 5\right) \div 3$
【術解　招差法】日数 n を限数とし，反別 a_n を元責とする．$a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ と仮定して

$$\begin{cases} A + B + C + D = 13 \\ 8A + 4B + 2C + D = 14 \\ 125A + 25B + 5C + D = 125 \\ 343A + 49B + 7C + D = 469 \end{cases}$$

これを解いて $A = 3,\ B = -15,\ C = 25,\ D = 0$　　(1 町=10 反，1 反=10 畝)

別に甲乙丙丁の四行数を用ひ定平立三乗の四差を求て是を試るに三乗差空を得．定平立の三差数初の如し○又甲乙丙の三行数を用ひて直差を交る術に仍て是を試れば直差 $\overset{\text{三十ヶ}}{\text{正}}$ 定差 $\overset{\text{二六ヶ}}{\text{負}}$ 平差 $\overset{\text{九ヶ}}{\text{正}}$ を得る．是を試るに甲乙丙の責朒合して丁責は不合．故に右四行数を用るなり．

$3n^3 - 15n^2 + 25n = 7125$ となる n を求める．　此式を観て一計を施す．
この式に 9 を掛けて (責 $= 7125$)

$$27n^3 - 135n^2 + 225n - 9\,\text{責} = 0$$

$X = n - \dfrac{2}{3}$ で展開して

$$27X^3 - 81X^2 + 81X - 9\,\text{責} + 98 = 0$$

$$(3X - 3)^3 + 27 - 9\,\text{責} + 98 = 0$$

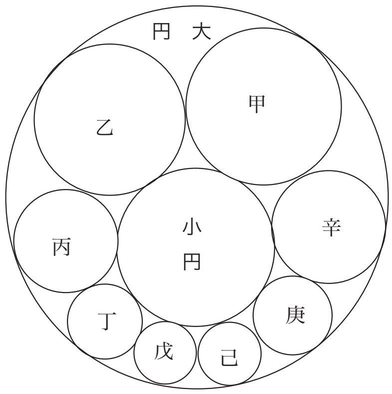
$(3X-3)^3 = 9\,\text{責} - 125$

$\therefore \quad X = \dfrac{3+\sqrt[3]{9\,\text{責}-125}}{3}$

$\therefore \quad n = \dfrac{5+\sqrt[3]{9\,\text{責}-125}}{3}$

故に本術のごとし．

$\boxed{182}$ 今大円内に小円がありその間罅（すきま）に図のように円を連環さす．(図は仮に環円数 8 個とする)　大円径，甲円径，乙円径と環円個数が与えられたとき，各円径を得る術を問う．



術曰　環円の個数を n とする．

天 $= n$ 角形の二距斜冪率

率 $=$ 天 $- 2$

$\text{甲方} = \dfrac{\text{大}}{\text{甲}}$

$\text{乙方} = \dfrac{\text{大}}{\text{乙}}$

地 $=$ 甲方 $+$ 乙方

$\text{人} = 2\left(\text{地} - \sqrt{(\text{甲方}\times\text{乙方}-\text{地})\,\text{天}}\right) - \text{天}$

$\text{小方} = \dfrac{2\,\text{人}}{\text{天}} + 1$

丙方 $=$ 率 $\times$ 乙方 $+$ 人 $-$ 甲方

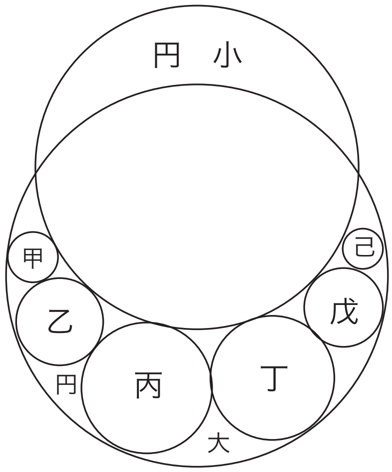
丁方 $=$ 率 $\times$ 丙方 $+$ 人 $-$ 乙方

$\vdots$

$\text{其径} = \dfrac{\text{大}}{\text{其方}}$

【番外 182 番助術】
百八十二番の解義直に其題を用てする時は混雑して会得し易からず．故に別に項を設て是を示す．

今図のように交わる大小円内に累円を容れる．大円径，小円径，甲円径，乙円径が与えられたとき，累円径を得る術を問う．



術曰

$$東 = \frac{大}{甲 + 乙}$$

$$西 = \frac{小}{甲 + 乙}$$

$$南 = 西 \cdot 東 = \frac{大小}{(甲 + 乙)^2}$$

$$北 = 南 + 東 - 西 = \frac{大小}{(甲 + 乙)^2} + \frac{大 - 小}{甲 + 乙}$$

$$甲方 = \left(2\sqrt{(北 - 1)\,南} + 南 + 北\right) 乙$$

$$通実 = 甲方 \times 甲$$

$$乙方 = \frac{通実}{乙}$$

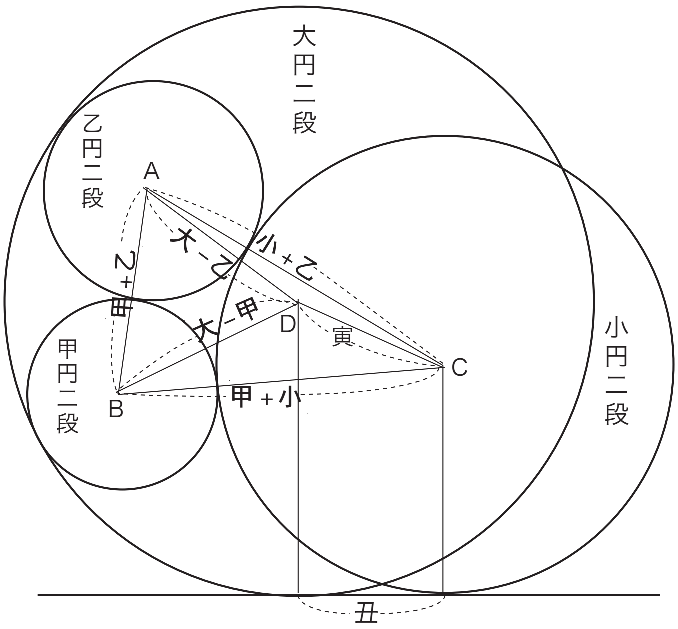
$$率 = \frac{大小}{通実} - 2$$

$$丙方 = 率 \cdot 乙方 + 2(大 - 小) - 甲方$$

$$丁方 = 率 \cdot 丙方 + 2(大 - 小) - 乙方$$

$$\vdots$$

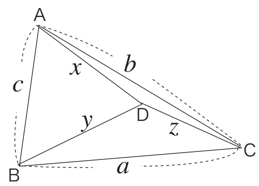
$$其径 = \frac{通実}{其方}$$



$寅^2 = 丑^2 + (大 - 小)^2$ で，乙，甲，小，大円の中心を各々，A，B，C，D とするとき，$\triangle ABC$ と D に六斜術を使うと

六斜術

$$(y^2+z^2-a^2)^2x^2+(x^2+z^2-b^2)^2y^2+(x^2+y^2-c^2)^2z^2$$
$$=(y^2+z^2-a^2)(x^2+z^2-b^2)(x^2+y^2-c^2)-4x^2y^2z^2$$



$$(乙^2+2\,乙甲+甲^2)\,子^4+(-2\,乙^2大小+2\,乙^2大甲-2\,乙^2小甲+2\,乙大甲^2-2\,乙小甲^2-2\,大小甲^2)\,子^2$$
$$+\,乙^2大^2小^2-2\,乙^2大^2小甲+2\,乙^2大小^2甲-2\,乙大^2小^2甲+乙^2大^2甲^2+2\,乙^2大小甲^2-2\,乙大^2小甲^2$$
$$+\,乙^2小^2甲^2+2\,乙大小^2甲^2+大^2小^2甲^2=0\ \cdots\ ①\qquad (但し丑=2\,子)$$

$Y = 子^2 - 大小$ で展開して

$$(甲+乙)^2Y^2+\{4\,甲乙大小+2(大-小)(甲+乙)\,甲乙\,\}Y+(大+小)^2甲^2乙^2=0\cdots(前式)$$

$東 = \dfrac{大}{甲+乙}$，$西 = \dfrac{小}{甲+乙}$ と置くと

$$Y^2+\{4\,東西甲乙+2(東-西)\,甲乙\,\}Y+(東+西)^2甲^2乙^2=0$$

これを解いて

$Y = 乾甲乙$

$\boxed{天 = 東^2西^2+(東-西)\,東西-東西}$

$\boxed{乾 = 東-西+2\,東西+2\sqrt{天}}$

(前式) を甲→乙，乙→丙に対換して

$$(乙+丙)^2Y^2+\{4\,乙丙大小+2(大-小)(乙+丙)\,乙丙\,\}Y+(大+小)^2乙^2丙^2=0\cdots(后式)$$

(前式) $\times$ 丙^2 $-$ (后式) $\times$ 甲^2 より

$$(2\,甲丙+甲乙+丙乙)Y+4\,大小甲丙+2(大-小)\,甲乙丙=0\cdots(定后式)$$

$$(2\,甲丙+甲乙+丙乙)\,乾甲乙+4\,大小甲丙+2(大-小)\,甲乙丙=0\cdots(通矩合)$$

甲乙で割って丙を求める式を作ると

$\{2(大-小)+率\cdot乙方-甲方\,\}丙-通実=0\cdots②$

$\boxed{甲方=乾\cdot乙}$

$\boxed{乙方=乾\cdot甲}$

$\boxed{率=\dfrac{4\,大小}{通実}-2}$

$\boxed{通実=乾甲乙}$

丙方 $=2(大-小)+率\cdot乙方-甲方$ と置く

(通矩合) を甲→乙，乙→丙，丙→丁に対換して

$$(2\,乙丁+乙丙+丁丙)\,乾乙丙+4\,大小乙丁+2(大-小)\,乙丙丁=0$$

$丙=\dfrac{通実}{丙方}$ を代入して，丁を得る式を作ると

$$\{2(大-小)+率\cdot丙方-乙方\,\}丁-通実=0$$

丁方 $=2(大-小)+率\cdot丙方-乙方$ と置く．(通矩合) を甲→丙，乙→丁，丙→戊に対換して

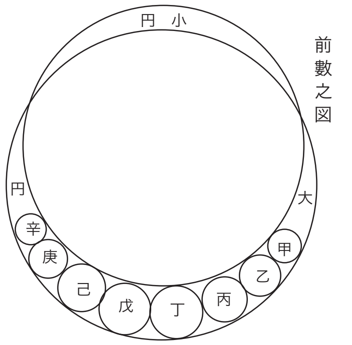
$$(2\,丙戊+丙丁+戊丁)\,乾丙丁+4\,大小丙戊+2(大-小)\,丙丁戊=0$$

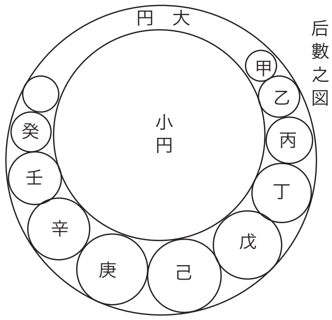
$丁=\dfrac{通実}{丁方}$ を代入して，戊を得る式を作ると

$$\{2(大-小)+率\cdot丁方-丙方\,\}丁-通実=0$$

戊方 $=2(大-小)+率\cdot丁方-丙方$ と置く．遂て此如く之を求め，以て后用に達す．數を設て之を試る．

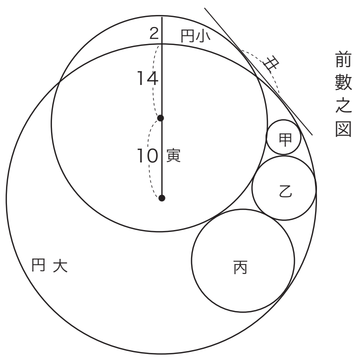
大径 24 寸　小径 16 寸	甲径 3 寸　乙径 5 寸	大径 27 寸　小径 18 寸	甲径 4 寸　乙径 5 寸
東 3　西 2　南 6	北 7　開商 6	東 3　西 2　南 6	北 7　開商 6
乾 25　率 2.096	加數 16	乾 25　率 1.888	加數 18
通実 375		通実 500	
甲方 125		甲方 125	
乙方 75		乙方 100	
丙方 48.2	丙径 7.7800829875	丙方 81.8	丙径 6.1124694376
丁方 42.0272	丁径 8.9227928579	丁方 72.4384	丁径 6.9024163979
戊方 55.8890112	戊径 6.7097268666	戊方 72.9636992	戊径 6.8527227303
己方 91.1161674752	己径 4.11562525	己方 83.3170640896	己径 6.0011716142
庚方以上畧之	庚径以上畧之	庚方以上畧之	庚径以上畧之

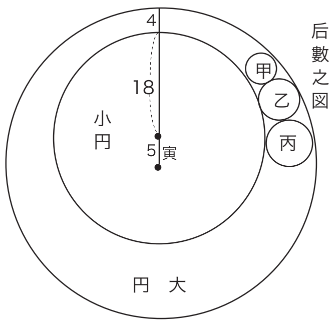




百八十二番解中に前術と云は此解義を云なり．

【注】





前數之図の場合

大 $=24$，小 $=16$，甲 $=3$，乙 $=5$ として① を解くと 子 $=3$ すなわち 丑 $=6$

依って，寅 $=\sqrt{\text{丑}^2+(\text{大}-\text{小})^2}=\sqrt{36+64}=10$

后數之図の場合

大 $=27$，小 $=18$，甲 $=4$，乙 $=5$ として① を解くと 子$^2=-14$ すなわち 丑$^2=-56$

依って，寅 $=\sqrt{\text{丑}^2+(\text{大}-\text{小})^2}=\sqrt{-56+81}=5$

① で 子 $=0$ としたとき，

$$\begin{aligned}&\text{乙}^2\text{大}^2\text{小}^2-2\,\text{乙}^2\text{大}^2\text{小甲}+2\,\text{乙}^2\text{大小}^2\text{甲}-2\,\text{乙大}^2\text{小}^2\text{甲}+\text{乙}^2\text{大}^2\text{甲}^2+2\,\text{乙}^2\text{大小甲}^2\\&-2\,\text{乙大}^2\text{小甲}^2+\text{乙}^2\text{小}^2\text{甲}^2+2\,\text{乙大小}^2\text{甲}^2+\text{大}^2\text{小}^2\text{甲}^2=0\end{aligned}$$

がデカルトの公式である． $\dfrac{1}{\text{甲}^2}+\dfrac{1}{\text{乙}^2}+\dfrac{1}{\text{大}^2}+\dfrac{1}{\text{小}^2}=2\left(\dfrac{1}{\text{甲}}+\dfrac{1}{\text{乙}}-\dfrac{1}{\text{大}}+\dfrac{1}{\text{小}}\right)^2$

① と，① を対換した式，とから子を消去すれば丙を求める式 (漸化式) が得られるが，和算では漸化式は書けないので，上記のような表現になる．

二距斜冪率を得る式
三角 $1-x=0$
四角 $2-x=0$
五角 $1-3x+x^2=0$
六角 $3-x=0$
七角 $1-6x+5x^2-x^3=0$
八角 $2-4x+x^2=0$
九角 $1-9x+6x^2-x^3=0$
十角 $5-5x+x^2=0$
十一角 $1-15x+35x^2-28x^3+9x^4-x^5=0$
十二角 $1-4x+x^2=0$
十三角 $1-21x+70x^2-84x^3+45x^4-11x^5+x^6=0$
十四角以上畧之

各々を $X=x-2$ で展開して
三角 $-1-X=0$
四角 $0-X=0$
五角 $-1+X+X^2=0$
六角 $1-X=0$
七角 $1+2X-X^2-X^3=0$
八角 $-2+X^2=0$
九角 $-1+3X-X^3=0$
十角 $-1-X+X^2=0$
十一角 $-1-3X+3X^2+4X^3-X^4-X^5=0$
十二角 $-3+X^2=0$
十三角 $-1+3X+6X^2-4X^3-5X^4+X^5+X^6=0$
此式百八十二番より百八十五番迄用る処あり．故に爰に出し置．是を求る法は百八十七番解中にあり．故に是を略す．

奇角二距斜率を得る式

n	x^0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
3	1	-1							
5	1	1	-1						
7	-1	2	1	-1					
9	-1	-2	3	1	-1	☆			
11	1	-3	-3	4	1	-1			
13	1	3	-6	-4	5	1	-1		
15	-1	4	6	-10	-5	6	1	-1	
17	-1	-4	10	10	-15	-6	7	1	-1

【百八十二術解】

前術により　$\boxed{\text{天=2(大-小)}}$

$$丙方 = 天 + 乙方 \cdot 率 - 甲方$$

$$丁方 = 天 + 丙方 \cdot 率 - 乙方$$

$$戊方 = 天 + 丁方 \cdot 率 - 丙方$$

$$\vdots$$

順次代入していき，甲方，乙方で表すと，

$丁方 = 乙方 \cdot 率^2 + (天 - 甲方)\,率 + 天 - 乙方$

$戊方 = 乙方 \cdot 率^3 + (天 - 甲方)\,率^2 + (天 - 2\,乙方)\,率 + 甲方$

$己方 = 乙方 \cdot 率^4 + (天 - 甲方)\,率^3 + (天 - 3\,乙方)\,率^2 - (天 - 2\,甲方)\,率 + 乙方$

$庚方 = 乙方 \cdot 率^5 + (天 - 甲方)\,率^4 + (天 - 4\,乙方)\,率^3 - (天 - 6\,乙方)\,率^2 + (2\,天 - 3\,甲方)\,率 + 天 - 乙方$

$辛方 = 乙方 \cdot 率^6 + (天 - 甲方)\,率^5 + (天 - 5\,乙方)\,率^4 - (3\,天 - 4\,甲方)\,率^3 - (2\,天 - 6\,乙方)\,率^2$

$+(2\,天 - 3\,甲方)\,率 + 天 - 乙方$

$壬方 = 乙方 \cdot 率^7 + (天 - 甲方)\,率^6 + (天 - 6\,乙方)\,率^5 - (4\,天 - 5\,甲方)\,率^4 - (3\,天 - 10\,乙方)\,率^3$

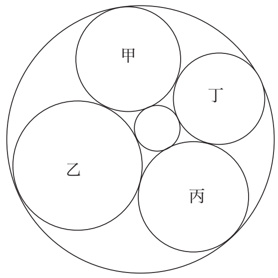
$+(4\,天 - 6\,甲方)\,率^2 + (2\,天 - 4\,乙方)\,率 + 甲方$

$癸方 = 乙方 \cdot 率^8 + (天 - 甲方)\,率^7 + (天 - 7\,乙方)\,率^6 - (5\,天 - 6\,甲方)\,率^5 - (4\,天 - 15\,乙方)\,率^4$

$+(7\,天 - 10\,甲方)\,率^3 + (4\,天 - 10\,乙方)\,率^2 - (2\,天 - 4\,甲方) + 乙方$

以下畧之

- 仮如ば甲乙丙丁の四円を容れるときの率を求める．



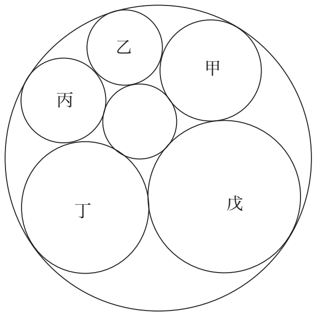
$乙方 \cdot 率^2 + (天 - 甲方)\,率 + 天 - 2\,乙方 = 0 \cdots$ (前式)

$乙方 \cdot 率^3 + (天 - 甲方)\,率^2 + (天 - 3\,乙方)\,率 - 天 + 2\,甲方 = 0 \cdots$ (后式)

前式，后式より天を消去すると

$$2 + 率 = 0$$

- 仮如ば甲乙丙丁戊の五円を容れるときの率を求める．



$$乙 - 甲 + (2\,甲 - 天)\,率 + (-3\,乙 + 天)\,率^2 + (-甲 + 天)\,率^3 + 乙率^4 = 0 \cdots 前式$$

$$-甲 + 天 - 乙 + (3\,乙 - 天)\,率 + (3\,甲 - 2\,天)\,率^2 + (-4\,乙 + 天)\,率^3 + (-甲 + 天)\,率^4 + 乙率^5 \cdots 后式$$

前式，后式より天を消去すると

$$-1+率+率^2=0$$

- 仮如ば甲乙丙丁戊己の六円を容れるときの率を求める．
$乙-甲+(2甲-天)率+(-3乙+天)率^2+(-甲+天)率^3+乙率^4=0\cdots$前式
$$-甲+天-乙+(3乙-天)率+(3甲-2天)率^2+(-4乙+天)率^3+(-甲+天)率^4+乙率^5=0\cdots後式$$
前式，后式より天を消去すると

$$-1+率=0$$

- 仮如ば甲乙丙丁戊己庚の七円を容れるときの率を求める．
$-甲-乙+天+(-3甲+2天)率+(6乙-2天)率^2+(4甲-3天)率^3+(-5乙+天)率^4$
$+(天-甲)率^5+乙率^6=0\cdots$前式
$-乙+甲+(-4乙+2天)率+(-6甲+4天)率^2+(10乙-3天)率^3+(5甲-4天)率^4$
$+(天-6乙)率^5+(天-甲)率^6+乙率^7=0\cdots$后式
前式，后式より天を消去すると

$$1+2率-率^2-率^3$$

- 仮如ば甲乙丙丁戊己庚辛の八円を容れるときの率を求める．
$2天-4乙+(4天-6甲)率+(-3天+10乙)率^2+(-4天+5甲)率^3+(天-6乙)率^4$
$+(天-甲)率^5+乙率^6=0\cdots$前式
$-2天+4甲+(4天-10乙)率+(7天-10甲)率^2+(-4天+15乙)率^3+(-5天+6甲)率^4$
$+(天-7乙)率^5+(天-甲)率^6+乙率^7=0\cdots$后式
前式，后式より天を消去すると

$$2-率^2=0$$

- 九円を容れるとき

$$1-3率+率^3=0$$

- 十円を容れるとき

$$-1-率+率^2=0$$

- 十一円を容れるとき

$$1+3率-3率^2-4率^3+率^4+率^5=0$$

- 十二円を容れるとき

$$3-率^2=0$$

- 十三円を容れるとき

$$1 - 3\,率 - 6\,率^2 + 4\,率^3 + 5\,率^4 - 率^5 - 率^6 = 0$$

これを見ると，率を得る各式は円数を角数と見たときの二距斜率冪から 2 を引いた数を得る式になっている．此理によって術を起こすと左のようになる．

$率 = 天 - 2$ $\boxed{天=二距斜率巾}$

前術では $率 = \dfrac{4\,大小}{坤} - 2,\quad 坤 = 乾甲乙$

だったので $天 = \dfrac{4\,大小}{坤}$

故に　$坤 = \dfrac{4\,大小}{天}$

前術の前式

$$(甲 + 乙)^2坤^2 + \{4\,甲乙大小 + 2(大 - 小)(甲 + 乙)\,甲乙\,\}\,坤 + (大 + 小)^2甲^2乙^2 = 0$$

に坤を代入して小の二次方程式とすると

$$\begin{aligned}&乙^2大^2甲^2 + 小\left\{2\,乙^2大甲^2 - \frac{8\,乙大^2甲\,(乙 + 甲)}{天}\right\}\\&\qquad + 小^2\left\{-\frac{16\,乙大^2甲}{天} + 乙^2甲^2 + \frac{8\,乙大甲\,(乙 + 甲)}{天} + \frac{16\,大^2(乙 + 甲)^2}{天^2}\right\} = 0\end{aligned}$$

これを解くと

$$小 = \frac{大}{\dfrac{4(子 + 丑)}{天} - 4\dfrac{寅}{\sqrt{天}} - 1}\qquad \boxed{子 = \frac{大}{甲}}\quad \boxed{丑 = \frac{大}{乙}}\quad \boxed{寅^2 = 子丑 - (子 + 丑)}$$

分母を小方と名づけて

$$小径 = \frac{大}{小方}$$

$\boxed{人 = 2(子 + 丑) - 2\,寅\sqrt{天} - 天}$

$$2(大 - 小) = \frac{4\,大 \cdot 人}{天 \cdot 小方}$$

$$前術坤 = \frac{4\,大小}{天} = \frac{4\,大}{天} \cdot \frac{大}{小方} = \frac{4\,大^2}{天 \cdot 小方}(= 前術の通実)$$

$$前術甲方 = \frac{4\,大子}{天 \cdot 小方}$$

$$前術乙方 = \frac{4\,大丑}{天 \cdot 小方}$$

前術で丙を求める式は

$$\{2(大 - 小) + 率 \cdot 乙方 - 甲方\,\}\,丙 - 通実 = 0$$

$$-\frac{4\,大^2}{天\cdot小方}-\frac{4\,大子丙}{天\cdot小方}+\frac{4\,率大丑丙}{天\cdot小方}+\frac{4\,人大}{天\cdot小方}=0$$

これを解いて

$$丙=\frac{大}{率丑+人-子}$$

分母を丙方と名づける．

$$丙方=率\cdot乙方+人-甲方,\quad 丙=\frac{大}{丙方}$$

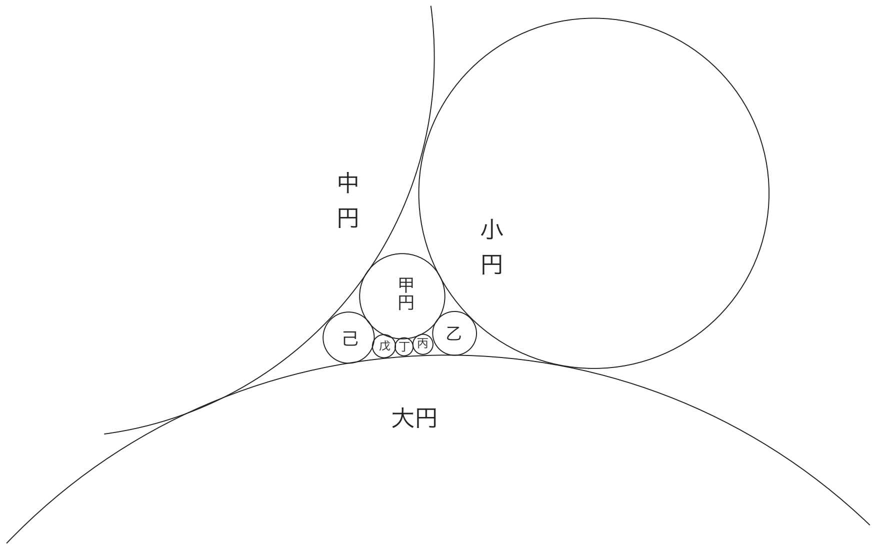
推此理

$$丁方=率\cdot丙方+人-乙方,\quad 丁=\frac{大}{丁方}$$

$$戊方=率\cdot丁方+人-丙方,\quad 戊=\frac{大}{戊方}$$

$$\vdots$$

$\boxed{183}$ 今大円，中円，小円があり，その罅(すきま)に図のように軒円を入れる．(図は仮に軒円数 6 個とする)　大円径，中円径，小円径と軒円個数が与えられたとき，各円径を得る術を問う．



【術解】此術亦容易難得本術故設類題逐而解術路

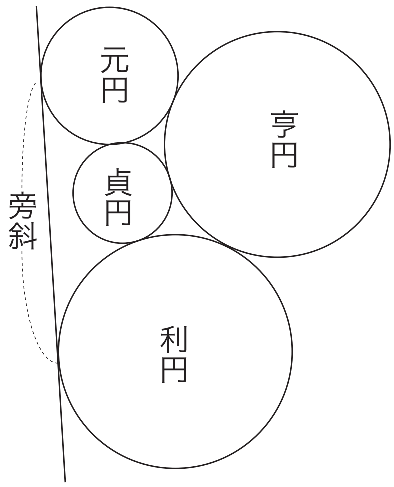
〈四円傍斜術〉

$$旁斜=\frac{\sqrt{亨貞}\left(\sqrt{(元+亨+貞)\,利}+\sqrt{(利+亨+貞)\,元}\right)}{亨+貞}$$

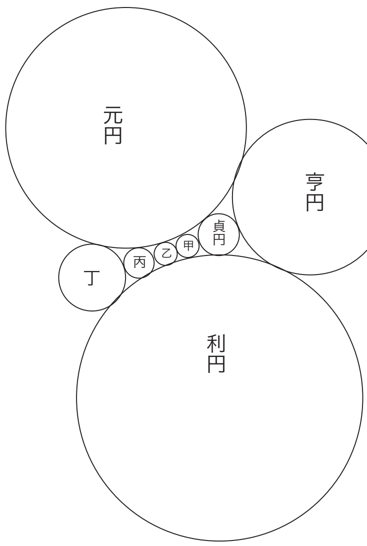
$$(亨+貞)^2斜^4-2\,亨貞\{(元+利)(亨+貞)+2\,元利\}斜^2+亨^2貞^2(元-利)^2=0$$

$$(亨+貞)\,斜^2-2\sqrt{(元+亨+貞)\,亨利貞}\;斜-(元-利)\,亨貞=0\quad\cdots イ$$

$$(亨+貞)\,斜^2+2\sqrt{(元+亨+貞)\,亨利貞}\;斜-(元-利)\,亨貞=0\ \cdots ⓡ$$



元円，亨円，利円，貞円が与えられたとき，累円径を問う．



四円傍斜術より

$$(亨+貞)^2斜^4-2\,亨貞\,\{(元+利)(亨+貞)+2\,元利\,\}\,斜^2+亨^2貞^2(元-利)^2=0\cdots(天式)$$

亨→貞，貞→甲と対換して

$$(貞+甲)^2斜^4-2\,貞甲\,\{(元+利)(貞+甲)+2\,元利\,\}\,斜^2+貞^2甲^2(元-利)^2=0\cdots(地式)$$

(天式) $\times$ 甲^2 $-$ (地式) $\times$ 亨^2 より　甲径を得る式

$$斜^2+\{\,亨方-貞方\cdot率-2(元+利)\}\,甲=0 \qquad \boxed{亨方=\frac{斜^2}{亨}} \qquad \boxed{貞方=\frac{斜^2}{貞}} \qquad \boxed{率=\frac{4\,元利}{斜^2}-2}$$

が得られる． $\boxed{甲方 = -亨方 + 貞方 \cdot 率 + 2(元 + 利)}$

甲→乙，貞→甲，亨→貞と対換して，乙を得る式

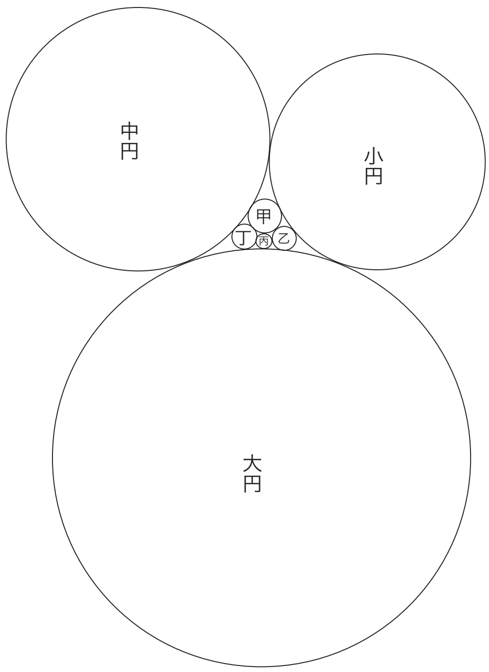
$$斜^2 + \{\,貞方 - 甲方 \cdot 率 - 2(元 + 利)\}\,乙 = 0 \qquad \boxed{乙方 = -貞方 + 甲方 \cdot 率 + 2(元 + 利)}$$

が得られる．乙→丙，甲→乙，貞→甲と対換して，丙を得る式

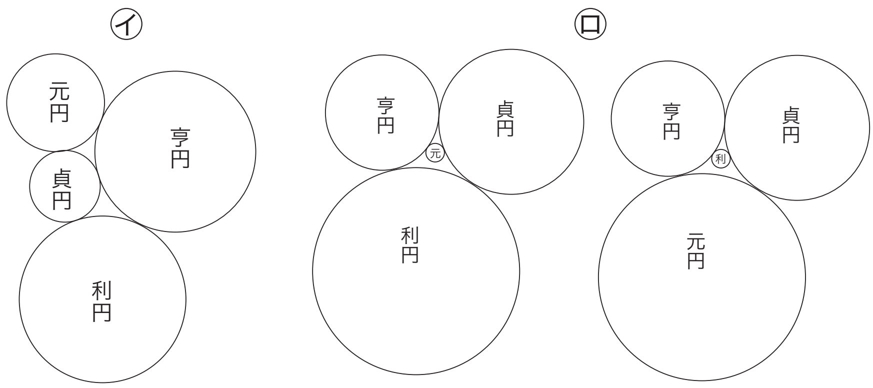
$$斜^2 + \{\,甲方 - 乙方 \cdot 率 - 2(元 + 利)\}\,丙 = 0 \qquad \boxed{丙方 = -甲方 + 乙方 \cdot 率 + 2(元 + 利)}$$

が得られる．遂如此求之

大径，中径，小径が与えられたとき丁円径を問う．



下図で ㋑ と ㋺ の接触関係は同じである．



よって，前術で甲は元，中は亨，小は貞，大は利となる．

率を求める解　　$\boxed{天 = 2(大 + 甲)}$

$乙方 = 天 - 中方 + 小方 \cdot 率$

$丙方 = 天 - 小方 + 乙方 \cdot 率 = 天 - 小方 + (天 - 中方)\, 率 + 小方 \cdot 率^2$

逐如此求之

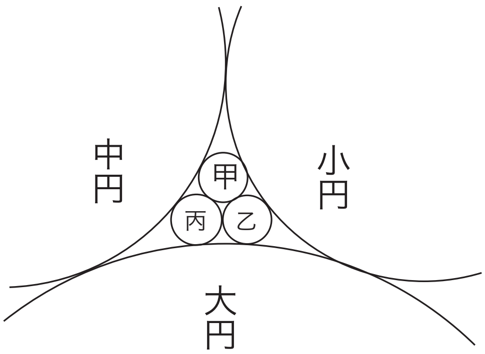
$丁方 = 中方 + (天 - 2\, 小方)\, 率 + (天 - 中方)\, 率^2 + 小方 \cdot 率^3$

$戊方 = 小方 + (-天 + 2\, 中方)\, 率 + (天 - 3\, 小方)\, 率^2 + (天 - 中方)\, 率^3 + 小方 \cdot 率^4$

$己方 = 天 - 中方 + (-天 + 3\, 小方)\, 率 + (-2\, 天 + 3\, 中方)\, 率^2 + (2\, 天 - 4\, 小方)\, 率^3 + (天 - 中方)\, 率^4 + 小方 \cdot 率^5$

$庚方 = 天 - 小方 + (2\, 天 - 3\, 中方)\, 率 + (-2\, 天 + 6\, 小方)\, 率^2 + (-3\, 天 + 4\, 中方)\, 率^3 + (天 - 5\, 小方)\, 率^4$
$\quad + (天 - 中方)\, 率^5 + 小方 \cdot 率^6$

以下畧之



甲乙丙の 3 円を入れると，丁円は中円となるので，

$$(天 - 2\, 小方) + (天 - 中方)\, 率 + 小方 \cdot 率^2 = 0 \qquad \cdots (前式)$$

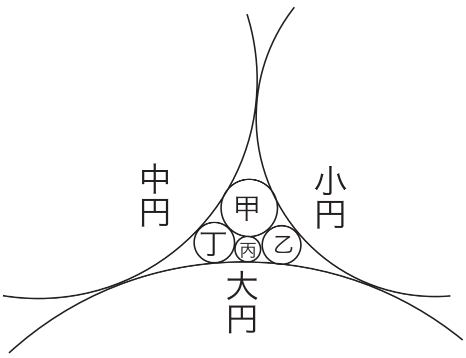
戊円は小円となるので，

$$-天 + 2\, 中方 + (天 - 3\, 小方)\, 率 + (天 - 中方)\, 率^2 + 小方 \cdot 率^3 = 0 \qquad \cdots (后式)$$

前式，后式より天を消去すると，率を得る式

$$2 + 率 = 0$$

が得られる．



甲乙丙丁の 4 円を入れると

$-$中方 $+$ 小方 $+$ $(-$天 $+ 2$ 中方$)$ 率 $+$ (天 $- 3$ 小方) 率^2 $+$ (天 $-$ 中方) 率^3 $+$ 小方 $\cdot$ 率$^4 = 0$ $\quad\cdots$(前式)

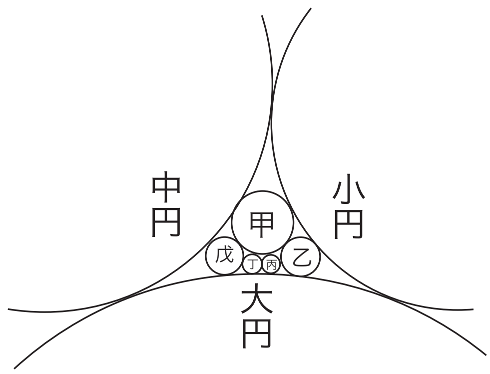
$-$小方 $+$ 天 $-$ 中方 $+$ $(-$天 $+ 3$ 小方$)$ 率 $+$ $(-2$ 天 $+ 3$ 中方$)$ 率^2 $+$ (天 $- 4$ 小方) 率^3 $+$ (天 $-$ 中方) 率^4

$+$ 小方 $\cdot$ 率$^5 = 0$ $\quad\cdots$(后式)

前式，后式より天を消去すると，率を得る式

$$-1 + 率 + 率^2 = 0$$

が得られる．



甲乙丙丁戊の 5 円を入れると

天 $- 2$ 中方 $+$ $(-$天 $+ 3$ 小方$)$ 率 $+$ $(-2$ 天 $+ 3$ 中方$)$ 率^2 $+$ (天 $- 4$ 小方) 率^3 $+$ (天 $-$ 中方) 率^4

$+$ 小方 $\cdot$ 率$^5 = 0$ $\quad\cdots$(前式)

天 $- 2$ 小方 $+$ (2 天 $- 3$ 中方) 率 $+$ $(-2$ 天 $+ 6$ 小方$)$ 率^2 $+$ $(-3$ 天 $+ 4$ 中方$)$ 率^3 $+$ (天 $- 5$ 小方) 率^4

$+$(天 $-$ 中方) 率^5 $+$ 小方 $\cdot$ 率$^6 = 0$ $\quad\cdots$(后式)

前式，后式より天を消去すると，率を得る式

$$-1 + 率 = 0$$

が得られる．

甲乙丙丁戊己の 6 円を入れると，率を得る式は

$$-1 - 2\,率 + 率^2 + 率^3 = 0$$

7 円を入れると，率を得る式は

$$-2 + 率^2 = 0$$

8 円を入れると，率を得る式は

$$1 - 3\,率 + 率^3 = 0$$

9 円を入れると，率を得る式は

$$-1 - 率 + 率^2 = 0$$

10 円を入れると，率を得る式は

$$1+3\,率+3\,率^2+3\,率^3+率^4+率^5=0$$

11 円を入れると，率を得る式は

$$3-率^2=0$$

率を得る式を視るに (入れる円数 +1) を角数とする二距斜冪率を得る式を $X-2$ で展開した式になっている.

n	二距斜冪率	$X=x-2$ で展開	率を得る式
4	$2-x=0$	$X=0$	$2+率=0$
5	$1-3x+x^2=0$	$-1+X+X^2=0$	$-1+率+率^2=0$
6	$3-x=0$	$1-X=0$	$-1+率=0$
7	$1-6x+5x^2-x^3=0$	$1+2X-X^2-X^3=0$	$-1-2\,率+率^2+率^3=0$
8	$2-4x+x^2=0$	$-2+X^2=0$	$-2+率^2=0$
9	$1-9x+6x^2-x^3=0$	$-1+3X-X^3=0$	$1-3\,率+率^3=0$
10	$5-5x+x^2=0$	$-1-X+X^2=0$	$-1-率+率^2=0$
11	$1-15x+35x^2-28x^3+9x^4-x^5=0$	$-1-3X+3X^2+4X^3-X^4-X^5=0$	$1+3\,率+3\,率^2+3\,率^3+率^4+率^5=0$
12	$1-4x+x^2=0$	$-3+X^2=0$	$3-率^2=0$

- 甲乙丙丁戊の 5 円を入れる場合

  回で元→大，亨→中，貞→小，利→甲 と対換して

  $$(中+小)\,斜^2+2\sqrt{(大+中+小)\,中甲小}\,斜-(大-甲)\,中小=0$$

  $斜^2=\dfrac{4\,甲大}{東}$ を代入して　　$\boxed{東=二距斜冪率}$

  $$\frac{4(中+小)\,大甲}{東}+\frac{4\sqrt{大+中+小}大中小}{}甲-(大-甲)\,中小=0$$

  甲を得る式

  $$-大+\left(1+\frac{4\,乾}{東}\right)甲=0 \qquad \boxed{乾=\frac{大}{小}+\frac{大}{中}+\frac{\sqrt{(大+中+小)\,大東}}{\sqrt{中小}}} \qquad \boxed{甲方=1+\frac{4\,乾}{東}}$$

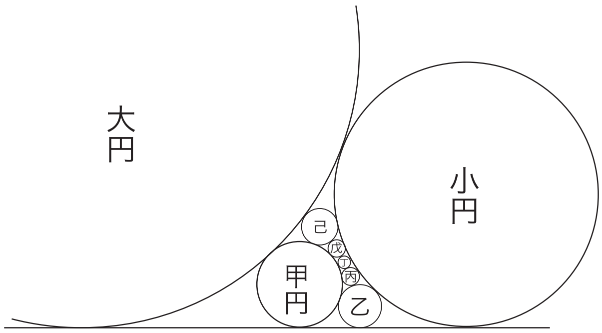
  となる.

- 推数示之

  軒円数 5(甲乙丙丁戊) 1 を加えて 6 角の二距斜冪率 3 を用いる.

東 $=3$　率 $=1$　大径 $=7$　中径 $=5$　小径 $=4$	
乾 $=7.2487803$	西 $=17.4975606(?)$
中方 $=1.4$	
小方 $=1.75$	
甲方 $=10.6650404$	甲径 $=0.65635$
乙方 $=17.8475606$	乙径 $=0.39221$
丙方 $=33.5951212$	丙径 $=0.20836$
丁方 $=33.2451212$	丁径 $=0.21055$
戊方 $=17.1475606$	戊径 $=0.40822$
己方 $=1.4$	己径 $=5$

$\boxed{184}$ 今線上に大小円が接し，その罅(すきま)に軒円を容れる．仮に軒円六個を画く．大円径，小円径と軒円の個数が与えられたとき，軒円の個数に随って，各円径を得る術を問う．



軒円の個数 $= n$ とする．

東 $=$ 正 $n+1$ 角形の二距斜冪率

率 $=$ 東 $- 2$

冬 $= \dfrac{\text{大}}{\text{小}}$

江 $= \left(\sqrt{\text{冬} \times \text{東}} + 1\right)^2 + 1$

甲方 $= \dfrac{2\,\text{江}}{\text{東}} -$ 冬

乙方 $=$ 江 $- 1$

丙方 $=$ 乙方 $\times$ 率 $+$ 江

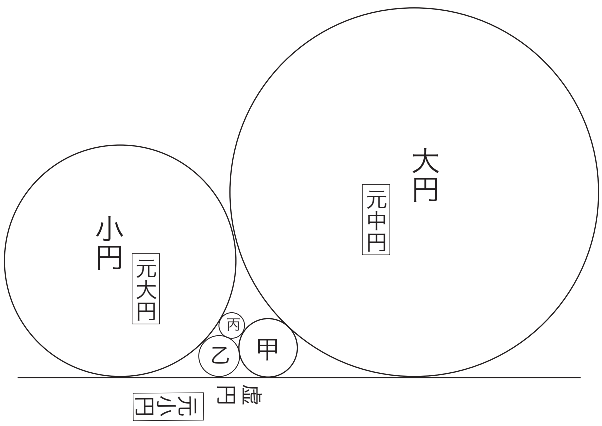
丁方 $=$ 丙方 $\times$ 率 $+$ 江 $-$ 乙方

戊方 $=$ 丁方 $\times$ 率 $+$ 江 $-$ 丙方

$\vdots$

其径 $= \dfrac{\text{大径}}{\text{其方}}$

【術解】此題図に似て縦令 (たとえ) 適等を求るは本法なりと雖，稽古の為に前題百八十三番の解義を用ひて此題の解義をなして術路一筋ならぬ事を示す．



照図諸数遍換円名

$$大方 = \frac{小}{大}$$

$$虚方 = \frac{小}{虚}$$

$$西 = 2\left(\sqrt{\frac{(大+小+虚)\,小\cdot東}{大\cdot虚}} + \frac{小}{虚} + \frac{小}{大}\right) + 東$$

$$甲方 = \frac{2\,西}{東} - 1$$

$$乙方 = 虚方 \times 率 + 西 - 大方$$

$$丙方 = 乙方 \times 率 + 西 - 虚方$$

$$丁方 = 丙方 \times 率 + 西 - 乙方$$

$$戊方 = 丁方 \times 率 + 西 - 丙方$$

$$甲 = \frac{小}{甲方} = \frac{小}{\dfrac{2\,西}{東} - 1} = \frac{大}{\dfrac{2\,西大}{東小} - \dfrac{大}{小}}$$

$$\therefore\quad \overline{甲方} := \frac{2\,西大}{東小} - \frac{大}{小}$$

$$乙 = \frac{小}{乙方} = \frac{小}{虚方 \times 率 + 西 - 大方} = \frac{大}{\dfrac{大}{虚}率 + \dfrac{大}{小}西 - 1}$$

$$\therefore\quad \overline{乙方} := \frac{大}{小}乙方 = \overline{虚方} \times 率 + \frac{大}{小}西 - 1 \qquad \boxed{\overline{虚方} := \frac{大}{小}虚方 = \frac{大}{虚}}$$

$$丙 = \frac{小}{丙方} = \frac{小}{乙方 \times 率 + 西 - 虚方} = \frac{大}{\dfrac{大}{小}乙方 \cdot 率 + \dfrac{大}{小}西 - \dfrac{大}{小}虚方}$$

$$\therefore\quad \overline{丙方} := \frac{大}{小}丙方 = \overline{乙方} \times 率 + \frac{大}{小}西 - \overline{虚方}$$

$$丁 = \frac{小}{丁方} = \frac{小}{丙方 \times 率 + 西 - 乙方} = \frac{大}{\dfrac{大}{小}丙方 + \dfrac{大}{小}西 - \dfrac{大}{小}乙方}$$

$$\therefore\quad \overline{丁方} := \overline{丙方} \times 率 + \frac{大}{小}西 - \overline{乙方}$$

同様にして

$$\overline{戊方} := \overline{丁方} \times 率 + \frac{大}{小}西 - \overline{丙方}$$

虚者虚数也．故に左右之傍書内有虚者弃之得定数

$$江 := \lim_{虚\to\infty} \frac{大}{小}西 = \lim_{虚\to\infty} \frac{2\,大}{小}\left(\sqrt{\frac{(大+小+虚)\,小\cdot東}{大\cdot虚}} + \frac{小}{虚} + \frac{小}{大}\right) + \frac{大}{小}東 = 2\sqrt{\frac{大}{小}東} + 2 + \frac{大}{小}東$$

$$\lim_{\text{虚}\to\infty}\overline{\text{甲方}} = \lim_{\text{虚}\to\infty}\left(\frac{2\,\text{西大}}{\text{東小}} - \frac{\text{大}}{\text{小}}\right) = \frac{2\,\text{江}}{\text{東}} - \frac{\text{大}}{\text{小}} := \overline{\overline{\text{甲方}}}$$

$$\lim_{\text{虚}\to\infty}\overline{\text{乙方}} = \lim_{\text{虚}\to\infty}\left(\overline{\text{虚方}}\times\text{率} + \frac{\text{大}}{\text{小}}\text{西} - 1\right) = \text{江} - 1 := \overline{\overline{\text{乙方}}}$$

$$\lim_{\text{虚}\to\infty}\overline{\text{丙方}} = \lim_{\text{虚}\to\infty}\left(\overline{\text{乙方}}\times\text{率} + \frac{\text{大}}{\text{小}}\text{西} - \overline{\text{虚方}}\right) = \overline{\overline{\text{乙方}}}\times\text{率} + \text{江} := \overline{\overline{\text{丙方}}}$$

$$\lim_{\text{虚}\to\infty}\overline{\text{丁方}} = \lim_{\text{虚}\to\infty}\left(\overline{\text{丙方}}\times\text{率} + \frac{\text{大}}{\text{小}}\text{西} - \overline{\text{乙方}}\right) = \overline{\overline{\text{丙方}}}\times\text{率} + \text{江} - \overline{\overline{\text{乙方}}} := \overline{\overline{\text{丁方}}}$$

$$\lim_{\text{虚}\to\infty}\overline{\text{戊方}} = \lim_{\text{虚}\to\infty}\left(\overline{\text{戊方}}\times\text{率} + \frac{\text{大}}{\text{小}}\text{西} - \overline{\text{丙方}}\right) = \overline{\overline{\text{丁方}}}\times\text{率} + \text{江} - \overline{\overline{\text{丙方}}} := \overline{\overline{\text{戊方}}}$$

逐如此求之

$$\therefore\quad \text{某径} = \frac{\text{大}}{\overline{\overline{\text{某方}}}}$$

(術文の某方は $\overline{\overline{\text{某方}}}$ のこと)

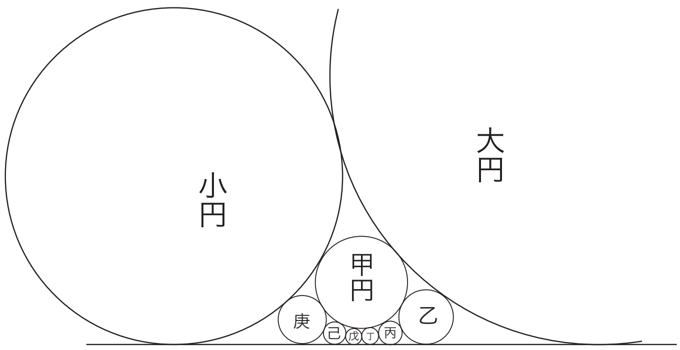
推数示之

容円数五 (甲乙丙丁戊) 故に六角二距斜冪率三ヶを用いる

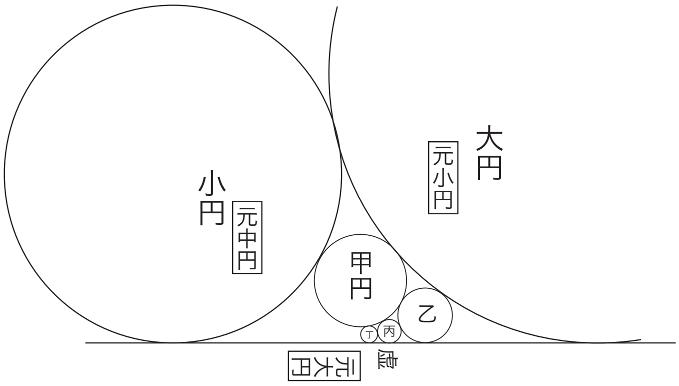
大径 3	小径 1　東 3　率 1　冬 3　江 17
$\overline{\overline{\text{甲方}}}$ 8.33333	
$\overline{\overline{\text{乙方}}}$ 16	
$\overline{\overline{\text{丙方}}}$ 33	
$\overline{\overline{\text{丁方}}}$ 34	
$\overline{\overline{\text{戊方}}}$ 18	
$\overline{\overline{\text{己方}}}$ 1	

己径与大径得同数故此術知胳合

$\boxed{185}$ 大円径，小円径，軒円個数が与えられたとき，軒円個数に随いて各円径を得る術問.



前問と同じ



軒円の個数 $= n$ とする.

東 = 正 $n+1$ 角形の二距斜冪率

$$率 = 東 - 2$$

$$冬 = \frac{大}{小}$$

$$人 = 2\sqrt{冬 \times 東} + 冬 + 1$$

$$甲方 = \frac{2\,人}{東}$$

$$乙方 = 率 + 人 - 冬$$

$$丙方 = 乙方 \times 率 + 人 - 1$$

$$丁方 = 丙方 \times 率 + 人 - 乙方$$

$$戊方 = 丁方 \times 率 + 人 - 丙方$$

$$\vdots$$

$$其径 = \frac{大径}{其方}$$

今図与元図照合而各換傍書 $小方 = \dfrac{虚}{小}$

$$大方 = \frac{虚}{大}$$

$$西 = 2\left(\sqrt{\frac{(大 + 小 + 虚)\,虚 \cdot 東}{大 \cdot 小}} + \frac{虚}{小} + \frac{虚}{大}\right) + 東$$

$$甲方 = \frac{2\,西}{東} - 1$$

$$乙方 = 大方 \times 率 + 西 - 小方$$

$$丙方 = 乙方 \times 率 + 西 - 大方$$

$$丁方 = 丙方 \times 率 + 西 - 乙方$$

$$戊方 = 丁方 \times 率 + 西 - 丙方$$

$$甲=\frac{虚}{甲方}=\frac{虚}{\frac{2\,西}{東}-1}=\frac{大}{\frac{2\,西大}{東虚}-\frac{大}{虚}}$$

$$\therefore\quad \overline{甲方}:=\frac{2\,西\cdot大}{東\cdot虚}-\frac{大}{虚}$$

$$乙=\frac{虚}{乙方}=\frac{虚}{大方\times率+西-小方}=\frac{大}{率+\frac{大}{虚}西-冬}$$

$$\therefore\quad \overline{乙方}:=\frac{大}{虚}乙方=率+\frac{大}{虚}西-冬$$

$$丙=\frac{虚}{丙方}=\frac{虚}{乙方\times率+西-大方}=\frac{大}{\frac{大}{虚}乙方\cdot率+\frac{大}{虚}西-1}$$

$$\therefore\quad \overline{丙方}:=\frac{大}{虚}丙方=\overline{乙方}\cdot率+\frac{大}{虚}西-1$$

$$丁=\frac{虚}{丁方}=\frac{虚}{丙方\times率+西-乙方}=\frac{大}{\frac{大}{虚}丙方+\frac{大}{虚}西-\frac{大}{虚}乙方}$$

$$\therefore\quad \overline{丁方}:=\overline{丙方}\times率+\frac{大}{虚}西-\overline{乙方}$$

同様にして

$$\overline{戊方}:=\overline{丁方}\times率+\frac{大}{虚}西-\overline{丙方}$$

虚者虚数也．故に左右之傍書内有虚者弃之為定数

$$人:=\lim_{虚\to\infty}\frac{大}{虚}西=2\left(\sqrt{冬東}+冬+1\right)$$

$$\lim_{虚\to\infty}\overline{甲方}=\lim_{虚\to\infty}\left(\frac{2\,西\cdot大}{東\cdot虚}-\frac{大}{虚}\right)=\frac{2\,人}{東}:=\overline{\overline{甲方}}$$

$$\lim_{虚\to\infty}\overline{乙方}=\lim_{虚\to\infty}\left(率+\frac{大}{虚}西-冬\right)=率+人-冬:=\overline{\overline{乙方}}$$

$$\lim_{虚\to\infty}\overline{丙方}=\lim_{虚\to\infty}\left(\overline{乙方}\cdot率+\frac{大}{虚}西-1\right)=\overline{\overline{乙方}}\times率+人-1:=\overline{\overline{丙方}}$$

$$\lim_{虚\to\infty}\overline{丁方}=\lim_{虚\to\infty}\left(\overline{丙方}\times率+\frac{大}{虚}西-\overline{乙方}\right)=\overline{\overline{丙方}}\times率+人-\overline{\overline{乙方}}:=\overline{\overline{丁方}}$$

$$\lim_{虚\to\infty}\overline{戊方}=\lim_{虚\to\infty}\left(\overline{丁方}\times率+\frac{大}{虚}西-\overline{丙方}\right)=\overline{\overline{丁方}}\times率+人-\overline{\overline{丙方}}:=\overline{\overline{戊方}}$$

逐如此求之

$$\therefore \quad \text{某径} = \frac{\text{大}}{\overline{\overline{\text{某方}}}}$$

(術文の某方は $\overline{\overline{\text{某方}}}$ のこと)

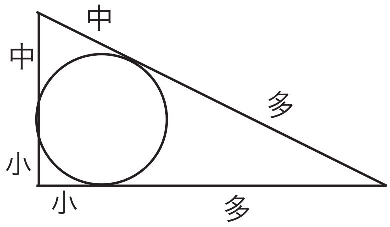
推数示之

容円数五 (甲乙丙丁戊) 故に六角二距斜冪率三ヶを用いる

大径 36	小径 9　東 3　率 1　冬 4
人 16.92820323	
$\overline{\overline{\text{甲方}}}$ 11.28546882	
$\overline{\overline{\text{乙方}}}$ 13.92820323	
$\overline{\overline{\text{丙方}}}$ 29.85640646	
$\overline{\overline{\text{丁方}}}$ 32.85640646	
$\overline{\overline{\text{戊方}}}$ 19.92820323	
$\overline{\overline{\text{己方}}}$ 4	

己径与小径得同数故此術知脗合

$\boxed{186}$ 今欲求鉤股弦之整数件々問如其術何．請弃同矩不用乗除而求之．



ピタゴラス数を求める問題．

勾 $=$ 中 $+$ 小，股 $=$ 多 $+$ 小，弦 $=$ 多 $+$ 中 とし

$(\text{中} + \text{小})^2 + (\text{多} + \text{小})^2 = (\text{多} + \text{中})^2$ より

$$\text{中} = \frac{\text{小}\,(\text{多} + \text{小})}{\text{多} - \text{小}}$$

これを代入して，

$$\text{勾} = \frac{2\,\text{多小}}{\text{多} - \text{小}},\ \text{股} = \text{小} + \text{多},\ \text{弦} = \frac{\text{多}^2 + \text{小}^2}{\text{多} - \text{小}}$$

分母を乗じ，

勾 $= 2$ 多少，股 $= \text{多}^2 - \text{小}^2$，弦 $= \text{多}^2 + \text{小}^2$

一級

小	多	勾級	股級	弦級
1	2	4	3	5
1	4	8	15	17
1	6	12	35	37
1	8	16	63	65
1	10	20	99	101
⋮		⋮	⋮	⋮
1	46	92	2115	2117

二級

小	多	勾級	股級	弦級
2	3	12	5	13
2	5	20	21	29
2	7	28	45	53
2	9	36	77	85
2	11	44	117	125
⋮		⋮	⋮	⋮
2	47	188	2205	2213

三級

小	多	勾級	股級	弦級
3	4	24	7	25
3	6	36	27	45
3	8	48	55	73
3	10	60	91	109
3	12	72	135	153
⋮		⋮	⋮	⋮
3	48	288	2295	2313

四級

小	多	勾級	股級	弦級
4	5	40	9	41
4	7	56	33	65
4	9	72	65	97
4	11	88	105	137
4	13	104	153	185
⋮		⋮	⋮	⋮
4	49	392	2385	2417

五級

小	多	勾級	股級	弦級
5	6	60	11	61
5	8	80	39	89
5	10	100	75	125
5	12	120	119	169
5	14	140	171	221
⋮		⋮	⋮	⋮
5	50	500	2475	2525

六級

小	多	勾級	股級	弦級
6	7	84	13	85
6	9	108	45	117
6	11	132	85	157
6	13	156	133	205
6	15	180	189	261
⋮		⋮	⋮	⋮
6	51	612	2565	2637

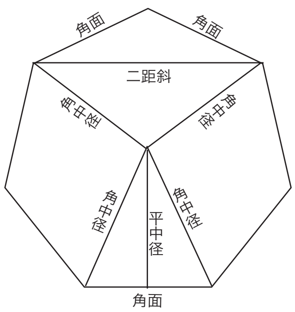
（網掛け）は多少に等数あるもの．

右者江戸四谷住門人菊間庄蔵直之考之．

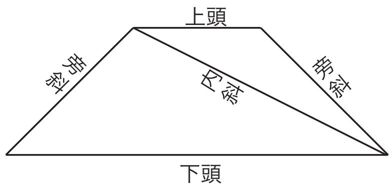
k 級

小 多	勾	股	弦
	$2k^2+2k$	$2k+1$	勾 $+1$
	$2k^2+6k$	$6k+9$	勾 $+9$
	$2k^2+10k$	$10k+25$	勾 $+25$
	$2k^2+14k$	$14k+49$	勾 $+49$
	⋮		

187 正多角形の角数と一辺の長さが与えられたとき，平中径，角中径，二距斜を得る術を問．



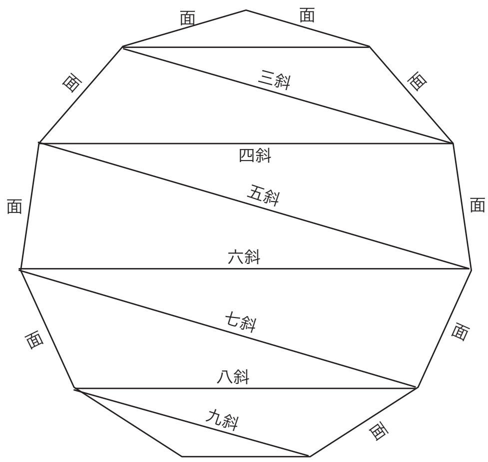
角数 $\equiv 0 \pmod 4$ を重偶角
角数 $\equiv 2 \pmod 4$ を単偶角
角数 $\equiv 1$ *or* $3 \pmod 4$ を奇角
という.



上図で

$$下頭 = \frac{内斜^2 - 旁斜^2}{上頭}$$

この適等を使うと



$$三斜 = \frac{二斜^2 - 面^2}{面}$$

$$四斜 = \frac{三斜^2 - 面^2}{二斜}$$

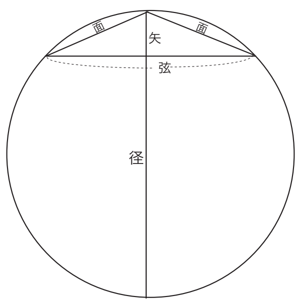
$$五斜 = \frac{四斜^2 - 面^2}{三斜}$$

$$六斜 = \frac{五斜^2 - 面^2}{四斜}$$

$$七斜 = \frac{六斜^2 - 面^2}{五斜}$$

$$八斜 = \frac{七斜^2 - 面^2}{六斜}$$

径矢弦の術より



$$弦^2 = 4\,矢 \cdot 径 - 矢^2$$

これに
径 $= 2 \times$ 角中径
弦 $=$ 二斜

$$矢 = \frac{面^2}{2\,角}$$

を代入すると

$$二斜^2 = 4\,面^2 - \frac{面^4}{角^2} \qquad \boxed{角=角中径}$$

◯求角中径術解

$$\frac{二斜^2角^2}{面^2} = 4\,角^2 - 面^2 := 二率巾$$

$$\frac{\text{三斜}\cdot\text{角}^2}{\text{面}} = 3\,\text{角}^2 - \text{面}^2 := \text{三率}$$

$$\frac{\text{四斜}^2\text{角}^6}{\text{面}^2} = 16\,\text{角}^6 - 20\,\text{面}^2\text{角}^4 + 8\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6 := \text{四率巾}$$

$$\frac{\text{五斜}\cdot\text{角}^4}{\text{面}} = 5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4 := \text{五率}$$

$$\frac{\text{六斜}^2\text{角}^{10}}{\text{面}^2} = 36\,\text{角}^{10} - 105\,\text{面}^2\text{角}^8 + 112\,\text{面}^4\text{角}^6 - 56\,\text{面}^6\text{角}^4 + 12\,\text{面}^8\text{角}^2 - \text{面}^{10} := \text{六率巾}$$

$$\frac{\text{七斜}\cdot\text{角}^6}{\text{面}} = 7\,\text{角}^6 - 14\,\text{面}^2\text{角}^4 + 7\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6 := \text{七率}$$

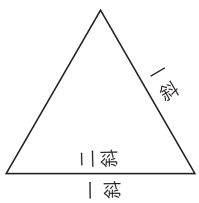
$$\frac{\text{八斜}^2\text{角}^{13}}{\text{面}^2} = 64\,\text{角}^{14} - 336\,\text{面}^2\text{角}^{11} + 682\,\text{面}^4\text{角}^9 - 660\,\text{面}^6\text{角}^7 + 352\,\text{面}^8\text{角}^6 - 104\,\text{面}^{10}\text{角}^4 + 16\,\text{面}^{12}\text{角}^2 - \text{面}^{14} := \text{八率巾}$$

$$\frac{\text{九斜}\cdot\text{角}^8}{\text{面}} = 9\,\text{角}^8 - 30\,\text{面}^2\text{角}^6 + 27\,\text{面}^4\text{角}^4 - 9\,\text{面}^6\text{角}^2 - \text{面}^8 := \text{九率}$$

十率以上倣之

◯寄消解

三角者

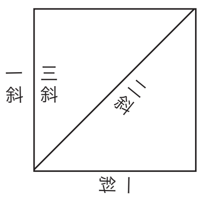


二率巾 $= \dfrac{\text{二斜}^2\text{角}^2}{\text{面}^2} = 4\,\text{角}^2 - \text{面}^2$ において，二斜 $=$ 一斜 なので $\dfrac{\text{二斜}^2\text{角}^2}{\text{面}^2} = \text{角}^2$，

即ち

$3\,\text{角}^2 - \text{面}^2 = 0$(定式)

四角者

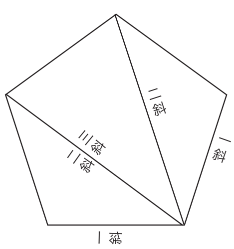


三率 $= \dfrac{\text{三斜}\cdot\text{角}^2}{\text{面}} = 3\,\text{角}^2 - \text{面}^2$ において，三斜 $=$ 一斜 なので $\dfrac{\text{三斜}\cdot\text{角}^2}{\text{面}} = \text{角}^2$，

故に，

$2\,\text{角}^2 - \text{面}^2 = 0$(定式)

五角者



四率巾 $= \dfrac{\text{四斜}^2\text{角}^6}{\text{面}^2} = 16\,\text{角}^6 - 20\,\text{面}^2\text{角}^4 + 8\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6$ において，

四斜 $=$ 一斜 なので $\dfrac{\text{四斜}^2\cdot\text{角}^6}{\text{面}^2} = \text{角}^6$，

故に，$15\,\text{角}^6 - 20\,\text{面}^2\text{角}^4 + 8\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6 = 0$

$(5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4)(3\,\text{角}^2 - \text{面}^2) = 0$

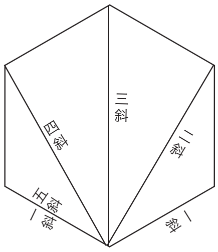
遍く過乗を省き $5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4 = 0$

点竄指南録の術は以下の通り.

$\text{二率巾} = \dfrac{\text{二斜}^2\text{角}^2}{\text{面}^2} = 4\,\text{角}^2 - \text{面}^2$ と $\text{三率} = \dfrac{\text{三斜}\cdot\text{角}^2}{\text{面}} = 3\,\text{角}^2 - \text{面}^2$ において $\text{二斜} = \text{三斜}$ なので

$(3\,\text{角}^2 - \text{面}^2)^2 = (4\,\text{角}^2 - \text{面}^2)\,\text{角}^2$, 故に $5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4 = 0$(定式), これだと因数分解しなくてすむ.

六角者

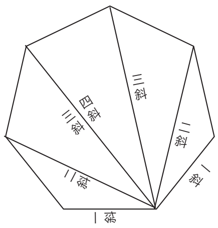


$\text{五率} = \dfrac{\text{五斜}\cdot\text{角}^4}{\text{面}} = 5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4$ において $\text{五斜} = \text{一斜}$ だから

$\dfrac{\text{五斜}\cdot\text{角}^4}{\text{面}} = \text{角}^4$, 故に, $4\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4 = 0$(通式)

$(\text{角}^2 - \text{面}^2)(4\,\text{角}^2 - \text{面}^2) = 0$, 遍く過乗を省き $\text{角}^2 - \text{面}^2 = 0$(定式)

七角者



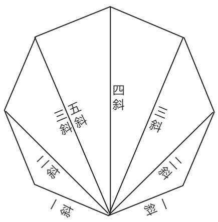
$\text{三率} = \dfrac{\text{三斜}\cdot\text{角}^2}{\text{面}} = 3\,\text{角}^2 - \text{面}^2$ と

$\text{四率巾} = \dfrac{\text{四斜}^2\text{角}^6}{\text{面}^2} = 16\,\text{角}^6 - 20\,\text{面}^2\text{角}^4 + 8\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6$ において $\text{三斜} = \text{四斜}$ だから

$(3\,\text{角}^2 - \text{面}^2)\,\text{角}^2 = 16\,\text{角}^6 - 20\,\text{面}^2\text{角}^4 + 8\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6$, 故に

$7\,\text{角}^6 - 14\,\text{面}^2\text{角}^4 + 7\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6 = 0$(定式)

八角者



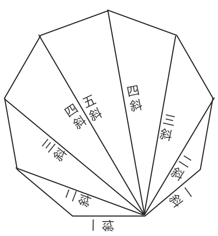
$\text{三率} = \dfrac{\text{三斜}\cdot\text{角}^2}{\text{面}} = 3\,\text{角}^2 - \text{面}^2$ と

$\text{五率} = \dfrac{\text{五斜}\cdot\text{角}^4}{\text{面}} = 5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4$ において, $\text{三斜} = \text{五斜}$ だから

$(3\,\text{角}^2 - \text{面}^2)\,\text{角}^2 = 5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4$, 故に

$2\,\text{角}^4 - 4\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4 = 0$(定式)

九角者



$\text{四率巾} = \dfrac{\text{四斜}^2\text{角}^6}{\text{面}^2} = 16\,\text{角}^6 - 20\,\text{面}^2\text{角}^4 + 8\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6$ と

$\text{五率} = \dfrac{\text{五斜}\cdot\text{角}^4}{\text{面}} = 5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4$ において, $\text{四斜} = \text{五斜}$ だから

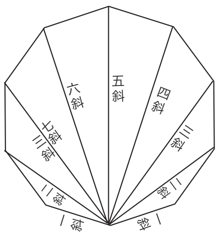
$(16\,\text{角}^6 - 20\,\text{面}^2\text{角}^4 + 8\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6)\,\text{角}^2 = (5\,\text{角}^4 - 5\,\text{面}^2\text{角}^2 + \text{面}^4)^2$, 故に

$9\,\text{角}^8 - 30\,\text{面}^2\text{角}^6 + 27\,\text{面}^4\text{角}^4 - 9\,\text{面}^6\text{角}^2 + \text{面}^8 = 0$(通式),

$(3\,\text{角}^6 - 9\,\text{面}^2\text{角}^4 + 6\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6)(3\,\text{角}^2 - \text{面}^2) = 0$, 遍く過乗を省き

$3\,\text{角}^6 - 9\,\text{面}^2\text{角}^4 + 6\,\text{面}^4\text{角}^2 - \text{面}^6 = 0$(定式)

十角者



$$三率 = \frac{三斜\cdot角^2}{面} = 3\,角^2 - 面^2$$ と

$$七率 = \frac{七斜\cdot角^6}{面} = 7\,角^6 - 14\,面^2角^4 + 7\,面^4角^2 - 面^6$$ において，三斜 = 七斜 だから

$(3\,角^2 - 面^2)\,角^4 = 7\,角^6 - 14\,面^2角^4 + 7\,面^4角^2 - 面^6$，故に

$4\,角^6 - 13\,面^2角^4 + 7\,面^4角^2 - 面^6 = 0$(通式),

$(角^4 - 3\,面^2角^2 + 面^4)(4\,角^2 - 面^2) = 0$，遍く過乗を省き

$角^4 - 3\,面^2角^2 + 面^4 = 0$(定式)

【注】$(角^2 - 面角 - 面^2)(角^2 + 面角 - 面^2) = 0$ さらに過乗を省き $角^2 - 面角 - 面^2 = 0$

以下同様にして

十一角者

$6\,角^{10} - 55\,面^2角^8 + 77\,面^4角^6 - 44\,面^6角^4 + 11\,面^8角^2 - 面^{10} = 0$(通式)

十二角者

$2\,角^6 - 9\,面^2角^4 + 6\,面^4角^2 - 面^6 = 0$(通式)

$-角^4 + 4\,面^2角^2 - 面^4 = 0$(定式)

十三角者

$13\,角^{12} - 91\,面^2角^{10} + 182\,面^4角^8 - 156\,面^6角^6 + 65\,面^8角^4 - 13\,面^{10}角^2 + 面^{12} = 0$(通式)

十四角者

$-4\,角^8 + 25\,面^2角^6 - 36\,面^4角^4 + 9\,面^6角^2 - 面^8 = 0$(通式)

$-角^6 + 6\,面^2角^4 - 5\,面^4角^2 + 面^6 = 0$

【注】$(面^3 - 面^2角 - 2\,面\cdot角^2 + 角^3)(-面^3 - 面^2角 + 2\,面\cdot角^2 + 角^3) = 0$，さらに過乗を省き

十五角者

$15\,角^{14} - 140\,面^2角^{12} + 378\,面^4角^{10} - 450\,面^6角^8 + 275\,面^8角^6 - 90\,面^{10}角^4 + 15\,面^{12}角^2 - 面^{14} = 0$(通式)

$角^8 - 8\,面^2角^6 + 14\,面^4角^4 - 7\,面^6角^2 + 面^8 = 0$(定式)

十六角者

$2\,角^8 - 16\,面^2角^6 + 20\,面^4角^4 - 8\,面^6角^2 + 面^8 = 0$(通式)

十七角以上畧之

右所得定式集之

三角式	$3\,角^2 - 面^2 = 0$
四角式	$2\,角^2 - 面^2 = 0$
五角式	$5\,角^4 - 5\,面^2角^2 + 面^4 = 0$
六角式	$角^2 - 面^2 = 0$
七角式	$7\,角^6 - 14\,面^2角^4 + 7\,面^4角^2 - 面^6 = 0$
八角式	$2\,角^4 - 4\,面^2角^2 + 面^4 = 0$
九角式	$3\,角^6 - 9\,面^2角^4 + 6\,面^4角^2 - 面^6 = 0$
十角式	$角^4 - 3\,面^2角^2 + 面^4 = 0$
十一角式	$6\,角^{10} - 55\,面^2角^8 + 77\,面^4角^6 - 44\,面^6角^4 + 11\,面^8角^2 - 面^{10} = 0$
十二角式	$-角^4 + 4\,面^2角^2 - 面^4 = 0$
十三角式	$13\,角^{12} - 91\,面^2角^{10} + 182\,面^4角^8 - 156\,面^6角^6 + 65\,面^8角^4 - 13\,面^{10}角^2 + 面^{12} = 0$
十四角式	$-角^6 + 6\,面^2角^4 - 5\,面^4角^2 + 面^6 = 0$
十五角式	$角^8 - 8\,面^2角^6 + 14\,面^4角^4 - 7\,面^6角^2 + 面^8 = 0$
十六角式	$2\,角^8 - 16\,面^2角^6 + 20\,面^4角^4 - 8\,面^6角^2 + 面^8 = 0$

於是視其式難得通術故三條分之．但各用通式假遍省面．

得 奇角 角中径率式　名前式

三角	3	○	-1												
五角	5	○	-5	○	1										
七角	7	○	-14	○	7	○	-1								
九角	9	○	-30	○	27	○	-9	○	1						
十一角	11	○	-55	○	77	○	-44	○	11	○	-1				
十三角	13	○	-91	○	182	○	-156	○	65	○	-13	○	1		
十五角	15	○	-140	○	378	○	-450	○	275	○	-90	○	15	○	-1
⋮	⋮	⋮													
k 角	k	○	A	○	B	○	C	○	D	○	E	○	F	○	G

$A=$ 奇零三角衰垜積 $=\dfrac{1}{2^2\cdot 3!}(k-1)k(k+1)$

$B=$ 奇零三乘衰垜積 $=\dfrac{1}{2^4\cdot 5!}(k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)$

$C=$ 奇零五乘衰垜積 $=\dfrac{1}{2^6\cdot 7!}(k-5)(k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)(k+5)$

$D=$ 奇零七乘衰垜積 $=\dfrac{1}{2^8\cdot 9!}(k-7)(k-5)(k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)(k+5)(k+7)$

$E=$ 奇零九乘衰垜積 $=\dfrac{1}{2^{10}\cdot 11!}(k-9)(k-7)(k-5)(k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)(k+5)(k+7)(k+9)$

$F=$ 奇零十一乘衰垜積 $=\dfrac{1}{2^{12}\cdot 13!}(k-11)(k-9)\cdots(k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)\cdots(k+9)(k+11)$

$G=$ 奇零十三乘衰垜積 $=\dfrac{1}{2^{14}\cdot 15!}(k-13)(k-11)\cdots(k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)\cdots(k+11)(k+13)$

得 重偶角 角中径率式　名中式

四角	2	○	-1								
八角	2	○	-4	○	1						
十二角	2	○	-9	○	6	○	-1				
十六角	2	○	-16	○	20	○	-8	○	1		
二十角	2	○	-25	○	50	○	-35	○	10	○	-1
⋮	⋮	⋮									
k 角	2	空	奇零圭垜積	空	奇零再乘衰垜積	空	奇零四乘衰垜積	空	奇零六乘衰垜積	空	奇零八乘衰垜積
底子			甲$=\frac{k}{4}$		乙=甲-1		丙=乙-1		丁=丙-1		戊=丁-1

得 単偶角 角中径率式　名経式

六角	1	○	-1												
十角	1	○	-3	○	1										
十四角	1	○	-6	○	5	○	-1								
十八角	1	○	-10	○	15	○	-7	○	1						
二十二角	1	○	-15	○	35	○	-28	○	9	○	-1				
二十六角	1	○	-21	○	70	○	-84	○	45	○	-2	○	1		
三十角	1	○	-28	○	126	○	-210	○	165	○	-66	○	13	○	-1
⋮	⋮	⋮													
k 角	1	空	圭垜積	空	再乗衰垜積	空	四乗衰垜積	空	六乗衰垜積	空	八乗衰垜積		十乗衰垜積		十二乗衰垜積
底子			甲$=\dfrac{k-2}{4}$		乙=甲-1		丙=乙-1		丁=丙-1		戊=丁-1		己=戊-1		庚=己-1

此経式を観るに各ゝ左右に分て平方に開かるゝなり．然れども左右の商相減じて可なるや，相併せて可なるや定め難し．且左右に分るも乗数多きときは容易ならず．故に別に矩合を求めて緯式と云．経式と互減して階級を縮め定式を得る．其法如左．
照視前式与奇式

- 六角では，2 角中径 = 三斜 だから 2 角$^3 = 3$ 面 $\cdot$ 角$^2 -$ 面^3，故に
  -2 角$^3 + 3$ 面 $\cdot$ 角$^2 -$ 面$^3 = 0$(緯式)
- 十角では，2 角中径 = 五斜 だから 2 角$^5 = 5$ 面 $\cdot$ 角$^4 - 5$ 面^{3}角$^2 +$ 面^5，故に
  -2 角$^5 + 5$ 面 $\cdot$ 角$^4 - 5$ 面^{3}角$^2 +$ 面$^5 = 0$(緯式)
- 十四角では，2 角中径 = 五斜 だから同様にして
  -2 角$^7 + 7$ 面 $\cdot$ 角$^6 - 14$ 面^{3}角$^4 + 7$ 面^{5}角$^2 -$ 面$^7 = 0$(緯式)

逐如此求之集之如左

得 単偶角 角中径率式　名緯式

六角	-2	3	○	-1											
十角	-2	5	○	-5	○	1									
十四角	-2	7	○	-14	○	7	○	-1							
十八角	-2	9	○	-30	○	27	○	-9	○	1					
二十二角	-2	11	○	-55	○	77	○	-44	○	11	○	-1			
二十六角	-2	13	○	-91	○	182	○	-156	○	65	○	-13	○	1	
三十角	-2	15	○	-140	○	378	○	-450	○	275	○	-90	○	15	○	-1

於是経式与緯式相減而縮階級得后式

得単偶角角中径率式　名后式

六角												-1	1
十角											-1	1	1
十四角										-1	2	1	-1
十八角									-1	2	3	-1	-1
二十二角								-1	3	3	-4	-1	1
二十六角							-1	3	6	-4	-5	1	1
三十角						-1	4	6	-10	-5	6	1	-1
三十四角					-1	4	10	-10	-15	6	7	-1	1
三十八角				-1	5	10	-20	-15	21	7	-8	-1	1
四十二角			-1	5	15	-20	-35	21	28	-8	-9	1	1
四十六角		-1	6	15	-35	-35	56	28	-36	-9	10	1	-1
五十角	-1	6	21	-35	-70	56	84	-36	45	10	11	1	1
⋮	⋮	⋮											
k 角	四乗衰垜積	三乗衰垜積	三乗衰垜積	再乗衰垜積	再乗衰垜積	三角衰垜積	三角衰垜積	圭垜積	圭垜積	丑＝子-1	子$=\dfrac{k-6}{4}$		
底子	壬＝辛-1	辛＝庚-1	庚＝己-1	己＝戊-1	戊＝丁-1	丁＝丙-1	丙＝乙-1	乙＝甲-1	甲＝丑-1				

右前中後の三式を用て法の如く逐て横に求るときは万々角に到と雖速に得る也．此三式を以て縦に求るときは左の如し．

奇角

仮に十五角の汎式を置き示之

十五角角中径巾率を得汎式

面巾を省く故に率と名く．此式過乗有る故に汎式と名く．

$$15x^7-140x^6+378x^5-450x^4+275x^3-90x^2+15x-1=0$$

$$子=\frac{k^2}{8}-\frac{1}{8}\qquad(k=角数)$$

$$丑=子-1,\quad 寅=丑-2$$

$$卯=寅-3,\quad 辰=卯-4$$

$$\vdots$$

逐如此

十五角角中径巾率を得汎式

$$15x^7-\frac{最下級\cdot子}{1\cdot3}x^6+\frac{二級\cdot丑}{2\cdot5}x^5-\frac{三級\cdot寅}{3\cdot7}x^4+\frac{四級\cdot卯}{4\cdot9}x^3-\frac{五級\cdot辰}{5\cdot11}x^2+\frac{六級\cdot巳}{6\cdot13}x-\frac{七級\cdot午}{7\cdot15}=0$$

逐如此求之

重偶角 (**四角，八角，十二角，十六角逐如此**)

仮に二十角の汎式を置き示之

二十角角中径巾率を得る汎式

$$2x^5-25x^4+50x^3-35x^2+10x-1=0$$

$$子=\frac{k^2}{4^2}$$

$$丑=子-1,\quad 寅=丑-3$$

$$卯=寅-5,\quad 辰=卯-7$$

逐如此

重偶角角中径巾率を得る汎式

$$2x^5-子\,x^4+\frac{二級\cdot丑}{3\cdot4}x^3-\frac{三級\cdot寅}{5\cdot6}x^2+\frac{四級\cdot卯}{7\cdot8}x-\frac{五級\cdot辰}{9\cdot10}=0$$

逐如此求之

単偶角 (**六角，十角，十四角，十八角逐如此**)

仮に二十六角の汎式を置き示之

二十六角角中径率を得る汎式

$$-x^6+3x^5+6x^4-4x^3-5x^2+x+1=0$$

$$三級=\frac{k-6}{4},\quad 子=三級-1,\quad 丑=子-1,\quad 寅=丑-1,\quad 卯=寅-1$$

逐如此求之

単偶角角中径率を得る汎式

$$-\frac{六級\cdot卯}{3}x^6+\frac{五級\cdot寅}{子}x^5+\frac{四級\cdot丑}{2}x^4-子\,x^3-三級\,x^2+x+1=0$$

実級	定数項	1
方級	x の係数	1
三級	x^2の係数	$-\frac{k-6}{4}$
四級	x^3の係数	$-子$
五級	x^4の係数	$\frac{四級\cdot丑}{2}$
六級	x^5の係数	$\frac{五級\cdot寅}{子}$
七級	x^6の係数	$-\frac{六級\cdot卯}{3}$
八級	x^7の係数	$-\frac{七級\cdot辰}{丑}$
九級	x^8の係数	$\frac{八級\cdot巳}{4}$
十級	x^9の係数	$\frac{九級\cdot午}{寅}$

陽式

夫當角術は万々角に到るの式と雖速に其式を得る一例術ゆへ過乗ある式多し．故に此式を汎式と名つけ其過乗を知る法及之を省く法本術並に其解中に詳に示す．故に爰に略し，角数自約の式而巳次に出す．

重偶角

汎式級	通式	分解	約式級
十二角	$2角^6-9角^4+6角^2-1=0$	$(2角^2-1)(角^4-4角^2+1)=0$	四角式
二十角	$2角^{10}-25角^8+50角^6-35角^4+10角^2-1=0$	$(2角^2-1)(1-8角^2+19角^4-12角^6+角^8)=0$	四角式
⋮	⋮		

奇角

汎式級	通式	分解	約式級
九角	$9角^8-30角^6+27角^4-9角^2+1=0$	$(3角^6-9角^4+6角^2-1)(3角^2-1)=0$	三角式
十五角	$15角^{14}-140角^{12}+378角^{10}-450角^8+275角^6$ $-90角^4+15角^2-1=0$	$(3角^2-1)(5角^4-5角^2+1)$ $\times(角^8-8角^6+14角^4-7角^2+1)=0$	三角式 五角式
⋮	⋮		

単偶角約式者在本術中故畧之．

◯求平中径術解

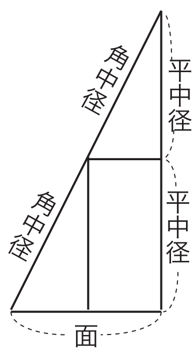
平中径を求めるには，まず其角の角中径を得る式を列して，假に七角角中径率を得る式を列し，空級を縮めて

$7x^3-14x^2+7x-1=0 \qquad x=角^2$

$7y^3-56y^2+112y-64=0 \qquad y=4角^2$

$7z^3-35z^2+21z-1=0 \qquad z=4角^2-1=4\times平中径^2$

此他推此理求之故畧之



奇角平中径巾率四段を得る式　名生式

三角	3	-1			
五角	5	-10	1		
七角	7	-35	21	-1	
九角	9	-84	126	-36	1
⋮	⋮				

単偶角平中径巾率四段を得る式

六角	1	-3			
十角	1	-10	5		
十四角	1	-21	35	-7	
十八角	1	-36	126	-84	9
⋮	⋮				

これは奇角式の左右顚倒也．角数は奇角の倍也．

重偶角平中径二段を得る式　名陽式

四角	-1	1				
八角	-1	2	1			
十二角	-1	3	3	-1		
十六角	-1	4	6	-4	-1	
二十角	-1	5	10	-10	-5	1
⋮	⋮					

◯求二距斜術解

角中径を得る図解及び適等を推て之を得る．故に之を畧す．

得奇角二距斜率式

三角	-1	1							
五角	-1	1	1						
七角	-1	1	2	-1					
九角	-1	1	3	-2	-1				$(x-1)(x^3-3x-1)$ 省三角式
十一角	-1	1	4	-3	-3	1			
十三角	-1	1	5	-4	-6	3	1		
十五角	-1	1	6	-5	-10	6	4	-1	$(x-1)(x^2-x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$ 省三角式五角式
十七角	-1	1	7	-6	-15	10	10	-4	-1	

これは単偶角の角中径率を得る式の顚倒也．角数は其半分也．

重偶角
単偶角 二距斜巾率を得る式

四角	1	-2				
六角	1	-3				
八角	1	-4	2			
十角	1	-5	5			
十二角	1	-6	9	-2		$(x^2-2)(x^4-4x^2+1)$ 省四角式
十四角	1	-7	14	-7		
十六角	1	-8	20	-16	2	
十八角	1	-9	27	-30	9	$(x^3-3)(x^6-6x^4+9x^2-3)$ 省六角式

重偶角は角中径巾率を得る式の顚倒也．角数は元の如し．

単偶角は奇角角中径巾率を得る式の顚倒也．角数は初之倍数也．

諸式省過乗求定式法詳在本術中故畧之．学者為照合定式件々記左 (定式一覧表をまとめて記す)

奇角角中径巾率						単偶角二距斜巾率
九角	3	-9	6	-1		十八角
十五角	1	-8	14	-7	1	三十角

重偶角二距斜巾率						重偶角角中径巾率
二十角	1	-4	1			十二角
二十四角	1	-8	19	-12	1	二十角

単偶角角中径率							
十八角	-1	3	0	-1	-1		
三十角	-1	4	4	-1	6	1	-1

奇角二距斜率					
九角	1	0	-3	1	
十五角	1	-1	4	4	-1

重偶角平中径率二段					
十二角	1	-4	1	1	
二十四角	1	-8	2	8	1

単偶角平中径率四段						奇角平中径巾率四段
十八角	-1	33	-27	3		九角
三十角	1	-92	134	-28	1	十五角

此他詳于本術中故畧之．

従百八十七術以下之解容易難會得故除之．

【附録】――――――――――――――――――――――――――――――――

衰垜票

	1	1	1	1	1	1	1
圭垜	1	2	3	4	5	6	7
三角衰垜	1	3	6	10	15	21	28
再乗衰垜	1	4	10	20	35	56	84
三乗衰垜	1	5	15	35	70	126	210
四乗衰垜	1	6	21	56	126	252	462

圭垜積 $= \dfrac{1}{2!}k(k+1)$

三角衰垜積 $= \dfrac{1}{3!}k(k+1)(k+2)$

再乗衰垜積 $= \dfrac{1}{4!}k(k+1)(k+2)(k+3)$

三乗衰垜積 $= \dfrac{1}{5!}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$

四乗衰垜積 $= \dfrac{1}{6!}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$

奇零衰垜票

底子	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
圭垜	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
三角	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385
再乗	1	6	20	50	105	196	336	540	825	1210
三乗	1	7	27	77	182	378	714	1254	2079	3289
四乗	1	8	35	112	294	672	1386	2640	4719	8008
五乗	1	9	44	156	450	1122	2508	5148	9867	17875

$\boxed{187}$[*6] 角数 $(=n)$ と一辺の長さ (面) が与えられたとき，角中径巾，平中径巾，二距斜巾を求める式をつくれ．但し，開方を用いないで答よ．

$$子 = \left(\frac{6}{n}\right)^2 + \frac{1^2 - 原数}{3\cdot 4}原数 + \frac{2^2 - 原数}{5\cdot 6}一差 + \frac{3^2 - 原数}{7\cdot 8}二差 + \cdots$$

$$角中径^2 = \frac{面^2}{子},\quad 平中径^2 = 角中径^2 - \left(\frac{面}{2}\right)^2,\quad 二距斜^2 = (4 - 子)\,面^2$$

$\boxed{188}$ 角数 $(=n)$ と一辺の長さ (面) が与えられたとき，角中径を求める式をつくれ．但し，開方を用いないで答よ．

$$天 = \left(\frac{6}{n}\right)^2,\quad 角中径 = \frac{面}{\dfrac{6}{n} + \dfrac{1^2 - 天}{4\cdot 6}原数 + \dfrac{3^2 - 天}{8\cdot 10}一差 + \dfrac{5^2 - 天}{12\cdot 14}二差 + \cdots}$$

原数	0.159154943091895
一差	0.26179938779914
二差	0.301449912169
三差	0.3137106557
四差	0.31711081
五差	0.318004

$$角中径 = \left(\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{五差}{n^2} + 四差}{n^2} + 三差}{n^2} + 二差}{n^2} + 一差}{n^2} + 原数\right) \times 面 \times n$$

$\boxed{189}$ 角数 $(=n)$ と一辺の長さ (面) が与えられたとき，平中径を求める式をつくれ．但し，開方を用いないで答よ．

原数	0.159154943091895
一差	0.5235987755982
二差	0.34451418533
三差	0.323830354
四差	0.3196077
五差	0.31862

$$平中径 = \left(原数 - \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{五差}{n^2} + 四差}{n^2} + 三差}{n^2} + 二差}{n^2} + 一差}{n^2}\right) \times 面 \times n$$

[*6] 187 番が 2 題ある．188 番の間違い．以後問題番号は 1 づつずれる．またこれ以後の算題に術解はない

$\boxed{190}$ 角数 $(=n)$ と一辺の長さ (面) が与えられたとき，二距斜を求める式をつくれ．但し，開方を用いないで答よ．

原数	2
一差	9.869604401089358
二差	8.1174242528335
三差	2.67052533771
四差	0.470661260
五差	0.0516137

$$二距斜=\left(原数-\cfrac{一差-\cfrac{二差-\cfrac{三差-\cfrac{四差-\cfrac{五差}{n^2}}{n^2}}{n^2}}{n^2}}{n^2}\right)\times 面\times 2$$

$\boxed{191}$ 円径 1 寸の円周は幾らか．

答曰　円周 3.14159265358979323846264338З 有奇

術曰

$$円周=\left(4-\frac{1}{5}原数-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}一差-\frac{3\cdot 6}{11\cdot 13}二差-\frac{5\cdot 8}{15\cdot 17}三差-\cdots\cdots\right)\times 円径$$

$$=\left(4-\frac{4}{5}-\frac{4\cdot 1\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}-\frac{4\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}-\frac{4\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 6\cdot 5\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17}-\cdots\cdots\right)\times 円径$$

$\boxed{192}$ 円径 1 寸の円積は幾らか．

答曰 円積 0785398163397448309656608458 有奇

術曰

$$円積=\left(1-\frac{1}{5}原数-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}一差-\frac{3\cdot 6}{11\cdot 13}二差-\frac{5\cdot 8}{15\cdot 17}三差-\cdots\cdots\right)\times 円径^2$$

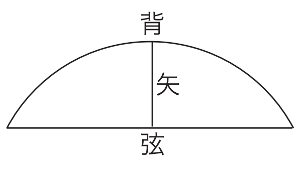
$\boxed{193}$ 球径 1 寸の球積は幾らか．

答曰 球積 0.5235987755982988730771072З0 有奇

術曰

$$球積=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}原数-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}一差-\frac{3\cdot 6}{11\cdot 13}二差-\frac{5\cdot 8}{15\cdot 17}三差+\cdots\cdots\right)\times 球径^3$$

$\boxed{194}$ 図のような円闕がある．弦 8 寸，矢 2 寸のとき，背は幾らか．



答曰　背 9 寸 2729521800 有奇

術曰

$天=弦^2+4\,矢^2$

$地=\sqrt{天}$

$$人 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{弦}{地}\right)$$

$$背 = \frac{天地人}{矢^2} - \frac{人}{3}原数 - \frac{2\,人}{5}一差 - \frac{4\,人}{7}二差 - \frac{6\,人}{9}三差 - \cdots\cdots$$

推数示之

原数	9.44271909999
一差	0.16614906333
二差	0.00350816466
三差	0.00010581908
四差	0.00000372387
五差	0.00000014295
六差	0.00000000580
七差	0.00000000024

七差まで計算すると，9.27295218006 で真数 11 位まで得られる．($背 = 10\sin^{-1} 0.8 = 9.272952180016123$)

$\boxed{195}$ 長径 5 寸，短径 3 寸の側円の周長は幾らか．

答曰 側円周 12 寸 76349953 有奇

術曰

$$人 = \sqrt{長^2 + 短^2}$$

$$南天 = \left(\frac{短}{長} \div 2\right)^2$$

$$北天 = \left(\frac{長}{短} \div 2\right)^2$$

$$南極 = \left(\frac{長}{人}\right)^2$$

$$北極 = \left(\frac{短}{人}\right)^2$$

$$\boxed{南角 = \frac{南極}{5} - 原数 \cdot 南天}$$

$$\boxed{南亢 = \frac{南極^2}{7} - 2\,原数 \cdot 南天 + \frac{1 \cdot 一差 \cdot 南天 \cdot 3}{3}}$$

$$\boxed{南氐 = \frac{南極^3}{9} - 3\,原数 \cdot 南天 + \frac{2 \cdot 一差 \cdot 南天 \cdot 3}{3} - \frac{1 \cdot 二差 \cdot 南天 \cdot 5}{6}}$$

$$\boxed{南房 = \frac{南極^4}{11} - 4\,原数 \cdot 南天 + \frac{3 \cdot 一差 \cdot 南天 \cdot 3}{3} - \frac{2 \cdot 二差 \cdot 南天 \cdot 5}{6} + \frac{1 \cdot 三差 \cdot 南天 \cdot 7}{10}}$$

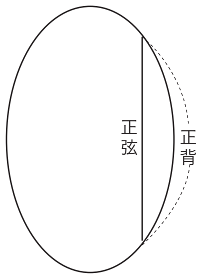
逐如此求之

南極を北極に，南天を北天に換え北宿名とする．$\boxed{北角 = \dfrac{北極}{5} - 原数 \cdot 北天}$ など

$$側円周 = \left\{\left(\frac{2}{3} + 南宿名 + 北宿名\right) \times 南極 \times 北極 + 2\right\} \times 人$$

これの術解は『側円周解』(川井久徳撰・戸田廣胖校正/1821 年) に詳しく書かれている．

$\boxed{196}$ 図のような側円がある．長径 5 寸，短径 3 寸，正弦 4 寸のとき，正背は幾らか．但し長径と正弦は平行す．



答曰　正背 4 寸 25088457 有奇

術曰

$$天 = \left(\frac{短}{長} \div 2\right)^2$$

$$人 = \left(\frac{正弦}{長}\right)^2$$

$$\boxed{角 = \frac{人}{2 \cdot 5} - 原数 \cdot 天}$$

$$\boxed{亢 = \frac{人^2}{2 \cdot 7} - 2\,原数 \cdot 天 + \frac{1 \cdot 一差 \cdot 天 \cdot 3}{3}}$$

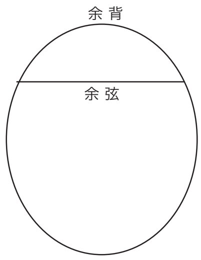
$$\boxed{氐 = \frac{人^3}{2 \cdot 9} - 3\,原数 \cdot 天 + \frac{2 \cdot 一差 \cdot 天 \cdot 3}{3} - \frac{1 \cdot 二差 \cdot 天 \cdot 5}{6}}$$

$$\boxed{房 = \frac{人^4}{2 \cdot 11} - 4\,原数 \cdot 天 + \frac{3 \cdot 一差 \cdot 天 \cdot 3}{3} - \frac{2 \cdot 二差 \cdot 天 \cdot 5}{6} + \frac{1 \cdot 三差 \cdot 天 \cdot 7}{10}}$$

逐如此求之求宿名多件則得真数多位．

$$正背 = \left\{\left(\frac{1}{6} + 角 + 亢 + 氐 + 房 + \cdots\right) 天 \cdot 人 \cdot 4 + 1\right\} \times 正弦$$

若側円を下図の如く截時，題に長径短径余弦の三位ありて余背を求んと欲る時は，右術中の長径を短径と互換 (たがひにかへ) して是を求むべし．但余弦みじかければ真数を得る事早く，長ければ遅し．



余りて長ければ宿名を求るに次第に大数を得る．是を極とす．此の如き時は右余弦を以別に術に仍て正弦を求め右正弦を以正背を求め，又別に側円半周を求め得る内正背を減じ余余背を得る也．此のごとく反復して求る事迂遠なるが如しといへども，常の弧背を求る術も矢あり弦ありて其背を求る時，若其矢圓半径を過る時は圓径の内右の矢を減じ余を以背を求め是を以圓周を減じ余を以問所の背とすると同理なり．

右側円周背の術及巻中圓壔に空圓を穿ちたる術と十字環の術とは門人川井氏*7新考の術なり

点竄指南録巻之三 終

*7 川井久徳 (1766〜1835) かわいひさよし

算法点竄指南録巻之四
武江 阪部勇左衛門廣胖　著
馬場金之丞正督　訂

【用字和解】
此書中に用ゆる字のみに限らず都(すべ)て算に多くとりあつかふ字を出し俗語を用ひて字義の大抵を釈す

商(しやう)	割あらはす数をいふ
実	ほうにてわるべき数をいふ
法	かけわり共に見あわせる数を云　俗に目安といふ
帰 或 皈	一けたのほうにてわる事をいふ
除	けたかずにかかはらずわる事をいふ
帰除	上におなじ
約	是もわる事をいふ
因	一けたの法をかくるをいふ
相因	ひとけたの法をかけるをいふ
乗	けたの数にかかはらずかけるを云
相乗	是もけたかずにかかはらずかけあわせる事をいふ
因乗	上におなじ
連乗	一度かけ合せたる所へまた一度も二度も別の物をかけるをいふ
自因	一けたの物同数をかけあわせるをいふ
自乗	けた数にかかわらず同数をかけあわせる事をいふ
自之(これをじす)	上におなじ
再自因	一けたの同数を二度かけ合ることをいふ
再自乗	けた数にかかはらず同数を二度かけあわせるをいふ
三自因	一けたの同数を三度かけあわせるをいふ
三自乗	けた数にかかはらず同数を三度かけあわせるをいふ
折半	ふたつにわるをいふ
半之(はんす)	上におなじ

実如法而一	法にて実をわる事をいふ
倍之	二をかける事をいふ
三　之	三をかける事をいふ
四之	四をかける事をいふ
一段二段三段	一ツ二ツ三ツといふがごとし
一次二次三次	一度二度三度といふがごとし
一箇二箇三箇	一ツ二ツ三ツといふにおなじ
和	あひあわせる事をいふ
併	二数あひあわせる事をいふ
加	ましそゆる事をいふ
相加	是もましそゆる事也
加入	上におなじ
截	きる事をいふ
分	わくる事をいふ
減	ひく事をいふ
内減	此数の内彼数を引事をいふ　　a 内減 $b = a - b$
以　減	彼数の内此数を引事をいふ　　a 以減 $b = b - a$
相減	漢人は少を以多を引事に用ゆ．今我邦の人はいつれにても多き内少を引に用ふ
差(たがひ)	多少不同の数をいふ
較	相減ずる余の数をいふ
同矩(どうく)	彼も是も同じのりといふ事也
互	たがひに也．たとえへは互乗とあるは右の上を元の下にかけ，左の上にあるを右の下にかくるを云
逓	たがひ也．たとえへは等逓差といふは甲と乙の差も乙と丙の差も同じことをいふ
原	初の数也

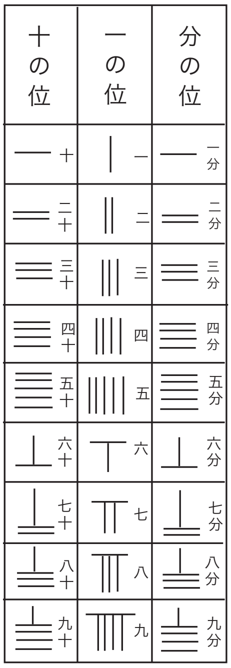
開方	自乗したる数を原に還すなり．又平方以上の通称也
開立	再自乗したる数を原に還す也
甲商	甲数を平方にひらきたるを云．乙商丙商の類みなこれにならへ
二箇商	二ヶを平方にひらきたるを云．三ヶ商五ヶ商の類みな是にならへ
見商数	商にあらはれたる数をいふ
積	俗に坪数と云．かけてなる数をいふ〇田畑屋敷箔布の類の坪を平積といふ．箱の坪材木銅鉄の類の坪を立積といふ．〇通じて積とはかりにいふなり
冪	同数をかけ合せたる数をいふ〇二度かけ合せたる数を再乗巾と云．三度かけ合せたる数を三乗巾といふ〇四乗巾以上是にならへ
覓積	球の皮の坪をいふ
上位	上のかたをいふ
下位	下のかたを云
首位	いく位もつづきたる其始をいふ
尾位	幾位もつづきたる其終りをいふ
本位	法にたひしてよびあわする位をいふ
身	上におなじ
右行(うこう)	右のかたに列したるをいふ
左行(さこう)	左のかたに列したるをいふ
進(すすむ)	上へあげる事をいふ
退	下へさがる事をいふ
階	さんばんの畫方の上下に重るをいふ
級	上におなじ
罫(くわい)(けい)	さんばんの畫方の横にならぶ事をいふ
零	一けた間のとぶをいふ
空	もののなきをいふ
就分(つくぶんに)	分は分母子の分也．其分母につく分子につくといふ事也．

不盡	わりつくさざる数をいふ
有奇	上におなじ
適等	その理おなじき物をいふ
矩合	かねあひ也．みだりにゆがまず．大工の曲尺のごとく方面の角の如くなるを云
奇数	一三五七九かくの如く二を増数をいふ．俗に半の数といふ
偶数	二四六八十かくの如く二を増数をいふ．俗に調の数といふ
直	ゆがまずすくなるかたちを云
斜	すぐならざるかたち，あるひは矩合せざるかたちをいふ
省	はぶく也．たとへは，三ツある物は一ツ二ツにもし，四ツある物は二ツ三ツにもするを云
遍	あまねく也．のこりなくと云がごとし
変	あらためかへるをいふ
化(くわす)	上におなじ
括(くくる)	二位三位ある物を一位にするをいふ
解(とく)	上の如く括りたる物を元のごとく別ゝに分るをいふ
寄左◦寄甲位◦寄位◦名天	此類は重ねてよび出すべき為になづけおくなり
定甲◦定乙◦	此類定の字の出は，初に甲となづけたる物を括りなどして又甲とのみいふ時は後呼出すときいつれの甲なるか忘れぬゆへに定の字をくはふなり

【算籌縦横置列解(さんぎたてよこおきつらねるかい)　古法を爰にしるす．別に捷法あり．此巻のすへ二十二丁めにしるす.】
○算木縦横其大数は，一は縦，十は横，百は縦，千は横也．其小数も亦一は縦，分は横，厘は縦，毫は横也．一の位を縦とさだめて其縦の次は横，又横の次は縦といづくまでも此のごとく置なり．なを次の図にて考へ合すべし．
○六以上は積(つみ)あつめずと云て，六を六本，七を七本は置ざる也．六以上は一算を上の方に置．是を五算と云．縦の位には五算を横に置，横の位には五算を縦に置なり．
○五は単はらずと云て，五算一本ばかりは置ず．五本聚(あつめ)置なり．次の図にて見るべし．

【算籌縦横置列図】

原文では一毫より九千までをしるす，とあるがここでは分，一，十の位のみを記し，他は省略する



【筆算正負解】

○正算者 ─── 此の如し又　此如くも亦　此如くも引

此亦の二品は負を正にするとき，或正をあやまつて負にしたるときに用ゆ．

○負算者　此の如し亦　此如くも亦　此如くも引

此亦の二品は負を正にしたるをまた負にするとき用ゆ．

斜に引たる数奇数は負算，偶数は正算とするべし．

【傍書左右解】

○｜勾　或　｜股　或　｜甲　或　｜乙

此のごとく一算を引手右の傍に文字を書是を右傍書といふ

○勾｜　或　股｜　或　甲｜　或　乙｜

此のごとく一算を引て左の傍に文字を書是を左傍書といふ

【同名異名解】

正算と正算是を同名と云．

負算と負算是も亦同名と云

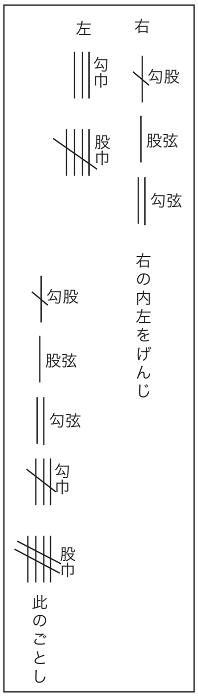
正算と負算是を異名といふ．

【相加相減並異減同加解】

点竄元より階級にかゝはらず上下左右隋意(おもいのまま)に置列(つらなる)といへども初学者の見安からん為に次第に下級に置て是をしめす．

○相加　　正算にても負算にても有の侭にて左右ひとつにするをいふ．

○相減　　元正なる者は負とし，元負なる者は正として，左右ひとつにするを相減といふ．

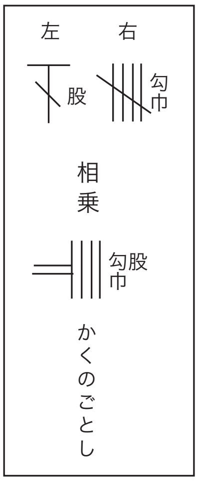


【相乗自乗解】

同名相乗為正　異名相乗為負　同名異名の觧前にあり．

○相乗

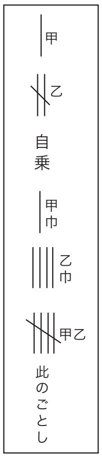
相乗の例は左を置，右を乗ても，亦右を置，左を乗ても同事なりといへども初学者見安からん為に各右を置左を乗て是をしめす．



○自乗

自乗は同名の同傍書なる物を相乗する也．故に相乗の例のごとくする時は得るといへども夫にては少し迂遠な

り故に別に其法を示す．



○再自乗

是は自乗して得たる数にまた一度懸るを云．

○三自乗

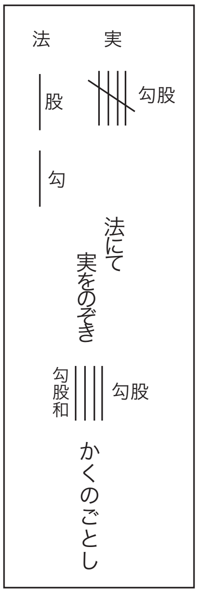
是は自乗したる数をまた自乗する也．

四自乗以上是にならへ．

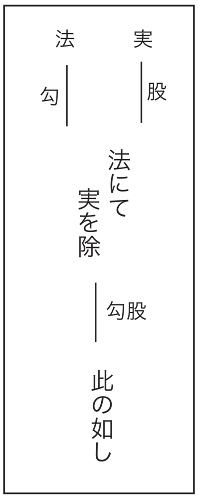
【帰除傍書解】

○帰除の例は実と法と異名なるを正商とし，同名なるを負商とす．相乗の例と相反す．

○実法異名を得て正商を得るを常とす．実法同名を得て負商を得るを変とし常に用ひず．



除たる物を法にして又除ときは左右の傍書相反して，左傍書は右傍書となり，右傍書は左傍書となる也．

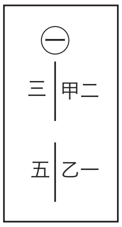


此余は此理をおしてしるべし．

【通分母解　遍通（へんつう）術といふ】

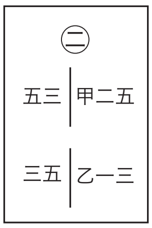
分母とは即除数を云．幾位もありて其除数各別成を齊（ひとしく）するを分母を通ずといふ．

たとへば甲三分之二，乙五分之一あり．此分母を通ぜんとするには題辞に従て是を置

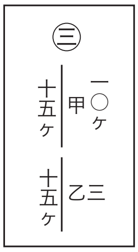


上位左右に五を乗除し

下位左右に三を乗除し



是をへんじ第三の図のごとし



此のごとし

【与寄左相消解(ひだりによするとあいけすのかい)】

凡点竄は左に寄る数と相消数との二位を求るを要とす．左に寄る物は即相消の数と適等の物なり．此左に寄る数と相消数とは各求め安き所を見立て求むべきなり．初のほどは左に寄る数を易く得れば，相消数を求むにくるしみ，相消数を易く得れば，左に寄る数をもとむるに苦みて二つながら易き事なし，といへども修行の功積りぬれば次第に求めやすくなるなり．

【相消与相減有少異解】

左に寄たる物と相消は即相減する事也．しかるに相消と相減との名目異なる事は相減は寡(すくなき)を以多をげんずる也．たとへば勾を以股或弦をげんずるが如し．相消といふは弦にて弦を減るがごとく，適等なる物を相減るが故に右より左を減ても，又左より右をげんじても同事也．減尽すの理にて相消といふ也．

【號(なづく)空数(くうすう)及矩合(くごう)解】

左に寄ると相消得る数を空数と号(なづく)るは傍書にて見たる時は正負もたがひ傍書も別なれども数を推て試れば正の数と負の数と同数を得る故に異減して其数空となる．是を空数といふ．亦矩合と号(なづく)るの意(こころ)は左によする数と相消数と脗合 (ふんごう) して，たとえば直なる物の簾(かど)に曲尺(まがりかね)を当てみるが如く合たると云意(こころ)にて矩合といふなり．空数といひ矩合といふ何れもおなじ事也．

【比例式解】

比例式とは下図のごとく同矩 俗に同勾配といふなり の物をならべ置を云 必大勾因小股と小勾因大股と適等する也

式例比	
小勾	大勾
小股	大股

【維乗解(ゆひじやうのかい)】

維乗とは前図のごとく四所に有物を斜に乗ずるをいふ．たとへば大勾に小股を乗じ或小勾に大股を乗ずるを維乗といふ．

【算盤解(さんばんのかい)】

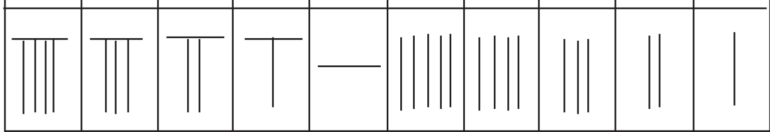
左 上と云 首と云 【圖 盤 算】 右 下と云 尾と云

万	千	百	十	一	分	釐	毫
				商			
				實			
				方			
				廉			
				隅			
				三乗			
				四乗			

凡算術の業(わざ)に顆盤(そろばん)術と算筹(さんぎ)術との二品あり．六七十年以前までは顆盤(そろばん)にて得べき術も算筹(さんぎ)術をもちゆ．近年算筹を翫(もてあそ)ぶの迂遠なるを嫌ひ算筹を用ゆべき術も顆盤にて得るを譽(ほまれ)とす．予が門人さきに開式新法と云書をあらはす．数百乗の開方式にて級ごとに正負異なる式にてもその術に因て其商数を得ざる事なし．しかれども算筹にて開除の法をしらざるもいかがなれば次に開除の法をしるす．されども大極の元に一算を立某(それがし)となづけ題に随て相乗自乗相加相減等の業を成て左に寄と相消の両数を求め開方の式を得る．此法は唐(もろこし)山元の世より初(はじまり)し法なり．其業天元指南等にも記すごとく至(いたつ)てむつかしく過乗等ありても見へがたくあしく故に初より此天元法を用ひずして先点竄法に仍て空数をもとめ，其空数を以開除の式を作る．是迠は傍書を用ゆ．夫より数を以傍書にかへ 此傍書に換る訳第一問の觧より後てにしるし置其理を見てしるべし 是を以算筹にうつして開除すべし．其開除の法及縦横置列(つらね)る捷法次にしるす．

【算筹開除捷法】

算筹縦横の觧前にしるす所は古法を云．解(くわい)もなく置列には古法の如く置もよしといへども，或は横に置或は縦に置進退の度ごとに縦横置換(かわ)る至て迂遠なり．いま予が門人に教示する置列法左に記がごとし．古法にかゝはらず捷径を貴ぶ人は是にしたがふべし．



九	八	七	六	五	五	四	三	二	一
					五は此のごとく五本も置亦横に一本も置なり		三以上いづれも此理を推てしるべし	二も二十も二百も二千も二万も二分も二厘も二毛も　此の如し	一も十も百も千も一分も一厘も一毛も　此のごとし